

IN STAMPATELLO

Cognome: VERSIONE

Nome: PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria O, in alternativa, di un quaderno di appunti formato A4. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. È possibile utilizzare il retro dei fogli. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Per $\alpha = -1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, determinare l'integrale generale della seguente EDO:

$$y'(x) + \alpha y(x) = 3(y(x))^3 x e^x.$$

8 punti

Risposta: $\alpha = -1$) $y(x) = \pm (C e^{-2x} + (\frac{2}{3} - 2x) e^x)^{-1/2}$

 $C \in \mathbb{R}$

$$\alpha = 1/2$$

$$y(x) = \pm (C - 3x^2)^{-1/2} e^{-x/2}$$

$\cup \{y \equiv 0\}$ ciascuna nel proprio dominio naturale

Svolgimento:

$$y \equiv 0 \text{ è soluzione}$$

$$\text{Per } y \neq 0 \text{ Bernoulli: } \frac{y'}{y^3} + \frac{\alpha}{y^2} = 3x e^x \quad v = \frac{1}{y^2}, \quad v' = -\frac{2y'}{y^3}$$

$$-\frac{v'}{2} + \frac{\alpha}{v} = 3x e^x \Leftrightarrow v' - 2\alpha v = -6x e^x$$

$$\text{Omogenea: } \lambda = 2\alpha, \quad v_0(x) = C e^{2\alpha x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\alpha = -1} \quad v_p(x) = (ax+b) e^x \quad v_p'(x) = e^x (a+ax+b)$$

$$v_p' + 2v_p = e^x (ax+a+b+2ax+2b) \stackrel{!}{=} -6x e^x \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -6 \\ a+3b = 0 \end{cases}$$

$$v(x) = C e^{-2x} + (-2x + \frac{2}{3}) e^x$$

$$\boxed{\alpha = 1/2} \quad v_p(x) = x(ax+b) e^x \quad v_p'(x) = e^x (2ax+b+ax^2+bx)$$

$$v_p' - v_p = e^x (2ax + \cancel{bx} + b + \cancel{ax^2} - \cancel{ax^2} - \cancel{bx}) \stackrel{!}{=} -6x e^x \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 2a=-6 \end{cases}$$

$$v(x) = C e^x - 3x^2 e^x$$

(2) Siano

$$\mathbf{V}(x, y) = (5x^4y^6 + y, 6x^5y^5) \quad \text{e} \quad \gamma(t) = \left(t^6 + t, \frac{7}{6t^5 + 1}\right), \quad t \in [0, 1].$$

Calcolare il lavoro di $\mathbf{V}$ lungo γ .

8 punti

Risposta:

39

Svolgimento:

$$U(x, y) = \int 6x^5y^5 dy = x^5y^6 + C(x) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 5x^4y^6 + C'(x) \stackrel{?}{=} 5x^4y^6 + y \\ \Leftrightarrow C'(x) = y \quad \equiv$$

$\underline{V}$ non è conservativo, tuttavia

$$\underline{V}(x, y) = \underline{V}_0(x, y) + (y, 0) \quad \text{con } \underline{V}_0 \text{ conservativo, } U(x, y) = x^5y^6$$

$$\gamma(0) = (0, 7)$$

$$\gamma(1) = (2, 1)$$

$$\int_{\gamma} \underline{V} \cdot d\underline{x} = \int_{\gamma} \underline{V}_0 \cdot d\underline{x} + \int_{\gamma} y dx =$$

$$\int_{\gamma} \underline{V}_0 \cdot d\underline{x} = U(2, 1) - U(0, 7) = 2^5$$

$$\int_{\gamma} y dx = \int_0^1 \frac{7}{6t^5 + 1} \cdot (6t^5 + 1) dt = 7$$

(3) Per $A > 0$ e $B > 0$, sia $\Omega = \left\{ (x, y) : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \leq 1 \right\}$.

(a) Per ogni $A > 0$ e $B > 0$, calcolare il baricentro di Ω .

(b) Fra tutti gli $A > 0$ e $B > 0$ tali che $A + B = 2$, determinare quelli che rendono minima la distanza del baricentro da $(0, 0)$.

8 punti

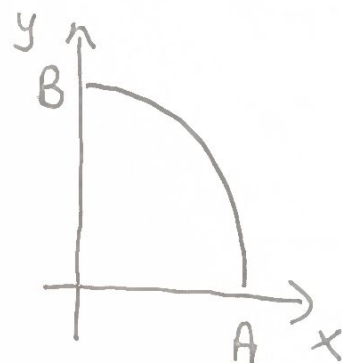
Risposta: (a) $(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{4}{3\pi} (A, B)$

(b) $A = B = 1$

Svolgimento:

a) $|\Omega|_2 = \frac{\pi}{4} AB$

$$\iint_{\Omega} x dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 A p \cos \varphi \cdot \underbrace{AB p}_{|det J|} dp d\varphi = \frac{A^2 B}{3}$$

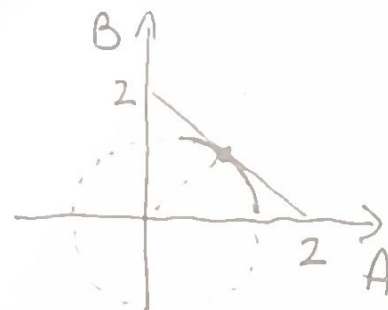


Per simmetria $\iint_{\Omega} y dx dy = \frac{AB^2}{3}$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{4}{3\pi} (A, B)$$

b) $d^2((\bar{x}, \bar{y}), (0, 0)) = \frac{16}{9\pi^2} (A^2 + B^2)$

La coppia (A, B) sulla retta $A + B = 2$ che minimizza $A^2 + B^2$ è $A = B = 1$



(geometria elementare o teorema dei moltiplicatori)