ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 25.07.2023

Cognome: VERSIONE **Nome:** PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

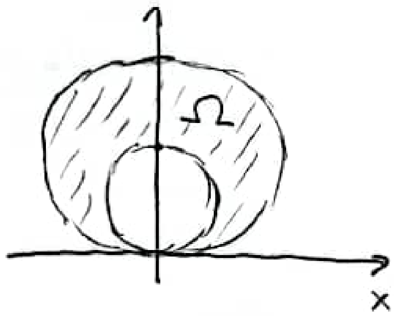
(1) Sia $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $\mathbf{V}(x,y) = (\ xy\ ,\ y^2 - x^5 y\ )$.

Calcolare il flusso di $\mathbf{V}$ uscente da $\Omega = \{(x,y):\ y \le x^2 + y^2 \le 2y\}$. 8 punti

Risposta:

$$\frac{21}{8}\pi$$

Svolgimento:



$$x^2+y^2 \ge y \iff x^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 \ge \frac{1}{4}$$

$$x^2+y^2 \le 2y \iff x^2 + (y-1)^2 \le 1$$

$$\int_{\partial\Omega} \underline{V}\cdot\underline{n}^e \, ds = \iint_\Omega \operatorname{div}\underline{V}\, dx\,dy = \iint_\Omega (y + 2y - x^5)\, dx\,dy$$

$$\iint_\Omega x^5\, dx\,dy = 0 \quad (\Omega \text{ simmetrico, e } x^5 \text{ dispari, rispetto a } x=0)$$

$$\iint_\Omega 3y\,dx\,dy = \iint_{B_1} 3y - \iint_{B_{1/2}} 3y \qquad \begin{array}{l} B_1 = B_1(0,1) \\ B_{1/2} = B_{1/2}(0,1/2) \end{array}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho(1+\rho\sin\varphi)\,d\varphi\,d\rho - \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi} 3\rho\left(\tfrac{1}{2}+\rho\sin\varphi\right)d\varphi\,d\rho$$

$$= \int_0^1 6\pi\rho\,d\rho - \int_0^{1/2} 3\pi\rho\,d\rho = 3\pi - \frac{3}{8}\pi = \frac{21}{8}\pi.$$

Scansionato con CamScanner

(2) Siano $f(x,y) = xy + x - y$, $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq -1\}$.

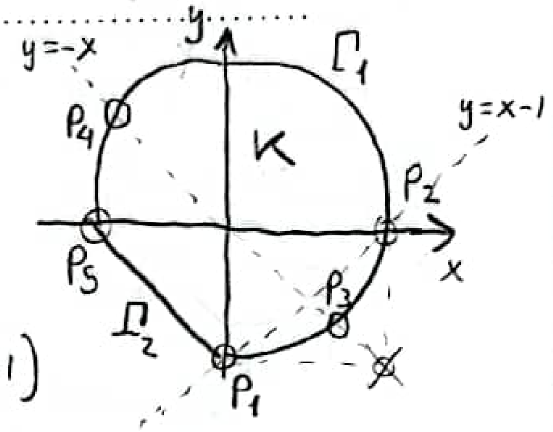
Determinare il massimo e il minimo assoluti di f in K. $\boxed{\text{8 punti}}$

Risposta:

$$\max_K f = 1 \quad (\text{in } (1,0) \text{ e } (0,-1))$$

$$\min_K f = -\frac{1}{2} - \sqrt{2} \quad \left(\text{in } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Svolgimento:



$$\begin{cases} f_x = y+1 \overset{!}{=} 0 \\ f_y = x-1 \overset{!}{=} 0 \end{cases} \iff (x,y) = (1,-1) \notin \mathring{K}$$

Su Γ_1: $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + x - y - \lambda(x^2+y^2-1)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = y+1-2\lambda x \overset{!}{=} 0 \\ \mathcal{L}_y = x-1-2\lambda y \overset{!}{=} 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = x^2+y^2-1 \overset{!}{=} 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y+1 = 2\lambda x \\ x-1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$x = 0 \Rightarrow y = -1$ $\quad P_1 = (0,-1)$

$y = 0 \Rightarrow x = 1$ $\quad P_2 = (1,0)$

Altrimenti moltiplico la prima per y e la seconda per x:

$$y^2 + y \ (= 2\lambda xy) = x^2 - x \iff x^2 - y^2 - x - y = 0$$
$$\iff (x+y)(x-y-1) = 0$$

da cui utilizzando $x^2+y^2=1$ si ottiene

$$\left.\begin{cases} x-y-1 = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}\right\} \iff (x,y) = P_1, P_2 \quad \Bigg| \quad \left.\begin{cases} x+y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}\right\} \iff (x,y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P_3, P_4$$

Su Γ_2: $f|_{\Gamma_2} = x(-x-1) + x + x + 1 = -x^2 + x + 1 = h(x)$, $x \in [-1,0]$

$h'(x) = -2x + 1 > 0$ in $[-1,0]$

$\Rightarrow$ I candidati sono gli spigoli P_1 e $P_5 = (-1,0)$

Concludo: $f(P_1) = f(P_2) = 1 > f(P_3) = \sqrt{2} - \frac{1}{2} > f(P_5) = -1 > f(P_4) = -\frac{1}{2} - \sqrt{2}$

Scansionato con CamScanner

(3) (a) Determinare l'integrale generale della seguente EDO:

$$3x(y(x))^2y'(x) + (1+x)(y(x))^3 = e^x, \quad x > 0.$$

(b) Fra tutte le soluzioni, determinare (se esistono) quelle tali che

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) \text{ esiste finito.}$$

8 punti

Risposta: a) $y(x) = \left(\frac{1}{2x}e^x + \frac{Ce^{-x}}{x}\right)^{1/3}$

b) $C = -1/2$

Svolgimento:

(a) Cambio di variabile dipendente (tipo Bernoulli):

$$v(x) = y^3(x), \quad v'(x) = 3y^2(x)y'(x)$$

$$\Rightarrow \quad xv'(x) + (1+x)v(x) = e^x$$

Omogenea: $\frac{v'}{v} = -1 - \frac{1}{x} \iff \log|v| = -x - \log|x| + C$

$$\underset{x>0}{\iff} v(x) = C\frac{e^{-x}}{x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Sol. part. $v_p(x) = C(x)\frac{e^{-x}}{x}$

$$xv_p'(x) + (1+x)v_p(x) = C'(x)e^{-x} = e^x \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Quindi $v(x) = C\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{2x}e^x$, e si torna a $y(x) = (v(x))^{1/3}$

(b) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2x}e^x + \frac{Ce^{-x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + 2Ce^{-x}}{2x}$

Il numeratore tende a zero se e solo se $C = -1/2$, e in tal caso $\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{2x(1+o(1))}{2x} \to 1$.

Scansionato con CamScanner