Il Teorema spettrale reale

Il teorema spettrale fornisce una risposta completa alla seguente domanda:
Come sono fatte le matrici A $n \times n$ che ammettono n assi di simmetria a due a due ortogonali?

Risposta: (Teorema spettrale):

$A = A^t$ (se A è reale) SIMMETRICA

$A = \bar{A}^t$ (se A è complessa) HERMITIANA

Esse sono le matrici "autoaggiunte" ovvero che soddisfano

$$\boxed{AX \cdot Y = X \cdot AY}$$

dove $\cdot$ è il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ nei due casi.

Ci occupiamo solo del caso reale.

Cominciamo con il seguente importante concetto:

Sia $\mathcal{L}: V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V reale.

Un sottospazio vettoriale $U \subseteq V$ si dice <u>$\mathcal{L}$-invariante</u> se $\mathcal{L}(U) \subseteq U$.

<u>Es</u>: ·) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

allora e_1 è un autovettore per A di autovalore 3. Quindi $U = \langle e_1 \rangle$ è A-invariante

·) Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ allora

$U = \langle e_1 \rangle$ è A-invariante ma anche $U^\perp = \langle e_2, e_3 \rangle$ è A-invariante: infatti

$$A\langle e_2, e_3 \rangle \subseteq \langle Ae_2, Ae_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\subseteq \langle e_2, e_3 \rangle.$$

In tal caso $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ si decompone nella somma diretta di sottosp. invarianti

•) Se $U, W \subseteq V$ sono sottospazi $\mathcal{L}$-invarianti t.c. $V = U \oplus W$ allora presa una base $\mathcal{B}_U = \{v_1, .., v_k\}$ di U ed una base $\mathcal{B}_W = \{v_{k+1}, .., v_n\}$ di W, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è una base di V.

La matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ in $\mathcal{B}$ è diagonale a blocchi

$$Z = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Infatti, $\mathcal{L}(v_{k+1}), .., \mathcal{L}(v_n) \in W = \langle v_{k+1}, .., v_n \rangle$.

Abbiamo visto che una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se

1) $Sp(A) \subseteq \mathbb{R}$

2) $mg_A(\lambda) = ma_A(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(A)$.

C'è un' importante classe di matrici che soddisfa 1) e 2): le <u>matrici simmetriche</u> $A = A^t$.

Vediamo perchè:

Sia $A = A^t \in Mat_{n\times n}$ una matrice simmetrica. Vediamo che soddisfa 1):

supponiamo che $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}^n$ t.c.

$$Av = \lambda v.$$

Quindi $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ovvero $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}$. Definiamo

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad \text{dove}$$

se $z = a+ib \in \mathbb{C}$, $\overline{z} = a-ib$.

In particolare,

$$v \cdot \overline{v} = v_1\overline{v_1} + \dots + v_n\overline{v_n}$$
$$= |v_1|^2 + \dots + |v_n|^2 \in \mathbb{R}$$

e $v \cdot \overline{v} \neq 0$ poiché $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$.

Notiamo inoltre che

$$\overline{Av} = \begin{pmatrix} \overline{A_1 v} \\ \vdots \\ \overline{A_n v} \end{pmatrix}$$

$$\overline{A_i v} = \overline{a_{i1} v_1 + \dots + a_{in} v_n}$$
$$= a_{i1}\overline{v_1} + \dots + a_{in}\overline{v_n}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$
$$= A_i \overline{v}$$
$$\Rightarrow \overline{Av} = A\overline{v}.$$

Adesso calcoliamo

$$\lambda(v \cdot \overline{v}) = \lambda v \cdot \overline{v} = Av \cdot \overline{v} = v^t A^t \overline{v}$$

$A = A^t$
$$= v^t A \overline{v} = v^t\,\overline{(Av)} = v^t\,\overline{(\lambda v)} = \overline{\lambda}\, v \cdot \overline{v}$$
$$\Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda})\, v \cdot \overline{v} = 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$$

Quindi se $A = A^t$ e λ è un autovalore per A allora $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ci manca di sapere che esiste almeno un autovalore.
Questo segue dal Teorema fondamentale dell'algebra.

