ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 18.07.2025

IN STAMPATELLO **Cognome:** VERSIONE **Nome:** PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria O, in alternativa, di un quaderno di appunti formato A4. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. E' possibile utilizzare il retro dei fogli. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Al variare del parametro reale α, determinare l'integrale generale della seguente EDO:

$$y''(x) - 4y'(x) - \alpha y(x) = 2e^x.$$

7 punti

Risposta: $\alpha < -4$: $y(x) = e^{2x}\left(A\cos\left(\sqrt{-\alpha-4}\,x\right) + B\sin\left(\sqrt{-4-\alpha}\,x\right)\right) - \frac{2}{\alpha+3}e^x$

$\alpha = -4$: $y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + 2e^x$

$\alpha > -4, \alpha \neq -3$: $y(x) = Ae^{(2+\sqrt{4+\alpha})x} + Be^{(2-\sqrt{4+\alpha})x} - \frac{2}{\alpha+3}e^x$

$\alpha = -3$: $y(x) = Ae^{3x} + Be^x - xe^x$

Svolgimento: Lineare II ordine coefficienti costanti non omogenea

Omogenea   Polinomio caratteristico $\lambda^2 - 4\lambda - \alpha = 0$ $\Delta = 16 + 4\alpha \gtreqless 0 \iff \alpha \gtreqless -4$

$\alpha > -4$ $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16+4\alpha}}{2} = 2 \pm \sqrt{4+\alpha}$

$y_{om}(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$

$\alpha = -4$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $y_{om}(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$

$\alpha < -4$ $\lambda_1, \lambda_2 = 2 \pm i\sqrt{-\alpha-4}$, $y_{om}(x) = e^{2x}\left(A\cos\left(\sqrt{-\alpha-4}\,x\right) + B\sin\left(\sqrt{-\alpha-4}\,x\right)\right)$

Soluzione particolare   metodo di somiglianza

$\boxed{y_p = Ce^x}$; $y_p'' - 4y_p' - \alpha y_p(x) = C(-3-\alpha)e^x \stackrel{!}{=} 2e^x \iff C = -\frac{2}{\alpha+3}$, $\alpha \neq -3$

$\alpha = -3$: $\boxed{y_p(x) = Cxe^x}$ $y_p'' - 4y_p' - \alpha y_p = C\overbrace{(-3-\alpha)}^{=0}xe^x - 2Ce^x \stackrel{!}{=} 2e^x \iff C = -1$

$y_p' = C(x+1)e^x$

$y_p'' = C(x+2)e^x$

(2) Per $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$, sia $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + By, e^x - Ax)$.

a) Determinare i valori di A, B per i quali $\mathbf{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$.

b) Per $A = B = 0$, determinare una primitiva di $\mathbf{F}$ in $\mathbb{R}^2$.

c) Per ogni A, B, calcolare il lavoro $L(A, B)$ di $\mathbf{F}$ lungo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

d) Determinare il minimo assoluto di $L(A, B)$ vincolato su $A^2+B^2 = 1$.

9 punti

Risposta: a) $A, B : A+B=0$ b) $U(x,y) = ye^x$

c) $L(A,B) = 2 - \pi(A+B)$ d) $2 - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Svolgimento:

a) $\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^x + B \overset{!}{=} e^x - A = \frac{\partial F_2}{\partial y} \iff B = -A$

