# Prodotti Scalari

Un **prodotto scalare** su $V$ è una forma **bilineare**

$$S : V \times V \to \mathbb{R},$$

tale che

1) $S(v,w) = S(w,v) \quad \forall v,w \in V$

[SIMMETRICA]

2) $S(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in V$ e

$S(v,v) = 0 \iff v = 0_V$.

[DEFINITA POSITIVA]

Spesso si omette $S$ e si scrivono solo le parentesi

$$(\cdot\,,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}.$$

**Es** (Prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$)

Il prodotto scalare standard
(o prodotto "puntino") su $\mathbb{R}^n$ é

$$X \cdot Y = X^t Y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3(-2) = -7$$

1) È <u>bilineare</u> per le proprietá del prodotto righe per colonne e della trasposta

2) È <u>simmetrico</u>:

$$X \cdot Y = X^t Y = (X^t Y)^t = Y^t X = Y \cdot X$$

3) È <u>definito positivo</u>

$$X \cdot X = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0 \quad \text{e}$$

$$X \cdot X = 0 \iff X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$$

$$\iff X = 0_{\mathbb{R}^n}. \qquad \blacksquare$$

## Prodotto scalare standard di $V_0^2$

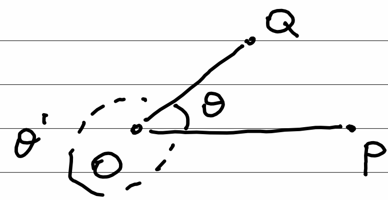
Dati due vettori geometrici $v = \overrightarrow{OP}, w = \overrightarrow{OQ} \in V_0^2$ definiamo il loro <u>prodotto scalare</u> come

$$v \cdot w := |\overline{OP}|\,|\overline{OQ}| \cos\theta$$

dove $|\overline{OP}|$ = lunghezza del segmento $\overline{OP}$,

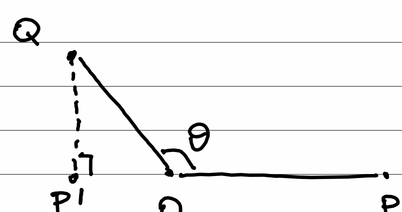
$|\overline{OQ}|$ = lunghezza del segmento $\overline{OQ}$,

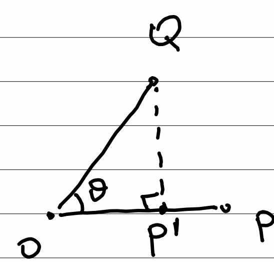
$\theta$ = angolo formato da $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$




Si noti che $\cos\theta = \cos\theta'$.

Si noti che




$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -|\overline{OP}|\,|\overline{OP'}|$ $\qquad$ $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overline{OP'}|\,|\overline{OP}|$

$\Rightarrow$ • è bilineare, simmetrico, definito positivo.

· **Es** (Prodotto scalare su $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$)

Siano $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ $(n+1)$ numeri distinti $(t_i \neq t_j)$, ad esempio $0, 1, \dots, n$.

Definiamo

$$S_{t_0, \dots, t_n} : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \times \mathbb{R}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

come

$$S(p,q) = p(t_0)q(t_0) + p(t_1)q(t_1) + \dots + p(t_n)q(t_n)$$

· S è bilineare:

$$S(\alpha p + \beta q, r) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha p + \beta q)(t_i)\, r(t_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n} p(t_i) r(t_i) + \beta \sum_{i=0}^{n} q(t_i) r(t_i)$$

· S è simmetrica

· $S(p,p) = p(t_0)^2 + \dots + p(t_n)^2 \geq 0$

$S(p,p) = 0 \iff p(t_0) = p(t_1) = \dots = p(t_n) = 0$

$\iff t_0, t_1, \dots, t_n$ sono radici di $p$.

Dato che ha grado $\leq n$ ed $n+1$ radici deve essere $p = 0$ (lo vedremo).

Es: (Prodotto $L^2$)

Siano $f, g \in \mathcal{C}^\infty([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Definiamo

$$(f|g)_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

è bilineare, simmetrico e

$$(f|f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geq 0$$

$$(f|f) = 0 \iff f(x) = 0 \ \forall x \in [-1,1] \iff f = 0.$$

Es: Sia $B \in Mat_{n \times n}$ invertibile. Poniamo

$$A = B^t B \in Mat_{n \times n}.$$

La forma bilineare $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$. Infatti:

$$\boxed{b_A(X, Y) = X^t A Y = X^t B^t B Y = (BX) \cdot (BY)}$$

Quindi è simmetrico ma anche

$$b_A(X, X) = (BX) \cdot (BX) = 0$$

$$\iff BX = 0_{\mathbb{R}^n} \iff X \in \operatorname{Ker} B = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

$$\iff X = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Ad esempio

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg} B = 2 \Rightarrow \operatorname{Ker} B = \{0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

$$A = B^t B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b_A(X, Y) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2$$

$$b_A(X, X) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 =$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + 2x_2)^2 = (BX)_1^2 + (BX)_2^2$$

