

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) a) Determinare l'integrale generale della seguente EDO:

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 2, \quad x > 0.$$

b) Fra tutte le soluzioni, determinare (se esistono) quelle tali che

$$y(x) + 3 \sin x - \cos x = o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

8 punti

Risposta: (a) $y(x) = Ax + Bx^2 + 1$

$$(b) \quad y(x) = -3x - \frac{x^2}{2} + 1$$

Svolgimento:

$$(a) \text{ Eulero, } v(s) = y(e^s) \quad v''(s) - 3v'(s) + 2v(s) = 2$$

$$\text{Omogenea: } \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, 2$$

$$v_{om}(s) = Ae^s + Be^{2s}$$

$$\text{Particolare: } v_p(s) = 1 \quad (\text{somiglianza, ma immediato})$$

$$\text{Integrale generale: } y(x) = Ax + Bx^2 + 1$$

$$(b) \quad y(x) + 3 \sin x - \cos x = Ax + Bx^2 + 1 + 3x + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$= x(A+3) + x^2(B + \frac{1}{2}) + o(x^2)$$

$$\Rightarrow A = -3, B = -\frac{1}{2}$$

(2) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0, 1 \leq 3x + y \leq 3\}$.

a) Calcolare $\iint_D xy dx dy$.

b) Sia Ω il solido ottenuto ruotando D di un angolo 2π intorno all'asse y . Determinare il volume di Ω .

8 punti

Risposta:

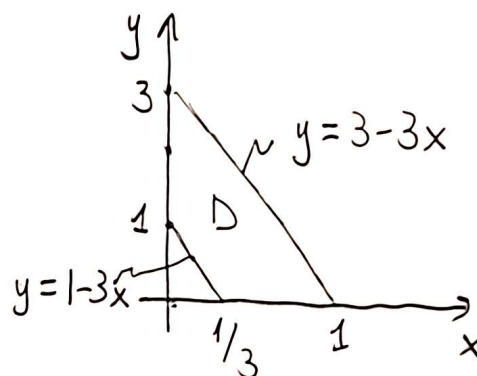
(a) $\frac{10}{27}$

(b) $\frac{26}{27} \pi$

Svolgimento:

(a) $D =$ differenza di triangoli

$$\iint_D xy = \int_0^1 \left(\int_0^{3-3x} xy dy \right) dx - \int_0^{1/3} \left(\int_0^{1-3x} xy dy \right) dx$$



$$= \int_0^1 \frac{9}{2} x (1-x)^2 dx - \int_0^{1/3} \frac{x}{2} (1-3x)^2 dx$$

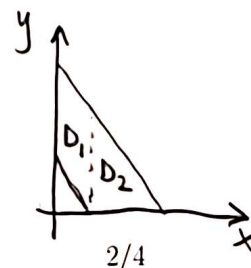
$$= \int_0^1 \frac{9}{2} (x - 2x^2 + x^3) dx - \int_0^{1/3} \frac{1}{2} (x - 6x^2 + 9x^3) dx$$

$$= \frac{9}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - 2x^3 + \frac{9}{4} x^4 \right]_0^{1/3}$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{18} - \frac{2}{27} + \frac{1}{36} \right] = \frac{9}{24} - \frac{1}{18} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{12} \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{18} \right] = \frac{1}{12} \cdot \frac{80}{18} = \frac{20}{54} = \frac{10}{27}$$

In alternativa: $\int_0^{1/3} \int_{1-3x}^{3-3x} xy + \int_{1/3}^1 \int_0^{3-3x} xy$



(b) Differenza di coni: $\frac{\pi}{3} \cdot 3 \cdot 1^2 - \frac{\pi}{3} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \pi - \frac{\pi}{27}$

(3) Sia $f(x, y) = y^3 + x^2y + 3xy$.

a) Determinare i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$;

b) determinare i punti di massimo assoluto e di minimo assoluto di f su $K = [0, 1] \times [0, 1]$.

8 punti

Risposta: (a) $(0, 0), (-3, 0), (-\frac{3}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$

(b) $(0, 0)$ pto di min. ass.
 $(1, 1)$ " max "

Svolgimento:

$$(a) \begin{cases} f_x = 2xy + 3y = y(2x+3) \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y = 3y^2 + x^2 + 3x \stackrel{!}{=} 0 \end{cases}$$

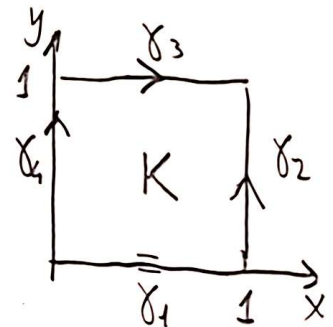
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x+3) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3/2 \\ 3y^2 + 9/4 - 9/2 = 0 \end{cases}$$

$$(0, 0) \quad (-3, 0) \\ (-\frac{3}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$$

(b) Punti critici interni: $\emptyset$

Punti singolari: $\emptyset$

$$\partial K = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$



$$\gamma_1) \gamma_1(x) = (x, 0), x \in [0, 1] \quad f|_{\gamma_1} \equiv 0$$

$$\gamma_2) \gamma_2(y) = (1, y) \quad y \in [0, 1] \quad f|_{\gamma_2} = y^3 + 4y \quad \frac{d}{dy} = 3y^2 + 4 > 0$$

$$\gamma_3) \gamma_3(x) = (x, 1) \quad x \in [0, 1] \quad f|_{\gamma_3} = 1 + x^2 + 3x \quad \frac{d}{dx} = 2x + 3 > 0$$

$$\gamma_4) \gamma_4(x) = (0, y) \quad y \in [0, 1] \quad f|_{\gamma_4} = y^3 \uparrow$$

$\rightarrow (0, 0)$ punto di minimo assoluto
 $(1, 1)$ " massimo "