Analisi Matematica II

Esercizi sulle curve e sulle forme differenziali nel piano e nello spazio

Corso di laurea in Ingegneria Meccanica. A.A. 2008-2009.

Esercizio 1. *Stabilire se le seguenti curve piane assegnate in forma parametrica sono regolari, semplici e chiuse. Determinare infine per ciascuna curva la relativa equazione cartesiana.*

$$\phi(t) = (1 - t^2, 1 - t^4), \;\; t \in [-1, 1],$$

$$\phi(t) = (t, 2t^2 - 4t), \;\; t \in [1, 2],$$

$$\phi(t) = (1 + 2\cos t, \sin t), \;\; t \in [0, \pi].$$

Esercizio 2. *Sia assegnata in forma parametrica la curva piana*

$$\phi(t) = (\sqrt{3}(t - \sin t), \sqrt{3}(1 - \cos t)), \;\; t \in [0, 2\pi].$$

Determinare una coppia di punti della curva, stabilire se la curva è regolare, semplice e chiusa e calcolare il versore tangente alla curva nel punto $\phi(\pi)$.

Esercizio 3. *Sia assegnata in forma parametrica la curva piana*

$$\phi(t) = \left(1 + 9\cos t, \frac{1}{4}\sin t\right), \;\; t \in I = [-8, 37].$$

Verificare che si tratti di un'ellisse con assi paralleli agli assi cartesiani. La curva non è semplice. Perchè? Determinare un sottointervallo J di $I \cap [0, +\infty)$ in modo tale che la curva

$$\phi : J \to \mathbb{R}, \;\; \phi(t) = \left(1 + 9\cos t, \frac{1}{4}\sin t\right)$$

sia semplice.

Esercizio 4. *Siano assegnate in forma parametrica le curve piane*

$$\phi_1(t) = (t, t), \;\; t \in I = [0, +\infty) \;\; e \;\; \phi_2(t) = (t^2, t^2), \;\; t \in J = \mathbb{R}.$$

Stabilire le equazioni cartesiane delle curve assegnate e verificare che $\phi_1(I) = \phi_2(J)$. Verificare che ϕ_1 è semplice, mentre ϕ_2 non lo è.

Esercizio 5. *Verificare che il punto $P = (0, 1, 0)$ appartiene alla curva in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata come*

$$\phi(t) = (\sin t, e^t, t^2 - \pi t), \;\; t \in [0, +\infty).$$

Verificare che la curva è regolare. Dedurre senza effettuare alcun passaggio algebrico che la curva è semplice.

Esercizio 6. *Calcolare la lunghezza delle seguenti curve (piane e nello spazio) assegnate in forma parametrica*

$$\phi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \;\; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\phi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \;\; t \in [\pi, 3\pi],$$

$$\phi(t) = (e^{2t}, 2e^t, t), \;\; t \in [0, 1].$$

$$\phi(t) = (t \cos t, t \sin t, t), \;\; t \in [0, 2\pi].$$

Suggerimento. *Per il calcolo della lunghezza dell'ultima curva assegnata dall'esercizio, ricorrete, nella risoluzione dell'integrale che definisce tale quantità, alla sostituzione mediante la funzione seno iperbolico.*

Esercizio 7. *Sia assegnata la seguente forma differenziale*

$$\omega(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{y}{x^2 + y^2}\, dy.$$

Determinare il dominio di ω. Spiegare perchè è nullo l'integrale

$$\int_\gamma \omega$$

di ω lungo una qualunque curva chiusa regolare e semplice che non contenga all'interno del dominio limitato di cui è frontiera il punto $O = (0, 0)$.

Calcolare esplicitamente l'integrale di ω lungo la circonferenza centrata nell'origine e avente raggio unitario percorsa in senso antiorario. Alla luce di questo calcolo, quanto vale l'integrale di ω lungo una qualunque curva chiusa, regolare e semplice contenente l'origine all'interno del dominio limitato di cui è frontiera? La forma ω è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

Esercizio 8. *Sia assegnata la forma differenziale*

$$\omega(x, y) = (4x^3 + y^3)\, dx + 3y^2 x\, dy.$$

Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma^+} \omega$$

con

$$\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\, x, y \geq 0 \right\}.$$

*Nota bene: con la scrittura γ^+ si intende d'ora in avanti che la curva γ (assegnata come particolare luogo geometrico dei punti del piano **senza** fare ricorso a una parametrizzazione) va intesa come percorsa in senso antiorario.*

Esercizio 9. *Calcolare l'integrale*

$$\int_{\partial D^+} \omega$$

con

$$\omega(x,y) = 4x(1-y)\,dx + (x-1)^2\,dy$$

e

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + 4(y-1)^2) \leq 4\}.$$

Esercizio 10. *Sia assegnato l'insieme compatto $D \subset \mathbb{R}^2$ definito da*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4,\, y \geq x\}.$$

Calcolare

$$I_1 = \int_{\partial D^-} \left(2y + \frac{4x}{x^2+y^2}\right) dx + \frac{4y}{x^2+y^2}\,dy$$

e

$$I_2 = \int_{\partial D^-} 2y\,dx.$$

Spiegare perchè $I_1 = I_2$.

Esercizio 11. *Sia assegnata la forma differenziale*

$$\omega(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx - \left(\frac{2}{\sqrt{x-2y}} + 3\right) dy.$$

Determinare il dominio di ω e stabilire se la forma in esame è chiusa sul proprio dominio.

Calcolare

$$\int_\gamma \omega$$

con $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove γ_1 è l'arco di parabola che va dal punto $(0,-2)$ al punto $(1,-1)$, ha vertice in $(0,-2)$ e asse parallelo all'asse y, mentre γ_2 è il segmento di retta che dal punto $(1,-1)$ va al punto $(4,0)$.

Esercizio 12. *Verificare che la forma differenziale*

$$\omega(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right) dy$$

è esatta sul suo dominio di definizione e calcolarne la primitiva che nel punto $(1,1)$ assume il valore 2.

Esercizio 13. *Calcolare l'integrale*

$$\int_{\gamma^+} \omega$$

con

$$\omega(x,y) = \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\,dx + \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\,dy$$

e

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 = 1,\, 0 \le y \le x\}.$$

Esercizio 14. *Dire per quali funzioni $f = f(x,y)$ di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la forma differenziale*

$$\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + f(x,y)\,dy$$

risulta esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Esercizio 15. *Sia assegnato l'insieme*

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x,y,z > 0\}.$$

Verificare che la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = \frac{z}{x+y}\,dx + \frac{z}{x+y}\,dy + \log(x+y)\,dz$$

è esatta in Ω e calcolarne la primitiva F tale che

$$F(1,1,1,) = 1.$$

Esercizio 16. *Sia assegnato l'insieme*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0\}.$$

Verificare che la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{y}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,dx + e^{-\frac{1}{x}}\,dy$$

è esatta in Ω e calcolarne la primitiva F tale che

$$F(-1,0) = 1.$$

Esercizio 17. *Sia assegnata la forma differenziale*

$$\omega(x,y,z) = 2(\alpha+\beta-2\gamma)xyz\,dx + (\alpha-3\beta)x^2z\,dy + (\alpha-\beta-\gamma)x^2y\,dz.$$

Determinare le costanti α, β e γ in modo tale che ω sia esatta in $\mathbb{R}^3$ e calcolare quindi per tale scelta delle costanti

$$\int_{\gamma} \omega$$

con

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,$$

definita da

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, t).$$