Dimostriamo adesso che

$$mg_A(\lambda) = ma_A(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(A):$$

Vale la seguente:

Prop.: Se $A = A^t$ allora

$$V_\lambda(A) \perp V_\mu(A) \quad \text{se } \lambda \neq \mu.$$

dim:

$$\forall v \in V_\lambda(A) \quad \forall w \in V_\mu(A)$$

$$v \cdot Aw = v \cdot \mu w = \mu\, v \cdot w$$

$$v \cdot Aw = v^t A w = v^t A^t w = (Av) \cdot w = \lambda (v \cdot w)$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu)\, v \cdot w = 0 \underset{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} v \cdot w = 0.$$

$\boxtimes$

Sia $\lambda \in Sp(A)$. Allora $V_\lambda(A) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Sia $W = V_\lambda(A)^\perp$.

$$\mathbb{R}^n = V_\lambda(A) \oplus W$$

$$Aw = v_1 + w' \quad \text{con } v_1 \in V_\lambda(A) \text{ e } w' \in W$$

$$\Rightarrow v_1 \cdot Aw = v_1 \cdot v_1$$

$$v_1 \cdot Aw = v_1^t A w = v_1 A^t w = (Av_1) \cdot w$$
$$= \lambda v_1 \cdot w = \lambda (v_1 \cdot w) = 0$$

Quindi

$$v_1 \cdot v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0_{\mathbb{R}^n}$$
$$\Rightarrow Aw = w' \in W \quad \forall w \in W$$
$$\Rightarrow W = V_\lambda(A)^\perp \text{ è } A\text{-invariante.}$$

Sia $\mathcal{B}_1 = \{F_1, .., F_K\}$ una base di $V_\lambda(A)$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_{K+1}, ..., v_n\}$ una base di $W = V_\lambda(A)^\perp$.

Allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{v_1, .., v_K, v_{K+1}, .., v_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$. In questa base la matrice che rappresenta A è della forma

$$Z = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{1}_K & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

perché $V_\lambda(A)$ e W sono invarianti.

$$\Rightarrow Z = B^{-1} A B \quad \text{dove } B = (v_1 | .. | v_n).$$
$$\Rightarrow P_A(x) = P_Z(x) = (x-\lambda)^K P_C(x)$$

$$C : W \longrightarrow W$$
$$X \longmapsto AX$$

Dato che $W = V_\lambda(A)^\perp$, $p_C(\lambda) \neq 0$. Altrimenti $\exists\, X \in W$, $X \neq 0$ t.c. $AX = \lambda X$

$\Rightarrow X \in V_\lambda(A) \cap W \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$.

$\Rightarrow \quad p_A(x) = (x-\lambda)^k p_C(x)$ e $p_C(\lambda) \neq 0$

$\Rightarrow \quad k = ma_A(\lambda)$

$\Rightarrow \quad mg_A(\lambda) = ma_A(\lambda)$

Ripetendo il ragionamento $\forall \lambda \in Sp(A)$ abbiamo dimostrato che $A = A^t$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(A)$$

D'altronde questa somma è ortogonale. Quindi se scegliamo una base ortonormale $\mathcal{B}_i$ di $V_{\lambda_i}(A)$ $\forall i$ otteniamo una base <u>ortonormale</u> di autovettori.

Teorema spettrale per endomorfismi di $(\mathbb{R}^n,\cdot)$

Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è simmetrica allora $\exists$ una base $\mathcal{B}=\{E_1,\dots,E_n\}$ ortonormale di $(\mathbb{R}^n,\cdot)$ nella quale A è rappresentata da una matrice diagonale $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

Se $B=(E_1|\dots|E_n)$ allora B è ortogonale e

$$B^tAB=D.$$

Vale anche il viceversa: se $\exists\, B$ ortogonale e $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ t.c.

$$B^tAB=D$$

allora A è simmetrica:

$$A^t=(BDB^t)^t=BD^tB^t=BDB^t=A.$$

Def: Una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ si dice <u>ortogonalmente diagonalizzabile</u> se $\exists\, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ <u>ortogonale</u> ed una matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$ t.c.

$$B^t A B = D.$$

Teorema spettrale per $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

Una matrice $A \in Mat_{n \times n}$ è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se $A = A^t$.

La dimostrazione che abbiamo visto usa la seguente proprietà delle matrici simmetriche

$$AX \cdot Y = X \cdot AY \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$$

Def: Un endomorfismo lineare $\mathcal{L}: V \to V$ si dice un operatore autoaggiunto di (V, s) se
$s(\mathcal{L}(v), w) = s(v, \mathcal{L}(w)) \quad \forall v, w \in V$.

