Sistemi a scala

Un sistema $UX=c$ si dice <u>a scala</u> se la sua matrice dei coefficienti (oppure $(U|c)$) è una <u>matrice a scala</u> nel seguente senso:

Una <u>matrice a scala</u> è una matrice U della forma

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & p_2 & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & p_r & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Es</u>:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \underline{\text{a scala}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \underline{\text{non a scala}}.$$

Per dare la definizione formale introduciamo la seguente terminologia:

Data una matrice $S \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ non-nulla, sia $S_i = (s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{in}) \neq 0$ una sua riga non-nulla. Allora il <u>pivot</u> della riga S_i è la prima componente non nulla di S_i, ovvero è il numero

$$P_i = s_{i\,j(i)} \in \mathbb{R}$$

t.c.

$$s_{ik} = 0 \quad \forall\ k < j(i).$$

<u>Es</u>:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{3} & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{10} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} P_1 = 3 \\ P_2 = 4 \\ P_3 = 10 \end{matrix}$$

Una matrice $U \in Mat_{m \times n}$ si dice <u>a scala</u> se soddisfa le seguenti proprietà

1) se due righe consecutive U_i e U_{i+1} sono non-nulle, allora il pivot p_i di U_i si trova a sinistra del pivot p_{i+1} di U_{i+1}:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & j(i) & & & j(i+1) & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_i & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & p_{i+1} & * & \cdots * \end{bmatrix} \qquad j(i)<j(i+1)$$

2) Se $S_i = 0$ allora anche $S_{i+1} = 0$.
("le righe nulle sono in basso".)

<u>OSS</u>: 1) e 2) vogliono dire: $\exists$ indice r t.c. $S_1, \dots, S_r$ sono non-nulle e $S_{r+1}, \dots, S_m = 0$.
$\forall i : 1 \leq i \leq r-1$ sia $j(i)$ la colonna che contiene il pivot $p_i = S_{i\,j(i)}$ di S_i.
Allora $j(i) < j(i+1)$.

Esempi di sistemi a scala:

Si consideri il seguente sistema lineare nelle variabili $x_1, \dots, x_6$:

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_4 + x_5 - x_6 = 3 \\ x_5 + x_6 = 4 \end{cases}$$

Esso ha matrice associata

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) = (U|c)$$

a scala. I pivot sono

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = 1$$

Le colonne che contengono i pivot:

$$j(1) = 2, \quad j(2) = 4, \quad j(3) = 5.$$

Le colonne che contengono i pivot di una matrice a scala si chiamano colonne dominanti.

Se $UX=c$ è un sistema a scala le variabili

$$x_{j(1)}, \dots, x_{j(r)}$$

che corrispondono alle colonne dominanti si chiamano variabili dominanti o dipendenti.
Le altre variabili si chiamano variabili indipendenti o libere.

Es: Nel sistema a scala precedente:

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_4 + x_5 - x_6 = 3 \\ x_5 + x_6 = 4 \end{cases}$$

Le variabili dominanti sono

x_2, x_4, x_5

le variabili indipendenti sono

x_1, x_3, x_6.

I sistemi a scala si risolvono con <u>sostituzione all'indietro</u>:

si esplicitano le variabili dipendenti in termini delle altre variabili:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} + 3x_3 - x_4 - x_5 \\ x_4 = 3 - x_5 + x_6 \\ x_5 = 4 - x_6 \end{cases}$$

e poi si fanno le ovvie sostituzioni;

$$x_5 = 4 - x_6$$

$$x_4 = 3 - (4 - x_6) + x_6 = -1 + 2x_6$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} x_3 - \frac{1}{2}(-1 + 2x_6) - \frac{1}{2}(4 - x_6)$$

$$= -1 + \frac{3}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_6$$

Ovvero:

$$\begin{cases} x_2 = -1 + \frac{3}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_6 \\ x_4 = -1 + 2x_6 \\ x_5 = 4 - x_6 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono quindi

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -1 + 3/2\, x_3 - 1/2\, x_6 \\ x_3 \\ -1 + 2x_6 \\ 4 - x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_0} + x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + x_6 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \;\middle|\; X_1, X_3, X_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

Quindi lo spazio delle soluzioni è il sottospazio affine

$$X_0 + \langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

Ne segue che $\operatorname{Ker} U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.
Dato che v_1, v_2, v_3 sono evidentemente lin. Ind., ne segue che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\operatorname{Ker} U$.