In generale, un'altro modo per dire che $b_A$ è definito positivo è questo:

$$b_A(X, X) = X^t B^t B X.$$

Poniamo $X = B^{-1} Y$, allora

$$b_A(X, X) = (B^{-1}Y)^t B^t B (B^{-1} Y) = Y^t Y = y_1^2 + \dots + y_n^2$$

$$= (BX)_1^2 + (BX)_2^2 + \dots + (BX)_n^2.$$

$Y = BX$

<u>OSS</u>: Se $A \in Mat_{n\times n}$ allora
$b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è simmetrica
se e solo se $A = A^t$ (Esercizio).
In particolare, se $A = B^t B$ allora $A^t = A$.

<u>Es</u> (prodotto Hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$)
$V = \mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale complesso.
Il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$ è
$(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ dato da

$$\left( \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) := z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \dots + z_n \overline{w_n}$$

dove $\overline{z} = a - ib$ è il coniugato di $z = a + ib$.
Esso soddisfa proprietà simili ad un prodotto scalare (ma con qualche coniugato).
Notiamo che

$$\left( \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = z_1 \overline{z_1} + \dots + z_n \overline{z_n} =$$
$$= |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \geq 0$$

## Norme:

Dato uno spazio metrico $(V, s)$ reale definiamo la sua <u>norma</u> come la f.ne

$$\|\cdot\|_s : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$\|v\|_s = \sqrt{s(v,v)}$$

<u>OSS</u>: ·) $\|\cdot\|_s$ è ben definita perché $s(v,v) \geq 0$.

·) $\|v\|_s = 0 \iff v = 0_V$.

<u>Es</u>: In $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

$$\|X\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}$$

$n = 2$

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\left\|\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$n = 3$

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{14}$$

In generale,

$$\boxed{\|e_i\| = 1}$$

Un <u>versore</u> di $(V, s)$ è un vettore $v$ di norma 1 : $\|v\| = 1$.

<u>Es</u>: I <u>versori</u> di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ sono tutti e soli:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{per } \theta \in \mathbb{R}.$$

Infatti: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ è un versore se e solo se

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1 \iff x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 \in [-1, 1] \Rightarrow \exists\, \theta \text{ t.c.}$$

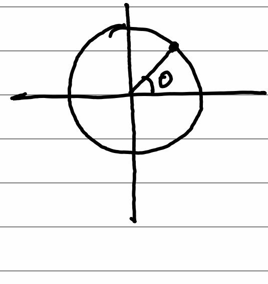
$$x_1 = \cos\theta \Rightarrow x_2^2 = 1 - x_1^2 = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow x_2 = \sin\theta \text{ o } x_2 = -\sin\theta$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \text{ o } X = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) \\ \sin(-\theta) \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

<u>OSS</u>: $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$



Ricordiamo le formule di addizione:

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+z)} &= \cos(\theta+z)+i\sin(\theta+z) \\ \shortparallel\quad & \\ e^{i\theta}e^{iz} &= (\cos\theta+i\sin\theta)(\cos z+i\sin z) \\ &= (\cos\theta\cos z-\sin\theta\sin z)+i(\sin\theta\cos z+\cos\theta\sin z) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\theta+z) &= \cos\theta\cos z-\sin\theta\sin y \\ \sin(\theta+z) &= \sin\theta\cos z+\sin z\cos\theta \end{aligned}}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \cos(2\theta)+\sin^2\theta$$

$$= \cos(2\theta)+1-\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\|\cos\theta\|^2_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}2\pi = \pi$$

$\Rightarrow \|\cos\theta\|_{L^2} = \sqrt{\pi} \Rightarrow \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}$ è un versore di $(\mathcal{C}^\infty([-\pi,\pi],\mathbb{R}), (\,,\,)_{L^2})$.

NB: $\|\cos(nx)\|_{L^2} = \sqrt{\pi} \quad \forall n \geq 1$

$\|\sin(nx)\|_{L^2} = \sqrt{\pi} \quad \forall n \geq 1$

$\|1\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}$

$\Rightarrow \left\{ \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,\middle|\, n \geq 1 \right\}$

sono versori di $\mathcal{C}^\infty([-\pi,\pi], (\cdot|\cdot)_{L^2})$.

OSS: $\|\alpha v\|_s = \sqrt{s(\alpha v, \alpha v)}$

$= \sqrt{\alpha^2 s(v,v)}$

$= |\alpha| \sqrt{s(v,v)}$

$= |\alpha| \, \|v\|$

In particolare, $\|-v\|_s = \|v\|_s$ e se $v \neq 0_V$

$\left\| \frac{v}{\|v\|_s} \right\|_s = \frac{1}{\|v\|_s} \|v\|_s = 1$

$\Rightarrow \frac{v}{\|v\|_s}$ è un versore.

