ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 22.01.2026 ~~B~~

IN STAMPATELLO **Cognome:** VERSIONE **Nome:** PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria O, in alternativa, di un quaderno di appunti formato A4. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. E' possibile utilizzare il retro dei fogli. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Sia $\mathbf{V}(x,y) = (x^2y^2, -xy^3)$ e sia

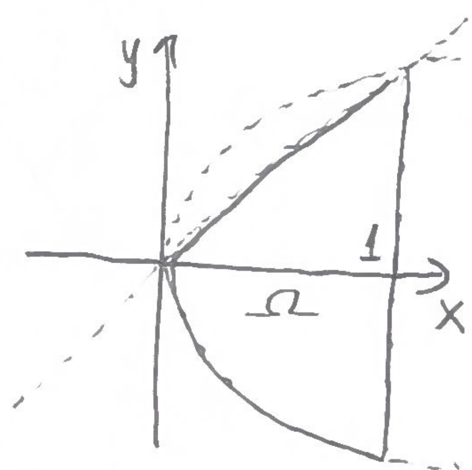
$$\Omega = \{(x,y) :\ y^2 \le x \le 1, x \ge y\}.$$

Calcolare il flusso di $\mathbf{V}$ uscente da Ω.

8 punti

Risposta: $-\dfrac{17}{105}$

Svolgimento: $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \underline{V}\cdot\underline{N}^e\, ds = \iint_\Omega \operatorname{div}\underline{V}\, dx\, dy$



$\operatorname{div}\underline{V} = 2xy^2 - 3xy^2 = -xy^2$

Tre strade:

1) $\displaystyle -\iint_\Omega xy^2\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{-\sqrt{x}}^{x} -xy^2\,dy\right)dx$

2) $\displaystyle -\iint_\Omega xy^2\,dx\,dy = -\int_{-1}^{0}\left(\int_{y^2}^{1} xy^2\,dx\right)dy - \int_0^1\left(\int_y^1 xy^2\,dx\right)dy$ $(\square + \triangle)$

3) $\displaystyle -\iint_\Omega xy^2\,dx\,dy = -2\int_0^1\left(\int_{y^2}^{1} xy^2\,dx\right)dy + \int_0^1\left(\int_{y^2}^{y} xy^2\,dx\right)dy$ $(\square - \circ)$

Usando la prima:

$$-\int_0^1\left[\frac{xy^3}{3}\right]_{y=-\sqrt{x}}^{y=x} dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 (x^4 + x^{5/2})\,dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{7}\right)$$

(2) Sia Σ^+ la superficie di rotazione intorno all'asse z generata dal grafico di $y = \sin z$, $z \in [0, \frac{\pi}{2}]$, orientata in modo che $\mathbf{N}^+(0, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}) \cdot \mathbf{e}_3 > 0$.

a) Calcolare $\displaystyle\iint_\Sigma \cos z \, dS$;

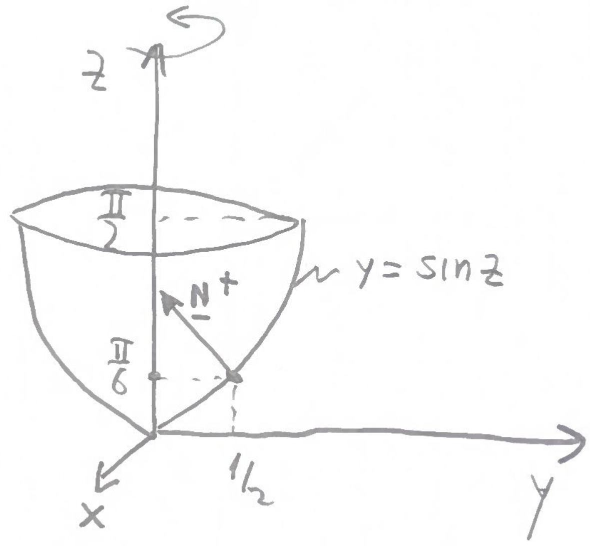
b) Calcolare la circuitazione di $\mathbf{V}(x, y, z) = (y, 0, 0)$ lungo $\partial\Sigma^+$.