Es: Stabilire se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

è ortogonalmente diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice ortogonale B diagonalizzante.

Sol.: $A = A^t \Rightarrow$ A è ortogonalmente diagonalizzabile per il Teorema spettrale.

$$P_A(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}\left[9 - (2+5+6)\right]x - \det A$$

$$= x^3 - 3x^2 - 2x - \det A$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -4$$

$$\Rightarrow P_A(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$$

Cerchiamo le radici di P_A nei divisori di 4:

$$P_A(1) = 1 - 3 - 2 + 4 = 0$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-3x^2-2x+4 & x-1 \\ \cline{2-2}
x^3-x^2 & x^2-2x-4 \\ \cline{1-1}
\quad -2x^2-2x+4 & \\
\quad -2x^2+2x & \\
\qquad -4x+4 & \\
\qquad -4x+4 &
\end{array}
$$

$$P_A(x) = (x-1)(x^2-2x-4)$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$P_A(x) = (x-1)(x-(1-\sqrt{5}))(x-(1+\sqrt{5}))$$

$$V_1(A) = \operatorname{Ker}(\mathbb{1}-A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per determinare gli altri due sottospazi:

Sia λ : $\lambda^2-2\lambda-4=0$ ovvero $\lambda(\lambda-2)=4$

$$V_\lambda(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 & \lambda-2 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 4 & -2\lambda & 4 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 4 & -2\lambda & 4 \end{pmatrix}$$

$R_1 \mapsto \lambda R_1$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 2 & -\lambda & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -5 & 2\lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -5 & 2\lambda-2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-2+1 & -2 \\ 0 & -5 & 2\lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 4+\lambda & -2\lambda \\ 0 & -5 & 2\lambda-2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda+4 & -2\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & \frac{2}{1-\lambda} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{(1-\lambda)^2-4}{1-\lambda} \\ 0 & 1 & \frac{2}{1-\lambda} \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{1-\lambda} \\ 0 & 1 & \frac{2}{1-\lambda} \end{pmatrix}$$

$$(1-\lambda)^2-4 = (1-\lambda)^2-\lambda(\lambda-2) = 1+\lambda^2-2\lambda-\lambda^2+2\lambda = 1$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1-\lambda \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Quindi:

$$V_{1-\sqrt{5}}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{1+\sqrt{5}}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si noti che

$$V_{1+\sqrt{5}}(A) \perp V_{1-\sqrt{5}}(A).$$

Una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ composta di autovettori per A è

$$\left\{ F_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, \ F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$$

Normalizziamola:

$$\left\{ E_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, \ E_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$$

Una matrice ortogonale diagonalizzante è

$$B = (E_1 | E_2 | E_3) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Per diagonalizzare ortogonalmente $A = A^t$:

1) Trovare le radici di $p_A(x)$

2) $\forall \lambda \in Sp(A)$ Trovare una base $\mathcal{B}_\lambda$ di $V_\lambda(A)$

3) $\forall \lambda \in Sp(A)$ utilizzare l'algoritmo di Gram-Schmidt su $\mathcal{B}_\lambda$ per ottenere una base $\tilde{\mathcal{B}}_\lambda$ ortonormale di $V_\lambda(A)$

4) $\tilde{\mathcal{B}} = \bigsqcup_{\lambda \in Sp(A)} \tilde{\mathcal{B}}_\lambda$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ composta di autovettori per A.

COR (Decomposizione spettrale)

Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di A.

Allora

$$A = \lambda_1 P_{V_{\lambda_1}(A)} + \lambda_2 P_{V_{\lambda_2}(A)} + \dots + \lambda_k P_{V_{\lambda_k}(A)}$$

dove

$P_{V_{\lambda_i}(A)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è la matrice di proiezione ortogonale sull'autospazio $V_{\lambda_i}(A) \subset \mathbb{R}^n$.

dim:

$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(A)$

$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad v = v_1 + \dots + v_k$ dove

$v_i \in V_{\lambda_i}(A)$. Poiché $v_i \cdot v_j = 0$ per $i \neq j$

$v - v_i \in V_{\lambda_i}(A)^\perp$. Quindi

$$v_i = pr_{V_{\lambda_i}(A)}(v) = P_{V_{\lambda_i}(A)} v$$

Quindi,

$$Av = Av_1 + \dots + Av_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1 P_{V_{\lambda_1}(A)} v_1 + \dots + V$$