Es: Consideriamo una retta

$$r: ax+by=c$$

Allora $r = P_0 + r_0$ dove $r_0: ax+by=0$.
e $P_0 \in r$. Un vettore direttore di $r$
(ovvero un generatore di $r_0$) è $v=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$
La norma di $v$ è

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{(-b,a)\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Quindi il vettore

$$\frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{pmatrix}$$

è un versore che si chiama
<u>versore direttore</u> di $r$. Dato che è
un versore di $\mathbb{R}^2$ è della forma

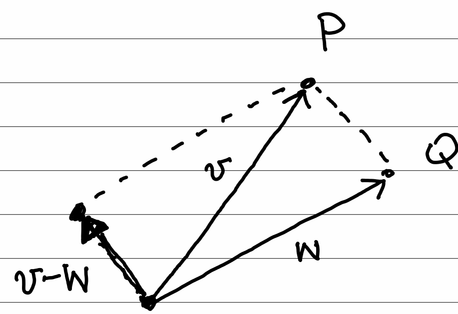
$$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{pmatrix}$$

Quindi i numeri $-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$ e
$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ si chiamano
<u>COSENI DIRETTORI</u> di $r$.

**Def**: Dato uno spazio metrico $(V, s)$, la **distanza** tra due vettori $v, w \in W$ è il numero

$$\mathrm{dist}_s(v, w) := \|v - w\|_s$$

La definizione è motivata da




$$\mathrm{dist}(P, Q) = \|v - w\|$$

# Distanza

Sia $(V, s)$ uno spazio metrico,
ad esempio $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ o $(\mathbb{R}^n, b_{B^tB})$
$(\mathbb{R}[x]_{\leq n}, s_{t_0,\dots,t_n})$ o $(\mathcal{C}^\infty([-\pi,\pi]), (\cdot|\cdot)_{L^2})$.
Abbiamo definito la <u>norma</u> o <u>lunghezza</u>
di un vettore $v \in V$ come

$$\|v\|_s = \sqrt{s(v,v)} \geq 0$$

Abbiamo osservato che $\|\alpha v\|_s = |\alpha| \, \|v\|_s$ e
$\|v\|_s = 0 \iff v = 0_V$.
Definiamo la <u>distanza</u> tra due vettori
$v$ e $w$ di $V$ come il numero

$$\mathrm{dist}_s(v, w) := \|v - w\|_s.$$

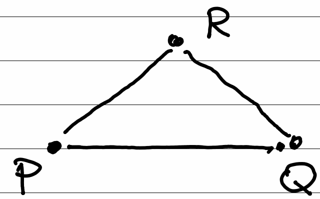
Affinché questo numero sia una distanza
deve soddisfare delle ovvie proprietà:

1) $\mathrm{dist}(v, v) = 0$
2) $\mathrm{dist}(v, w) = \mathrm{dist}(w, v)$

· Inoltre vogliamo che

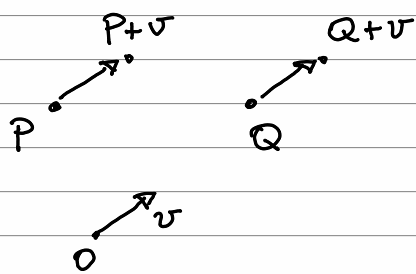
3) $\mathrm{dist}(P,Q) \leq \mathrm{dist}(P,R) + \mathrm{dist}(R,Q)$

[Disuguaglianza Triangolare]




4) la distanza deve essere invariante per traslazioni:

$$\mathrm{dist}(P+v, Q+v) = \mathrm{dist}(P,Q)$$




1), 2) e 4) seguono subito dalla definizione. (Esercizio!). Invece la disuguaglianza Triangolare richiede un pò di lavoro:

Vediamo cosa ci serve per dimostrare la disuguaglianza triangolare:

noi vogliamo

$$\|P-Q\|_s \leq \|P-R\|_s + \|R-Q\|_s$$

ovvero

$$\|(P-R)+(R-Q)\|_s \leq \|P-R\|_s + \|R-Q\|_s$$

In altri termini vogliamo dimostrare

$$\|v+w\|_s \leq \|v\|_s + \|w\|_s \qquad \forall v, w \in V.$$

Eleviamo al quadrato:

$$\begin{aligned}\|v+w\|_s^2 &= s(v+w, v+w) \\ &= s(v,v) + 2s(v,w) + s(w,w) \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2s(v,w)\end{aligned}$$

Quindi se dimostriamo che

$$s(v,w) \leq \|v\|_s \|w\|_s \qquad (*)$$

otteniamo $\|v+w\|_s^2 \leq (\|v\|_s + \|w\|_s)^2$

e quindi $\|v+w\|_s \leq \|v\|_s + \|w\|_s$.