Prop: Sia $S \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ una matrice a scala. Le colonne dominanti di S formano una base di $Col(S)$. In particolare

$$rg(S) = \text{numero di pivot di } S$$
$$= \text{numero di colonne dominanti di } S$$

dim: Siano $S^{j(1)}, \dots, S^{j(r)}$ le colonne dominanti di S. Allora le righe $S_{r+1}, S_{r+2}, \dots, S_m$ sono uguali a zero.

Ne segue che

$$Col(S) \subseteq \langle e_1, \dots, e_r \rangle \subset \mathbb{K}^m.$$

Scriviamo le colonne dominanti come combinazioni lineari di $e_1, \dots, e_r$:

$$S^{j(i)} = \sum_{k=1}^{i-1} S_k^{j(i)} e_k + P_i e_i \quad \text{e } P_i \neq 0.$$

Quindi, per il lemma di scambio,

$$\langle e_1, \dots, e_r \rangle = \langle e_1, \dots, e_{r-1}, S^{j(r)} \rangle = \langle e_1, \dots, e_{r-2}, S^{j(r-1)}, S^{j(r)} \rangle$$
$$= \dots = \langle S^{j(1)}, \dots, S^{j(r)} \rangle \Rightarrow \{S^{j(1)}, \dots, S^{j(r)}\} \text{ è base } \blacksquare$$

Es:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne dominanti sono

$S^2 = 2e_1$

$S^4 = 4e_1 + 7e_2$

$S^6 = 6e_1 + 9e_2 + 10e_3$.

Per il lemma di scambio

$\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle e_1, e_2, S^6 = \langle e_1, S^4, S^6 \rangle = \langle S^2, S^4, S^6 \rangle$

Dato che $Col(S) \subseteq \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ otteniamo

$\langle S^2, S^4, S^6 \rangle \subseteq Col(S) \subseteq \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle S^2 S^4 S^6 \rangle$

e quindi $Col(S) = \langle S^2, S^4, S^6 \rangle = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$.

Quindi $rg\, S = 3$ e $\{S^2, S^4, S^6\}$ è una base di $Col(S)$.

Cor: Un sistema a scala $SX=c$ è risolubile se e solo se c non è una colonna dominante della matrice completa $(S|c)$.

dim: $SX=c$ è risolubile se e solo se

$$rg(S|c) = rg(S)$$

Ma $(S|c)$ ed S sono matrici a scala il cui rango è uguale al numero delle loro colonne dominanti. Le colonne dominanti di S sono dominanti anche in $(S|c)$, quindi $rg(S|c) = rg(S) \iff c$ non è dominante.

$\square$

Es: Il sistema a scala

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 2 \\ \qquad\qquad 0x_3 = 1 \end{cases}$$

non è risolubile.

Sistemi a scala a righe ridotte

Tra tutti i sistemi a scala ce ne sono alcuni che non richiedono la sostituzione all'indietro per essere risolti: si tratta dei sistemi <u>a scala a righe ridotte</u>:

Una matrice a scala U_0 si dice a <u>righe ridotte</u> se l'unica componente non-nulla di una sua colonna dominante è il corrispondente pivot, ed i suoi pivot sono tutti uguali a 1.

<u>Es</u>:

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un sistema si dice <u>a scala ridotta (per righe)</u> se la sua matrice dei coefficienti è a scala con righe ridotte.

Per risolvere un sistema a scala con righe ridotte, non è necessario effettuare una "sostituzione all'indietro".

<u>Es</u>: Il sistema a scala in $x_1, \dots, x_6$:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \qquad\quad + 5x_5 = 7 \\ \qquad\qquad\quad x_4 + 3x_5 = 8 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_6 = 10 \end{cases}$$

è a righe ridotte ed ha soluzioni:

$$\begin{cases} x_2 = 7 - x_3 - 5x_5 \\ x_4 = 8 - 3x_5 \\ x_6 = 10 \end{cases}$$

ottenute senza bisogno di sostituire all'indietro.