8 punti

Risposta: a) $\frac{2}{3}\pi\left(2^{3/2} - 1\right)$

b) $-\pi$

Svolgimento:



a)

$$\sigma(z, \varphi) = (\sin z \cos\varphi, \sin z \sin\varphi, z)$$

$$\sigma_z = (\cos z \cos\varphi, \cos z \sin\varphi, 1)$$

$$\sigma_\varphi = (-\sin z \sin\varphi, \sin z \cos\varphi, 0)$$

$$\sigma_z \wedge \sigma_\varphi = (-\sin z \cos\varphi, -\sin z \sin\varphi, \sin z \cos z)$$

$$\|\sigma_z \wedge \sigma_\varphi\| = \sqrt{\sin^2 z + \sin^2 z \cos^2 z} \overset{\sin z \geq 0}{=} \sin z \sqrt{1 + \cos^2 z}$$

$$\iint_\Sigma \cos z \, dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos z \sin z \sqrt{1 + \cos^2 z} \, d\varphi \, dz$$

$$= -2\pi \cdot \frac{1}{3} (1 + \cos^2 z)^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\pi \left(2^{3/2} - 1\right)$$

b) $\gamma(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \frac{\pi}{2})$ parametrizzazione di $\partial\Sigma^+$

$$\int_{\partial\Sigma^+} \underline{V} \cdot \underline{T} \, ds = + \int_\gamma (y, 0, 0) \cdot \underline{T} \, ds = \int_0^{2\pi} (\sin\varphi, 0, 0) \cdot (-\sin\varphi, \dots) \, d\varphi$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = -\pi.$$

(3) Sia $\Gamma = \{(x, y) : \ 2x^2 - 3xy + y^2 = 0\}$.

a) Determinare esplicitamente e graficare Γ.

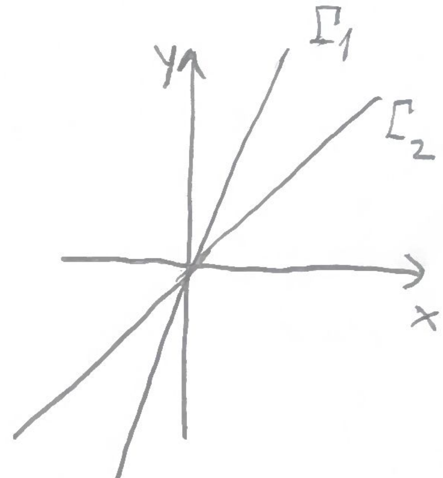
b) Determinare gli estremi locali di $f(x, y) = y^3 - x^2$ vincolati su Γ e stabilirne la natura.

8 punti

Risposta: $(0,0)$ pto di max loc per $f|_\Gamma$

$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$ pti di min loc per $f|_\Gamma$

Svolgimento:



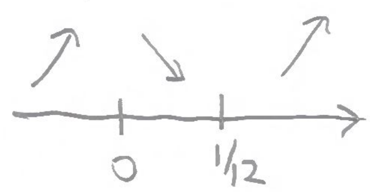
a) $\lambda = \frac{y}{x}$ $\quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$

$\Gamma = \{(x,y) : (y-x)(y-2x) = 0\}$

Γ è l'unione delle due rette in figura, Γ_1 e Γ_2

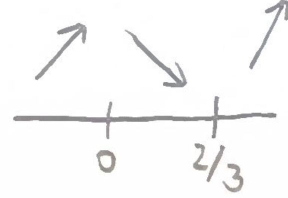
b) $f|_{\Gamma_1} = 8x^3 - x^2 \qquad \frac{d}{dx} = 24x^2 - 2x = 2x(12x - 1)$



$(0,0)$ candidato punto di max loc per $f|_\Gamma$

$\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$ punto di min. loc. per $f|_\Gamma$

$f|_{\Gamma_2} = x^3 - x^2 \qquad \frac{d}{dx} = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$



$(0,0)$ candidato punto di max loc. per $f|_\Gamma$

$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ pto di min loc per $f|_\Gamma$

$(0,0)$ è di max loc su entrambi i rami $\Rightarrow$ è di max loc.