



Cognome: ..... VERSIONE ..... Nome: ..... PRELIMINARE .....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia

$$F(x, y) = 2x^2y^3 - y \tan(x) - \pi^2(\alpha^2 + \alpha).$$

a) Determinare i valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  per i quali l'equazione  $F(x, y) = 0$  definisce implicitamente una funzione  $x = h(y)$  nell'intorno del punto  $P = (\pi, 1)$ .

b) Per tali valori di  $\alpha$  scrivere l'equazione della retta tangente alla curva  $F(x, y) = 0$  nel punto  $P$ .

6 punti

Risposta:  $\alpha = -2$  o  $\alpha = 1$ .

$$x = \pi - \frac{6\pi^2}{4\pi - 1}(y - 1)$$

Svolgimento:

$$\text{Si ha } F(\pi, 1) = 2\pi^2 - \underbrace{\tan(\pi)}_{=0} - \pi^2(\alpha^2 + \alpha) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha = 2 \quad \Leftrightarrow \alpha = -2 \quad \text{o} \quad \alpha = 1.$$

In tal caso si ha

$$F_y(x, y) = 6x^2y^2 - \tan(x)$$

$$F_y(\pi, 1) = 6\pi^2 \neq 0$$

quindi  $F=0$  definisce implicitamente  $h$ . Si ha

$$F_x(x, y) = 4xy^3 - \frac{y}{\cos^2(x)}, \quad F_x(\pi, 1) = 4\pi - 1$$

quindi la retta tangente ha equazione

1/5

$$x = h(1) + h'(1)(y-1) = \pi - \frac{6\pi^2}{4\pi - 1}(y-1).$$

(2) Sia  $\omega(x, y)$  la seguente forma differenziale:

$$\omega(x, y) = \left( \frac{5x}{x^2 + y^2 + 4y} + 2x \right) dx + \frac{5y + 10}{x^2 + y^2 + 4y} dy.$$

a) Determinare un insieme semplicemente connesso  $E$  in cui  $\omega$  è esatta e rappresentarlo graficamente.

b) Calcolare

$$\int_{\gamma^+} \omega$$

dove  $\gamma^+(t) = (t, -t - 2)$ ,  $t \in [-1, 0]$ , orientata nel verso delle  $t$  crescenti.

7 punti

Risposta: a)  $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+2)^2 < 4 \}$

b)  $\frac{5}{2} \log 2 - 1$ .

Svolgimento:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int \frac{5y+10}{x^2+y^2+4y} dy = \frac{5}{2} \int \frac{2y+4}{x^2+y^2+4y} dy = \\ &= \frac{5}{2} \log |x^2+y^2+4y| + C(x) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{5}{2} \frac{2x}{x^2+y^2+4y} + C'(x) \stackrel{!}{=} \frac{5x}{x^2+y^2+4y} + 2x$$

$$\Leftrightarrow C'(x) = 2x \Leftrightarrow C(x) = x^2 + C$$

Potenziale:  $U(x, y) = \frac{5}{2} \log |x^2+y^2+4y| + x^2 + C$

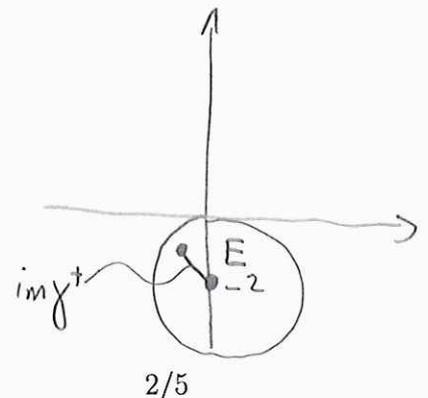
•  $\text{dom } U = \mathbb{R}^2 \setminus \{ x^2+y^2+4y \}$ .

• sottoinsieme semplicemente connesso:

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 4y < 0 \}$$

$$\text{im } \gamma^+ \subset E$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma^+} \omega = U(0, -2) - U(-1, -1) = \frac{5}{2} (\log 4 - \log 2) - 1$$



(3) Calcolare il baricentro del solido  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ottenuto ruotando l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3xy - 1 \leq 0, x \geq 0, 1 \leq y \leq 2\}$$

di un angolo  $2\pi$  attorno all'asse  $y$ .

7 punti

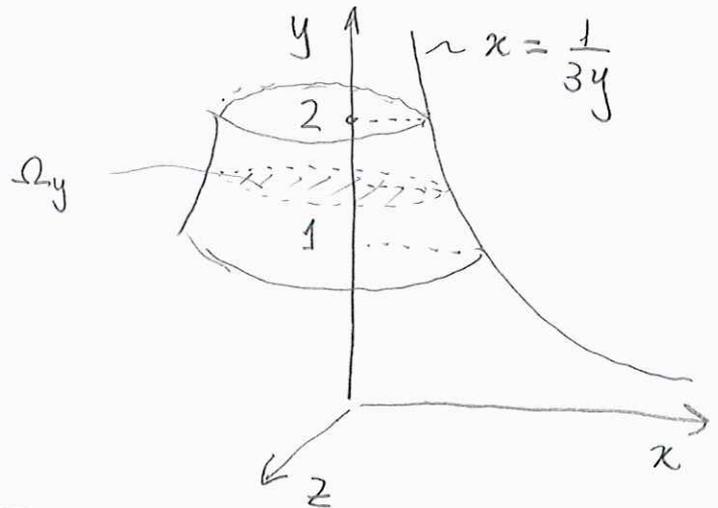
Risposta:

$$(x_B, y_B, z_B) = (0, 2 \log 2, 0).$$

Svolgimento:

Integrazione per strati:

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int_1^2 |\Omega_y| dy = \int_1^2 \frac{\pi}{9y^2} dy \\ &= -\frac{\pi}{9y} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{18}. \end{aligned}$$



Per simmetria,  $x_B = z_B = 0$ .

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{18}{\pi} \int_1^2 \iint_{\Omega_y} y dy = \frac{18}{\pi} \int_1^2 y \cdot \frac{\pi}{9y^2} dy = \\ &= 2 \log 2. \end{aligned}$$

(4) Determinare tutte le funzioni  $y(x)$  che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} y^{(iv)}(x) + 9y''(x) = 2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

6 punti

Risposta:

$$y(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x) + \frac{x^3}{27} - 3Bx - A, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Svolgimento:

$$\boxed{z = y''} \quad z'' + 9z = 2x$$

Omogenea:  $\lambda^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3i$

$$z_0(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

Sol. part. Per somiglianza,  $z_p(x) = Ax + B$

$$z_p'' + 9z_p = 9Ax + 9B \stackrel{!}{=} 2x \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{9} \\ B = 0 \end{cases}$$

Int. gen.  $z(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{2}{9}x$

Integrando due volte,

$$y(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x) + \frac{x^3}{27} + Cx + D$$

Imponendo le condizioni iniziali,

$$y(0) = A + D = 0$$

$$y'(0) = 3B + C = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = -A \\ C = -3B \end{cases}$$