Tipo 3 - Equazioni a variabili separabili. Sono così chiamate quelle equazioni $y' = f(x, y)$ nelle quali il secondo membro è il prodotto di due funzioni, *una della sola* x, *l'altra della sola* y. Più precisamente si ha

$$y' = X(x)Y(y)\,, \tag{10.3.12}$$

con $X(x)$ continua in un intervallo I, $Y(y)$ in un intervallo J.

Supponiamo che

$$Y(y) \neq 0, \qquad \forall y \in J\,; \tag{10.3.13}$$

allora l'equazione data si può scrivere nella forma

$$X(x)dx - \frac{1}{Y(y)}dy = 0, \quad \text{in} \quad I \times J\,, \tag{10.3.13$'$}$$

cioè in forma di equazione differenziale esatta del tipo (10.3.11).

L'integrale generale è dato allora in $I \times J$ da

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} X(t)dt - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{Y(t)}dt = c, \quad c \text{ costante arbitraria}\,, \tag{10.3.13$''$}$$

essendo (x_0, y_0) un punto arbitrario di $I \times J$. Nello studio della $U(x, y) = c$ si può osservare che essendo $U_y = -1/Y \neq 0$, può ricavarsi localmente la $y = y(x, c)$.

Se $Y(y)$ ha qualche "*zero*" per $y \in J$, il ragionamento fatto cade in difetto, tuttavia si può rilevare che se y_0 è un punto ove $Y(y_0) = 0$, la curva data dal segmento $y = y_0 \subset I \times J$, cioè la costante $y = y_0$ è *una soluzione del problema*. Analoghi ragionamenti si possono fare se $X \neq 0$, $\forall x \in I$.

Osservazione IV - Dalla espressione (10.3.13$''$) si può dedurre la seguente regola pratica per procedere speditamente. Data la (10.3.12) si considerano a parte le eventuali soluzioni *costanti* $y = \alpha, y = \beta, \ldots$, relativi ai valori di $y \in J$ che annullano la $Y(y)$. Si separano poi le variabili ponendo l'equazione (10.3.12) nella forma

$$\frac{dy}{Y(y)} = X\,dx$$

e si scrivono gli integrali indefiniti di ambo i membri (fatti su *intervalli*) che differiscono per una costante arbitraria c:

$$\int \frac{dy}{Y(y)} = c + \int X(x)dx\,.$$

Detta G la primitiva di $1/Y$ e F la primitiva di X si ha

$$G(y) = c + F(x)\,, \tag{10.3.14}$$

cioè l'integrale di (10.3.2) *in forma implicita*, equivalente alla (10.3.13$''$).

Se si vuole la soluzione del problema di Cauchy $y(x_0) = y_0$, basta scegliere c in modo che $G(y_0) = c + F(x)$ e quindi si ha $G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$.

Naturalmente se $Y(y_0) = 0$, la $y = y_0$ è una soluzione *particolare* o *singolare*.

Tipo 3 - *Equazioni a variabili separabili*. Sono così chiamate quelle equazioni $y' = f(x,y)$ nelle quali il secondo membro è il prodotto di due funzioni, *una della sola x, l'altra della sola y*. Più precisamente si ha

$$y' = X(x)Y(y)\,, \tag{10.3.12}$$

con $X(x)$ continua in un intervallo I, $Y(y)$ in un intervallo J.

Supponiamo che

$$Y(y) \neq 0, \qquad \forall y \in J\,; \tag{10.3.13}$$

allora l'equazione data si può scrivere nella forma

$$X(x)dx - \frac{1}{Y(y)}dy = 0, \quad \text{in} \quad I \times J\,, \tag{10.3.13'}$$

cioè in forma di equazione differenziale esatta del tipo (10.3.11).

L'integrale generale è dato allora in $I \times J$ da

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} X(t)dt - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{Y(t)}dt = c, \quad c \text{ costante arbitraria}\,, \tag{10.3.13''}$$

essendo (x_0, y_0) un punto arbitrario di $I \times J$. Nello studio della $U(x,y) = c$ si può osservare che essendo $U_y = -1/Y \neq 0$, può ricavarsi localmente la $y = y(x,c)$.

Se $Y(y)$ ha qualche "*zero*" per $y \in J$, il ragionamento fatto cade in difetto, tuttavia si può rilevare che se y_0 è un punto ove $Y(y_0) = 0$, la curva data dal segmento $y = y_0 \subset I \times J$, cioè la costante $y = y_0$ è *una soluzione del problema*. Analoghi ragionamenti si possono fare se $X \neq 0$, $\forall x \in I$.