Come si risolvono i sistemi a scala ridotta?

Sia $RX=c$ un sistema a scala ridotta.

Siano $R^{j(1)}, \dots, R^{j(r)}$ le colonne dominanti di R. Denotiamo con $J = \{j(1), \dots, j(r)\}$ gli indici delle colonne dominanti.

Il sistema $RX=c$ è quindi

$$\begin{cases} x_{j(1)} + \sum_{\substack{k > j(1) \\ \notin J}} R_1^k x_k = c_1 \\ x_{j(2)} + \sum_{\substack{k > j(2) \\ k \notin J}} R_2^k x_k = c_2 \\ \\ x_{j(r)} + \sum_{\substack{k > j(r) \\ k \notin J}} R_r^k x_k = c_r \\ 0 = c_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = c_m \end{cases}$$

Esso è risolubile se e solo se $c_{r+1} = \dots = c_m = 0$.

Le variabili dominanti o dipendenti del sistema $RX=c$ sono

$$x_{j(1)}, x_{j(2)}, \dots, x_{j(r)}.$$

Le variabili indipendenti o libere del sistema $RX=c$ sono

$$\{x_k \mid x \notin j\}.$$

Per cui ci sono $n-r = \dim \operatorname{Ker} R$ variabili libere.

$\forall i = 1, \dots, r$

$$x_{j(i)} = c_i - \sum_{\substack{k > j(i) \\ k \notin j}} R_i^k x_k \qquad (*)$$

Se $RX=c$ è risolubile, una soluzione X_0 si ottiene mettendo uguale a zero tutte le variabili libere in ognuna di $(*)$:

Quindi

$$(X_0)_j = \begin{cases} c_i & \text{se } j = j(i) \in J \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per ottenere una base di Ker R basta considerare le <u>soluzione-base</u> del sistema omogeneo $RX=0$; esse sono definite come segue:

le equazioni (non-nulle) di $RX=0$ sono

$$(**) \quad x_{j(i)} = - \sum_{\substack{k > j(i) \\ k \notin J}} R_i^k x_k \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

Ad ogni variabile libera x_k $(k \notin J)$ associamo il vettore v_k che si ottiene ponendo in (**) la variabile libera $x_k = 1$ e tutte le altre variabili libere eguali a zero.

Otteniamo quindi $n-r$ soluzioni di $RX=0$ che sono linearmente indipendenti e quindi una base di $\operatorname{Ker} R$.

Le soluzioni di $RX=c$ sono quindi

$$X_0 + \langle v_i \mid i \in [1,n] \setminus J \rangle$$

Vediamo qualche semplice esempio:

Es1: Il sistema in $n=2$ variabili

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

è a scala ridotta: $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le variabili dominanti o dipendenti sono

x_1 e x_2

Per cui $J = \{1, 2\}$ e $[1, n] \setminus J = \emptyset$. Quindi

non ci sono variabili libere.

Il sistema ha l'unica soluzione $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es2: Il sistema in $n=3$ variabili

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

è a scala ridotta: $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le variabili dominanti o dipendenti sono

$$x_1, x_2$$

Quindi $J = \{1, 2\}$ e $[1, n] \setminus J = \{3\}$ per cui c'è un'unica variabile libera ed è x_3.

Esplicitiamo le variabili libere

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = 2 - x_3 \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = 0$ otteniamo $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

la soluzione-base è $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le soluzioni sono $X_0 + \langle v \rangle$.

Es2: Il sistema in $n=4$ variabili

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ \qquad\; x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

è a scala ridotta: $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le variabili dominanti o dipendenti sono

$$x_1, x_3$$

Quindi $J = \{1,3\}$ e $[1,n] \setminus J = \{2,4\}$ per cui le variabili libere sono x_2 e x_4.

Esplicitiamo le variabili libere

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_4 \\ x_3 = 2 - x_4 \end{cases}$$

Ponendo $x_2 = x_4 = 0$ otteniamo $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4 \\ x_2 = -x_4 \end{cases}$$

Le soluzione-base sono $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le soluzioni sono $x_0 + \langle v_2, v_4 \rangle$.