Dimostriamo quindi $(*)$:

# DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ

Per ogni $v, w \in V$ si ha

$$|s(v,w)| \leq \|v\| \|w\| \qquad (**)$$

ovvero

$$-\|v\|\|w\| \leq s(v,w) \leq \|v\| \|w\|.$$

dim: Dati comunque $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha v + \beta w\|_s^2 \geq 0$$

Svolgiamo il calcolo:

$$0 \leq \|\alpha v + \beta w\|^2 = s(\alpha v + \beta w, \alpha v + \beta w)$$

$$= \alpha^2 s(v,v) + 2\alpha\beta\, s(v,w) + \beta^2 s(w,w)$$

$$= \alpha^2 \|v\|_s^2 + 2\alpha\beta\, s(v,w) + \beta^2 \|w\|_s^2$$

In particolare, per $\alpha = \|w\|^2$ e $\beta = -s(v,w)$

otteniamo

$$0 \leq \|w\|^4 \|v\|_s^2 - 2\|w\|^2 s(v,w)^2 + s(v,w)^2 \|w\|_s^2$$

$$= \|w\|^2 \left( \|w\|_s^2 \|v\|_s^2 - s(v,w)^2 \right)$$

Se $w = 0_V$ $(**)$ è vera. Se $w \neq 0_V$,

otteniamo $\|w\|^2 \|v\|^2 \geq s(v,w)^2$. ■

**COR** (disuguaglianza Triangolare)

$$\|v+w\|_s \leq \|v\|_s + \|w\|_s \qquad \blacksquare$$

**COR**: Se $v \neq 0_V$ e $w \neq 0_V$

$$-1 \leq \frac{s(v,w)}{\|v\|_s \|w\|_s} \leq 1$$

**OSS**: La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ dice che $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$$

Dimostrare questa disuguaglianza con tecniche analitiche è estremamente arduo. Invece, con il linguaggio dei prodotti scalari, ha richiesto pochi passaggi algebrici.

1.1 ORTOGONALITÀ

Due vettori $v, w \in V$ si dicono <u>ortogonali</u> in $(V, s)$ se

$$\boxed{s(v,w)=0}$$

In questo caso scriviamo

$$v \perp_s w.$$

<u>OSS</u>: •) $v \perp_s w \Rightarrow w \perp_s v$

•) $v \perp_s w \ \forall w \Leftrightarrow v = 0_V$

<u>Es</u>: •) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ sono ort. in $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

•) $A = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 13\end{pmatrix} = B^t B$ dove $B = \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix}$.

$b_A\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right) = (1,2)\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = (1,2)\begin{pmatrix}5\\-15\end{pmatrix} = -25 \neq 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ <u>non</u> sono ortogonali in $(\mathbb{R}^2, b_A)$.

<u>Invece</u>

$b_A\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right) = (3,1)\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = (3,1)\begin{pmatrix}-5\\15\end{pmatrix} = 0$

quindi $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \perp_{b_A} \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

OSS (Divertente):

Dati $v, w \in \mathbb{R}^n$ lin. Ind., esiste un prodotto scalare $s$ in $\mathbb{R}^n$ t.c.

$v \perp_s w$, $\|v\|_s = \|w\|_s = 1$.

Infatti, estendiamo $\{v, w\}$ ad una base $\mathcal{B} = \{v, w, v_3, v_4, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$.

Consideriamo la matrice invertibile

$$C = (v | w | v_3 | \dots | v_n) \in Mat_{n \times n}$$

Sia $B = C^{-1}$. Poniamo

$$A = B^t B = (C^{-1})^t C^{-1} = (C^t)^{-1} C^{-1}$$

Allora $v = C e_1 = B^{-1} e_1$ e $w = C e_2 = B^{-1} e_2$:

per cui

$$b_A(v, w) = v^t B^t B w = (Bv)^t (Bw) = e_1^t e_2 = 0$$

Dato che $b_A$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$, l'affermazione è verificata.

**Es**: Trovare un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ per il quale i due vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono ortogonali

**Sol.**: $C = (v|w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$B = C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

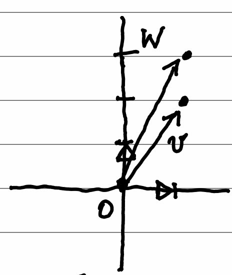
$A = B^t B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$b_A(v, w) = (1,2) \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$= (1,2) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

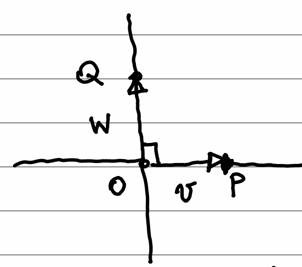
$\Rightarrow v \perp_{b_A} w$.

$$\|v\|_{b_A} = \sqrt{v^t A v} = \sqrt{(1,2) \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{(1,2) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\|w\|_{b_A} = \sqrt{w^t A w} = \sqrt{(1,3) \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} = \sqrt{(1,3) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1$$




Questa figura è sbagliata!




