ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 20.09.2023 ~~B~~

Cognome: VERSIONE **Nome:** PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

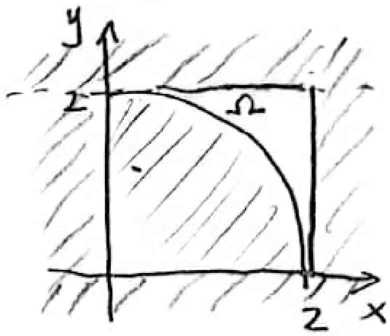
(1) Determinare il baricentro del seguente insieme:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \geq 4, \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq 2\}.$$

8 punti

Risposta: $x_B = y_B = \dfrac{4}{3(4-\pi)}$

Svolgimento:



- Ω simmetrico rispetto a $y = x$

  $\Rightarrow \quad x_B = y_B$

- $|\Omega|_2 = 4 - \dfrac{\pi \cdot 4}{4} = 4 - \pi$ (elementare)

- $$\iint_\Omega x \, dx\,dy = \int_0^2 \int_0^2 x \, dx\,dy - \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \cos\varphi \, d\rho\, d\varphi$$

  $$= 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \left(\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi\right)\left(\int_0^2 \rho^2 \, d\rho\right)$$

  $$= 4 - 1 \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow \quad x_B = y_B = \dfrac{1}{4-\pi} \cdot \dfrac{4}{3}.$

(2) Siano

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2, \quad K = \{(x,y):\ (x-1)^2 \le y \le 3-x\}.$$

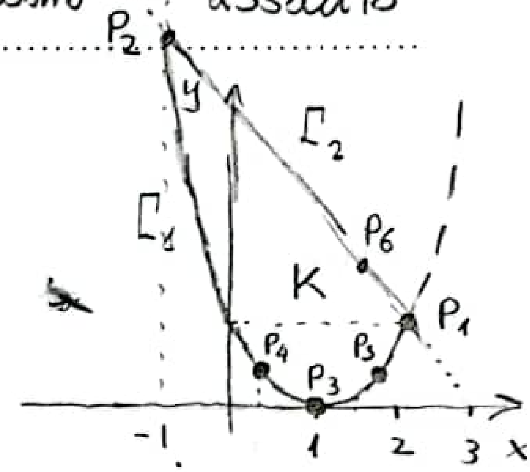
Determinare i punti di massimo assoluto e i punti di minimo assoluto di f sulla frontiera di K.

8 punti

Risposta: $\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ punti di minimo assoluto

$(-1,4)$ punto di massimo assoluto

Svolgimento:



Spigoli: $(x-1)^2 = 3-x$

$\iff x^2 - x - 2 = 0$

$\iff (x-2)(x+1) = 0$

$P_1 = (2,1)$, $P_2 = (-1,4)$

Metodo diretto. $\Gamma_1 = \{y = (x-1)^2\}$, $\Gamma_2 = \{y = 3-x\}$

$$f|_{\Gamma_1} = g_1(x) = (x-1)^2 + (x-1)^4 - 2(x-1)^2 + 1$$
$$= (x-1)^4 - (x-1)^2 + 1$$

$$g_1'(x) = 4(x-1)^3 - 2(x-1) = 2(x-1)\left[2(x-1)^2 - 1\right] = 0$$
$$\iff x = 1, \quad x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$P_3 = (1,0)$, $P_{4,5} = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

$$f|_{\Gamma_2} = g_2(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2$$
$$g_2'(x) = 2(x-1) + 2(x-2) = 2(2x-3) = 0 \iff x = 3/2$$

$P_6 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Confrontando i valori assunti da f in $P_1 \dots P_6$ si conclude.

(3) Risolvere il seguente problema di Cauchy, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y''(x) = \frac{1}{2}(1-2x)(y'(x))^3 \\ y(1) = 3,\ y'(1) = -2. \end{cases}$$

8 punti

Risposta: $y(x) = 3 - \log(2x-1)$, $I = (\frac{1}{2}, +\infty)$

Svolgimento:

$v = y'$: $\begin{cases} v' = \frac{1}{2}(1-2x)v^3 \\ v(1) = -2 \end{cases}$ variabili separabili

$$\int \frac{v'}{v^3}\,dx = \int \frac{1}{2}(1-2x)\,dx \iff -\frac{1}{2v^2} = -\frac{1}{8}(1-2x)^2 + C$$

$$\iff \frac{1}{v^2} = \frac{1}{4}(2x-1)^2 + C$$

$$\frac{1}{v^2(1)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + C \iff C = 0$$

$$\Rightarrow y'(x) = v(x) = -\frac{2}{(2x-1)}$$ si sceglie il "$-$" perché $v(1) = -2 < 0$

Integrando $y(x) = -\log|2x-1| + C$

$y(1) = 3 \Rightarrow C = 3$

$$y(x) = 3 - \log|2x-1|,\quad x \in (-\infty, \tfrac{1}{2}) \cup \underbrace{(\tfrac{1}{2}, +\infty)}_{1\in}$$