b) $\underline{F} = (ye^x, e^x)$ $U(x,y) = \int ye^x dx = ye^x + C(y)$

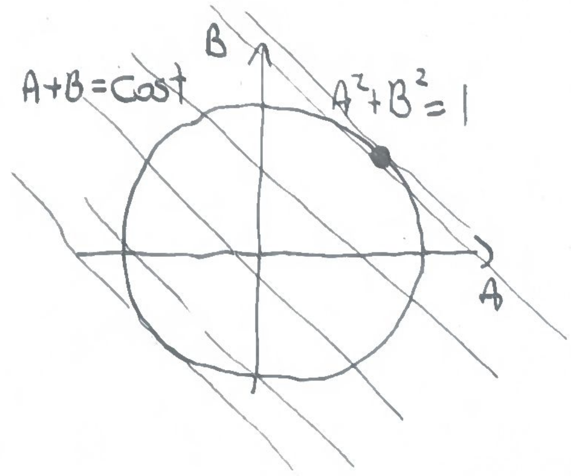
$\frac{\partial U}{\partial y} = e^x + C'(y) \overset{!}{=} e^x \iff C'(y) = 0$

c) $L(A,B) = \int_\gamma (ye^x, e^x) \cdot d\underline{x} + \int_\gamma (By, -Ax) \cdot dx$

$= U(0,1) - U(0,-1) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (B\sin t, -A\cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt$

$= 2 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-B\sin^2 t - A\cos^2 t)\, dt = 2 - \frac{\pi}{2}(A+B)$

d) Poiché i gradienti devono essere paralleli nei punti di estremo regolari, il minimo è assunto in $(+\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}})$ e vale $2 - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$



Altrimenti si può procedere parametrizzando o utilizzando il metodo dei moltiplicatori (lo studente controlli).

(3)

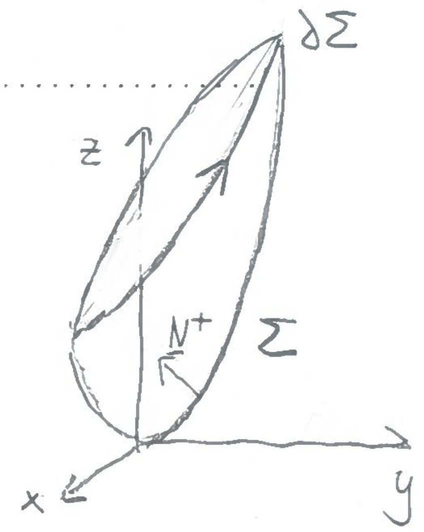
(a) Sia $\Sigma^+ = \{(x, y, z): \quad z = x^2 + y^2, \quad z - 2y \leq 3\}$, $\mathbf{N}^+ \cdot \mathbf{e}_3 > 0$.
Calcolare la circuitazione di $\mathbf{V} = (z, 0, 0)$ lungo $\partial\Sigma^+$.

(b) Calcolare il volume di $\Omega = \{(x, y, z): \ x^2 + y^2 \leq z \leq 2y + 3\}$.

8 punti

Risposta: a) -8π

b) 8π



Svolgimento:

a) Usando il calcolo diretto, $\partial\Sigma$ si ricava da

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 2y+3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 4 \\ z = 2y+3 \end{cases}$$

che si parametrizza con $\gamma^+(t) = (2\cos t, 1 + 2\sin t, 5 + 4\sin t)$
$t \in [0, 2\pi]$

e quindi $\displaystyle\int_\gamma \underline{V} \cdot \underline{T} \, ds = \int_0^{2\pi} -2(5 + 4\sin t) \cdot \sin t \, dt = -8\pi.$

Si può anche usare il teorema del rotore con Σ o il teorema del rotore con $\tilde{\Sigma} = \{z = 2y+3, \ x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$ (lo studente controlli).

b) Per fili: $\Omega = \{(x,y) \in D, \ x^2+y^2 \leq z \leq 2y+3\}$

$D = \{(x,y): \ x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$

$$|\Omega| = \iiint_\Omega 1 \, dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{2y+3} dz \right) dx\,dy = \iint_D (3 + 2y - y^2 - x^2) \, dx\,dy$$

$$= \iint_D (4 - (y-1)^2 - x^2) \, dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - \rho^2) \rho \, d\rho \, d\varphi = 2\pi \left[-\frac{(4-\rho^2)^2}{4} \right]_0^2$$

$$= 8\pi$$