Questa è giusta se
$|OP| = \|v\|_{b_A} = 1$
$|OQ| = \|w\|_{b_A} = 1$

Dato un sottospazio vettoriale $U$ di $V$,

l'<u>insieme ortogonale</u> ad $U$ (rispetto ad $s$) è

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid s(v,u)=0 \quad \forall u \in U\}$$

<u>OSS</u>: $U^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di $V$:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall v_1, v_2 \in U^{\perp}$, $\forall u \in U$

$s(\alpha v_1 + \beta v_2, u) = \alpha s(v_1,u) + \beta s(v_2,u) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$

$\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in U^{\perp}$. $\blacksquare$

<u>OSS</u>: 1) $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$

Se $u \in U$, $\forall v \in U^{\perp}$ $s(u,v)=0 \Rightarrow u \in (U^{\perp})^{\perp}$.

2) $U \cap U^{\perp} = \{0_V\}$.

Infatti se $u \in U \cap U^{\perp}$ allora $s(u,u)=0 \Rightarrow u = 0_V$.

Teorema (Decomposizione ortogonale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$).

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale. Allora

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp.$$

Più precisamente, se $U = \mathrm{Col}\, A$ allora $U^\perp = \mathrm{Ker}\, A^t$.

dim: Se $U = \{0_V\}$ allora $U^\perp = \mathbb{R}^n$ e

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \oplus \{0_V\}.$$

Se $U \neq \{0_V\}$, sia $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_k\}$ una base di $U$ e sia $A = (u_1 | \cdots | u_k) \in \mathrm{Mat}_{n \times k}$. Allora $U = \mathrm{Col}\, A$.

Dal Teorema di decomposizione sappiamo

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Col}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, A^t = U \oplus \mathrm{Ker}\, A^t.$$

Dimostriamo che $\mathrm{Ker}\, A^t = U^\perp$:

Infatti, se $X \in \mathrm{Ker}\, A^t$ e $u = AY \in U$ allora

$$X \cdot u = X \cdot AY = X^t A Y = (A^t X)^t Y = 0_{\mathbb{R}^k}^t Y = 0$$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, A^t \subseteq U^\perp$. Vediamo l'altra inclusione:

sia $v \in U^\perp$. Dato che $\mathbb{R}^n = U \oplus \mathrm{Ker}\, A^t$ $\exists!\, v_1 \in U$ e $\exists!\, v_2 \in \mathrm{Ker}\, A^t$ t.c. $v = v_1 + v_2$. Allora $v_1 \cdot v = 0$ e
($v \in U^\perp$)

$$v_1 \cdot v = v_1 \cdot v_1 + v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_1 \Rightarrow v_1 = 0_V \Rightarrow v = v_2 \in \mathrm{Ker}\, A^t$$

$\square$

**Cor**: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ s.sp. vett. $\Rightarrow (U^\perp)^\perp = U$

**dim**: $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ e $\dim (U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = \dim U$ $\boxtimes$

Il Teorema non deve sorprenderci

**Es**: Consideriamo la retta $r$ di $\mathbb{R}^2$

$$r: ax+by=0 \Rightarrow r = \operatorname{Ker}(a, b)$$

allora $r = \langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \rangle$ e $r^\perp = \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle$

| Retta Tangente a $x^2+y^2=z^2$ |
|---|

**Es**: Consideriamo la retta $\mathbb{R}^3$:

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases} \qquad r = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

allora $r^\perp = \langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \rangle$

Infatti $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in r \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot X = 0 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \cdot X$

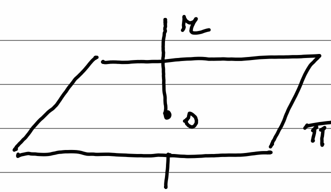
$\iff X \in (r^\perp)^\perp = r$

Se

$r = \langle v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rangle$ allora $r^\perp$ sono le

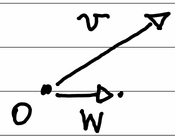
soluzioni del sistema

$$\pi: ax+by+cz=0.$$



# Proiezione ortogonale di un vettore su un altro

Sia $(V, s)$ uno spazio metrico. Dati due vettori $v, w \in V$, $w \neq 0_V$



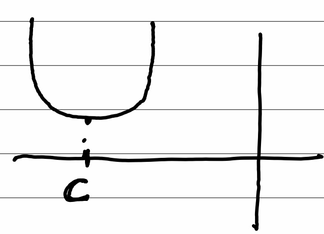

cerchiamo il multiplo di $w$, $cw$, che è più vicino a $v$ rispetto a $\|\cdot\|_s$.