OSS: Se $V = U \oplus W$ allora
la proiezione su U lungo W

$$pr_U^W : V \longrightarrow V$$

è diagonalizzabile: infatti

$$pr_U^W(u) = u \quad \forall u \in U$$

$$pr_U^W(w) = 0_V \quad \forall w \in W$$

e quindi $Sp(pr_U^W) = \{1, 0\}$ e

$$V_1(pr_U^W) = U$$

$$V_0(pr_U^W) = W.$$

Basta allora scegliere una base $\mathcal{B}_U$ di U ed una base $\mathcal{B}_W$ di W e ottenere una base

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$$

di V composta di autovettori per pr_U^W.

L'endomorfismo pr_U^W è <u>ortogonalmente diagonalizzabile</u> se e solo se $W = U^\perp$ ovvero se e solo se $pr_U^W = pr_U$ è la proiezione ortogonale su U.

Infatti gli assi di simmetria di pr_U^W sono contenute in U ed in W e quindi l'unico modo per cui possiamo scegliere assi di simmetria a due a due ortogonali è che U e W siano ortogonali.

Es: Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U: \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+x_4=0 \end{cases} ; \quad W: \begin{cases} x_1-x_2=0 \\ x_1-x_3-x_4=0 \end{cases}$$

Dimostrare che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ e stabilire se $pr_U^W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è ortogonalmente diagonalizzabile. Nel caso lo sia trovare una base ortonormale di autovettori.

Sol.:

$$U = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Quindi $U = \operatorname{Im} A$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per il Teorema di decomp. ort.,

$U^\perp = \mathrm{Ker}\, A^t = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = W.$

Concludiamo che

$$\mathbb{R}^4 = U \overset{\perp}{\oplus} W$$

e quindi $pr_U^W = pr_U$ è ortogonalmente diagonalizzabile.

Per trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ composta di autovettori per $pr_U^W = pr_U$ dobbiamo trovare una base ortonormale $\mathcal{E}_U$ di U, una base ortonormale $\mathcal{E}_W$ di W e poi metterle insieme $\mathcal{E} = \mathcal{E}_U \cup \mathcal{E}_W$.

Una base di U è

$$\mathcal{B}_U = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Applichiamo Gram-Schmidt:

$$F_1 := v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 := v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \cdot F_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{5}{2}$$

Poniamo

$$E_1 = \frac{F_1}{\|F_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \frac{F_2}{\|F_2\|} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_U = \{E_1, E_2\}.$$

Cerchiamo una base di W:

$$W = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{B}_W = \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$F_3 = v_3$$

$$F_4 = v_4 - \frac{v_4 \cdot F_3}{F_3 \cdot F_3} F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|F_4\| = \frac{1}{3}\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{3}\sqrt{15} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/5 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{15} \\ -2/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \end{pmatrix} \right\}$$

Es: Sia $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$.

Consideriamo l'endomorfismo lineare

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

la cui matrice nella base $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se L è ortogonalmente diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ composta di autovettori per L.

Sol.: Abbiamo due possibilità:

1) Studiare se gli autospazi di L sono ortogonali

2) Trovare la matrice C t.c. $L = S_C$. Per il Teorema spettrale, L è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se $C = C^t$.

1) $P_A(x) = x^2 - 2x - 3$

$= (x+1)(x-3)$

$\Rightarrow Sp(A) = \{-1, 3\} = Sp(L).$

$V_{-1}(A) = \ker\left(\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \ker(2\ 3) = \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

$V_3(A) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$

Quindi:

$V_{-1}(L) = \langle -3v_1 + 2v_2 \rangle = \langle -3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

$= \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$V_3(L) = \langle v_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$

Quindi $V_{-1}(L)^{\perp} = V_3(L)$

$\Rightarrow$ L è ortogonalmente diagonalizzabile.

La base cercata è

$\mathcal{E} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

2)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "B"] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "B"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C = BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$C = C^t$ e quindi $L = S_C$ è ortogonalmente diagonalizzabile:

$$P_C(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$Sp(C) = Sp(L) = \{-1, 3\}.$$

$$V_{-1}(C) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} (1\ 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_3(C) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} (1\ -1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

La base cercata è

$$\mathcal{E} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$