$$\|v - tw\|^2 = \|v\|^2 + t^2\|w\|^2 - 2t(v,w)$$

Cerchiamo il minimo della funzione

$$f(t) = t^2\|w\|^2 - 2t(v,w) + \|w\|^2$$

si tratta di una parabola con la concavità verso l'alto $(\|w\|^2 > 0)$:




quindi il minimo è il suo vertice

$$f'(t) = 2t\|w\|^2 - 2(v,w) = 0 \iff t = \frac{(v,w)}{\|w\|^2} =: c$$

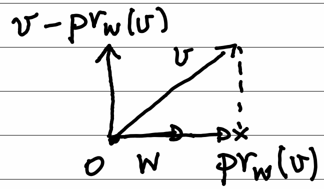
Quindi il multiplo di $w$ più vicino a $v$

.. è

$$pr_w(v) = \frac{(v,w)}{(w,w)} w$$

e si chiama la <u>proiezione ortogonale di $v$ su $w$</u>. Notiamo che

$$s\left(v - pr_w(v), w\right) = (v,w) - \frac{(v,w)}{(w,w)}(w,w) = 0$$




Osserviamo che $pr_w(v)$ è univocamente determinato da questa proprietà:

$$(v - tw, w) = 0 \iff t = c = \frac{(v,w)}{(w,w)}$$

<u>Ricapitolando</u>:

Dati $v, w \in V$, $w \neq 0_V$, il vettore $pr_w(v) = \frac{(v,w)}{(w,w)} w$ è il multiplo di $w$ più vicino a $v$ in $(V, s)$ ed è caratterizzato da

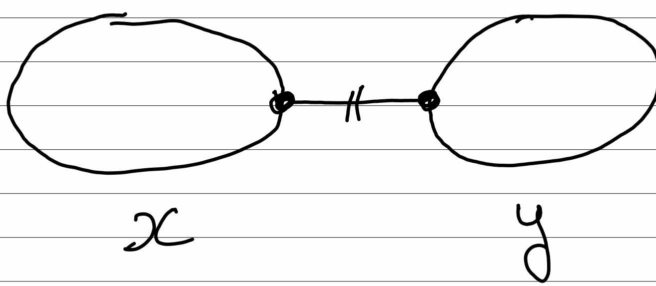
$$(v - pr_w(v), w) = 0 \iff (v - pr_w(v)) \perp_s w$$

## Distanza tra sottoinsiemi

Dati $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset V$ definiamo la loro distanza in $(V, s)$ come

$$\mathrm{dist}_s(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \min\{\mathrm{dist}(x,y) \mid x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\}$$

$$= \min\{\|x-y\|_s \mid x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\}$$



# Distanza punto-retta

Sia $P \in V$ e $r = Q + \langle w \rangle \subset V$ una retta affine.

Allora

$$\operatorname{dist}(P, r) = \sqrt{\operatorname{dist}(P, Q)^2 - \frac{(P-Q, w)^2}{\|w\|^2}}$$

dim: $\operatorname{dist}(P, r) = \operatorname{dist}(P-Q, \langle w \rangle) \overset{v = P-Q}{=} \operatorname{dist}(v, \langle w \rangle)$

$$= \min_{t \in \mathbb{R}} \operatorname{dist}(v, tw) = \operatorname{dist}(v, pr_w(v))$$

$$= \| v - pr_w(v) \| = \sqrt{(v - pr_w(v), v - pr_w(v))}$$

$$= \sqrt{(v, v) - 2(v, pr_w(v)) + (pr_w(v), pr_w(v))}$$

$$= \sqrt{(v, v) - 2\left(v, \frac{(v, w)}{(w, w)} w\right) + \frac{(v, w)^2}{(w, w)^2}(w, w)}$$

$$= \sqrt{(v, v) - \frac{(v, w)}{(w, w)}}$$

$$= \sqrt{\|v\|^2 - \frac{(v, w)^2}{\|w\|^2}}$$

$\blacksquare$

Es: Calcolare la distanza in $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ tra il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. e la retta

$$r: \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Sol.: Troviamo le eq. parametriche di $r$ ed usiamo la formula precedente per calcolare $\text{dist}(P, r)$.

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Quindi $Q = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$P - Q = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{dist}(P, Q) = \|e_1\| = 1$, $\|w\|^2 = 2$, $(P-Q) \cdot w = 1$

Applichiamo la formula

$$\text{dist}(P, r) = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

# Iperpiani di $\mathbb{R}^n$

Un iperpiano di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio affine di dimensione $n-1$.

- Iperpiani di $\mathbb{R}^2$ = rette
- Iperpiani di $\mathbb{R}^3$ = piani
- Iperpiani di $\mathbb{R}^4$ = 3-spazi

Sia $\pi = P + \pi_0 \subset \mathbb{R}^n$ un iperpiano.

Allora $\mathbb{R}^n = \pi_0 + \pi_0^\perp = \pi_0 + r_0$

dove $r_0 = \langle w \rangle$ è una retta di $\mathbb{R}^n$.

$\forall v \in \mathbb{R}^n \; \exists! \; v_1 \in \pi_0$ e $v_2 \in \pi_0^\perp : v = v_1 + v_2$

$$v = v_1 + v_2 = v_1 + cw \quad \text{per qualche } c \in \mathbb{R}.$$

È facile quindi calcolare la distanza tra $v$ e $\pi$:

# Distanza punto-iperpiano

Sia $P \in V$ e $\Pi = Q + \Pi_0 \subset \mathbb{R}^n$ un iperpiano.

Sia $\Pi_0^{\perp} = \langle w \rangle$. Allora

$$\mathrm{dist}(P, \Pi) = \mathrm{dist}(P-Q, \Pi_0) =$$

$$= \| pr_w (P-Q) \| =$$

$$= \frac{|(P-Q)\cdot w|}{\|w\|^2} = \frac{|(P-Q)\cdot w|}{w \cdot w}$$

<u>dim</u>: $\mathrm{dist}(P, \Pi) = \mathrm{dist}(P, Q + \Pi_0)$

$$= \mathrm{dist}(P-Q, \Pi_0) = \mathrm{dist}(v, \Pi_0)$$

$v := P-Q$

$$= \min \{ \mathrm{dist}(v, z) \mid z \in \Pi_0 \}$$

$v = cw + z_0$ per qualche $c \in \mathbb{R}$ e $z_0 \in \Pi_0$

$$\mathrm{dist}(v,z)^2 = \| v - z \|^2 = \| cw + z_0 - z \|^2$$

$$= \|cw\|^2 + \|z_0 - z\|^2 + 2(cw)\cdot(z_0 - z_0)$$

$$= \|cw\|^2 + \|z_0 - z\|^2$$

$z_0 - z \in \Pi_0$
$(cw)\cdot(z_0 - z) = 0$

Il minimo si ottiene per $z = z_0$:

$\Rightarrow \mathrm{dist}(P, \Pi) = \|cw\|$. Chi è $c$?

$v - cw \in \Pi_0 = (\Pi_0^{\perp})^{\perp} = \langle w \rangle^{\perp} \Rightarrow cw = pr_w(v)$

$\Rightarrow c = \dfrac{(v,w)}{(w,w)}$ ■

**OSS:** $\pi : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$

$\Rightarrow W = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\rangle$. Quindi se $P = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

dato $Q = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \pi$ si ha $a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = b$

$\Rightarrow P - Q = \begin{pmatrix} z_1 - y_1 \\ \vdots \\ z_n - y_n \end{pmatrix}$

$$(P-Q) \cdot W = (z_1 - y_1) a_1 + (z_2 - y_2) a_2 + \dots + (z_n - y_n) a_n$$
$$= a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n - b$$

Quindi,

$$\operatorname{dist}(P, \pi) = \frac{|a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}$$

**Es:** $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\pi : 2x - 3z = 5$. Allora

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \frac{|2 - 3 - 5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

$\longmapsto$ Fine Lezione Mar 11.12

# Insiemi ortonormali

Es: $\left(\cos(x)|\sin(x)\right)_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)\,dx$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\,dx = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin y\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \left(\cos(x)|\sin(x)\right)_{L^2} = 0$$

Similmente, $\left(\cos(nx)|\sin(mx)\right)_{L^2} = 0 \quad \forall n, m \geq 1$

Quindi l'insieme

$$\left\{ \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;\middle|\; n, m \geq 1 \right\}$$

è un insieme di versori mutuamente ortogonali (rispetto alla norma $L^2$).

Insiemi di questo tipo hanno proprietà notevoli:

Def: Sia $(V, s)$ uno spazio metrico.
Un insieme $\mathcal{B} \subset V$ si dice **ortogonale** se

$$s(v, w) = 0 \quad \forall v \neq w, \; v, w \in \mathcal{B}.$$

e **ortonormale** se è ortogonale e

$$\|v\|_s = 1 \quad \forall v \in \mathcal{B}.$$

Prop.: Se $\mathcal{B}$ è un insieme ortogonale allora è lin. IND.. Inoltre, se $v \in \langle \mathcal{B} \rangle$ e $v = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$ con $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{B}$ allora $\boxed{t_i = \frac{(v, v_i)}{(v_i, v_i)}}$

Se $\mathcal{B}$ è ortonormale allora $\boxed{t_i = (v, v_i)}$

dim: Siano $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{B}$ e sia

$v = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$. Allora $\forall i = 1, \dots, v_n$

$$s(v, v_i) = \sum_{j=1}^{n} s(v_j, v_i) t_j = t_i (v_i, v_i)$$

$s(v_j, v_i) = 0 \;\; i \neq j$

In particolare, se $0_V = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$ allora

$$t_i = s(0_V, v_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad \blacksquare$$

<u>Def</u>: Se $\mathcal{B}$ è ortonormale e $v \in \langle \mathcal{B} \rangle$ i numeri $\{ s(v, v_i) \mid v_i \in \mathcal{B} \}$ si chiamano i <u>coefficienti di Fourier</u> di $v$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\boxed{v = \sum_i s(v, v_i)\, v_i} \qquad \forall v \in \langle \mathcal{B} \rangle.$$

<u>Es</u>: Sia $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,\middle|\, m, n \geq 1 \right\}$

Sia $f \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Allora

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \sum_{m \geq} \frac{b_m}{\sqrt{\pi}} \sin(mx)$$

dove

$$a_0 = \left( f(x) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \left( f(x) \,\middle|\, \frac{\cos(mx)}{\sqrt{\pi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_m = \left( f(x) \,\middle|\, \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx)\, dx$$

__Es__: $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$

è un insieme ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$.

$\cdot)\ e_i \cdot e_j = 0 \quad i \neq j \qquad \cdot)\ e_i \cdot e_i = 1$

Notiamo che $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$X \cdot e_i = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow i = x_i$$

I coefficienti di Fourier di $X$ in $\mathcal{C}$ sono le sue componenti $x_1, \dots, x_n$.

__Es__: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix} = B^t B$ con $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B} = \{E_1 = (B^{-1})^1, E_2 = (B^{-1})^2\}$$

è un insieme ortonormale di $(\mathbb{R}^2, b_A)$.

$$E_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre $\mathcal{B}$ è una base. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$b_A(X, E_1) = \frac{1}{5} (1,1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} (1,1) \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 3$$

$$b_A(X, E_2) = \frac{1}{5} (1,1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} (1,1) \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \boxed{X = 3E_1 + 2E_2}$. I coefficienti di Fourier di $X$ in $\mathcal{B}$ sono 3 e 2.

## Basi ortonormali.

Una base ortonormale di $(V, s)$ è un insieme ortonormale di $(V, s)$ che genera $V$ (e quindi è una base di $V$).

Avere una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $V$, è conveniente perchè se $\mathcal{B} = \{E_1, \dots, E_n\}$ allora $\forall v \in V$ si ha

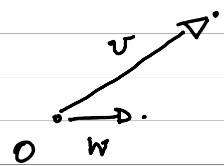
$$\boxed{v = s(v, E_1)\, E_1 + s(v, E_2)\, E_2 + \dots + s(v, E_n)\, E_n}$$

ovvero i coefficienti dell'espansione di $v$ in $\mathcal{B}$ sono i coefficienti di Fourier.

Vediamo che ogni base $\mathcal{B}$ di $V$ si può raddrizzare in una base $\mathcal{B}_0$ ortonormale di $V$.

Cominciamo con un esempio:

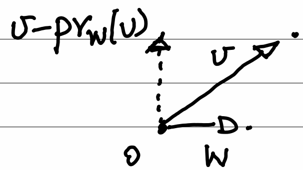
$\underline{Es}$: Siano $v, w \in \mathbb{R}^2$ lin. Ind.




Allora $\mathcal{B} = \{w, v\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

L'insieme $\{w, v - pr_w(v)\}$

è ortogonale




se dividiamo per la norme otteniamo

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ E_1 = \frac{w}{\|w\|},\ E_2 = \frac{v - pr_w(v)}{\|v - pr_w(v)\|} \right\}$$

una base ortonormale

che è il raddrizzamento di $\mathcal{B} = \{w, v\}$.

Si noti che $\mathcal{B}$ è ordinato, nel senso

che se avessimo raddrizzato $\mathcal{B} = \{v, w\}$

avremmo ottenuto $\mathcal{B}_0' = \left\{ \frac{v}{\|v\|}, \frac{w - pr_v(w)}{\|w - pr_v(w)\|} \right\}$

# Angoli

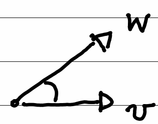
In uno spazio metrico $(V, s)$ vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$-1 \leq \frac{(v,w)}{\|v\|\|w\|} \leq 1 \qquad \forall v, w \in V \setminus \{0_V\}.$$

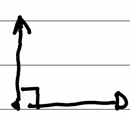
Si definisce l'<u>angolo</u> tra $v$ e $w$ come il numero $\widehat{vw} \in [0, \pi]$ t.c.

$$\cos \widehat{vw} = \frac{s(v,w)}{\|v\|\|w\|}$$

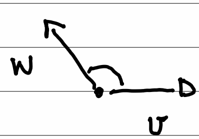
Quindi




acuto se $(v,w) > 0$



$\pi/2$ se $(v,w) = 0$




ottuso se $(v,w) < 0$

Ricordiamo seni, coseni e Tg di alcuni angoli

| | sin | cos | $Tg = \sin/\cos$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1 = \sqrt{4}/2$ | $0$ |
| $\pi/6$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/\sqrt{3}$ |
| $\pi/4$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1$ |
| $\pi/3$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $\sqrt{3}$ |
| $\pi/2$ | $\sqrt{4}/2 = 1$ | $0$ | $1$ |