Osservazione IV - Dalla espressione (10.3.13″) si può dedurre la seguente regola pratica per procedere speditamente. Data la (10.3.12) si considerano a parte le eventuali soluzioni *costanti* $y = \alpha, y = \beta, \ldots$, relativi ai valori di $y \in J$ che annullano la $Y(y)$. Si separano poi le variabili ponendo l'equazione (10.3.12) nella forma

$$\frac{dy}{Y(y)} = X\,dx$$

e si scrivono gli integrali indefiniti di ambo i membri (fatti su *intervalli*) che differiscono per una costante arbitraria c:

$$\int \frac{dy}{Y(y)} = c + \int X(x)dx\,.$$

Detta G la primitiva di $1/Y$ e F la primitiva di X si ha

$$G(y) = c + F(x)\,, \tag{10.3.14}$$

cioè l'integrale di (10.3.2) *in forma implicita*, equivalente alla (10.3.13″).

Se si vuole la soluzione del problema di Cauchy $y(x_0) = y_0$, basta scegliere c in modo che $G(y_0) = c + F(x)$ e quindi si ha $G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$.

Naturalmente se ...

Esempio 3 - Considerata l'equazione differenziale

$$y' = x\,y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

si ha intanto la soluzione $y \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, cioè l'asse delle x. Operiamo pertanto per $y > 0$, cioè in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, ove è lecito separare le variabili e si ha, introducendo una costante arbitraria c,

$$\frac{dy}{y^2} = x\,dx \iff -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}(x^2 - c) \implies y = -\frac{2}{x^2 - c}\,;$$

dovendo risultare $y > 0$ quindi $x^2 - c < 0$, va preso $|x| < \sqrt{c}$, con $c > 0$.

Dunque in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ l'integrale generale è dato da

$$y = -\frac{2}{x^2 - c}, \quad \text{per} \quad |x| < \sqrt{c},\ c > 0\,.$$

Se operiamo in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$, ove $y < 0$, vale ancora la stessa espressione

$$y = -\frac{2}{x^2 - c}, \quad \text{con} \quad |x| > \sqrt{c},\ c \geq 0\,; \quad \text{oppure } \forall x \text{ se } c < 0\,.$$

La soluzione $y = 0$, precedentemente notata si può ottenere per $c \to +\infty$ e considerare ancora "come un integrale particolare".

Se vogliamo risolvere il problema di Cauchy $y(1) = -1$, va utilizzata l'espressione valida per $y < 0$, e si ha $c = -1$, da cui si ha l'unica soluzione $y = -\dfrac{2}{x^2 + 1}$.

Esempio 4 - Considerata l'equazione

$$y' = 3y^{2/3}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

si osserva subito la soluzione $y = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sia perciò $y \neq 0$ e supponiamo $y \in \mathbb{R}^+$; separando le variabili ed integrando, da $y^{-2/3}dy = 3dx$ segue, introducendo una costante arbitraria c

$$y = (x - c)^3, \quad \text{con} \quad x > c\,,$$

che dà come *integrale generale* la famiglia ∞^1 di *semicubiche* indicate in figura 10.3.1 a tratto pieno. Se operiamo in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ si ha la famiglia di semicubiche ciascuna esistente solamente per $x < c$; linea tratteggiata di figura 10.3.1. Per nessun valore di c si può ottenere la $y \equiv 0$ che è pertanto un *integrale singolare*.

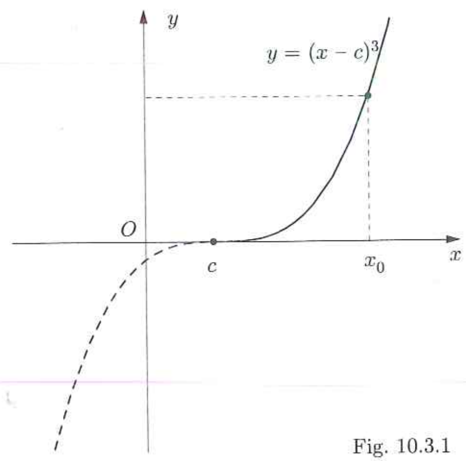

Fig. 10.3.1

È evidente che il problema di Cauchy $y(x_0) = y_0 > 0$ ha una sola soluzione $y = (x - x_0 + \sqrt[3]{y_0})^3$, con $x > (x_0 - \sqrt[3]{y_0})$; analogamente se $y_0 < 0$ per $x < x_0 - \sqrt[3]{y_0}$.

semicubica per (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^+$, 0 (zero) tra x_1 e $x_0 - \sqrt[3]{y_0}$, $(x - x_1)^3$ per $x \leq x_1$ *arbitrario*; ovviamente $x_1 < x_0 - \sqrt[3]{y^2}$:

$$y^* = \begin{cases} (x - x_0 + \sqrt[3]{y_0})^3, & \text{per} \quad x \geq x_0 - \sqrt[3]{y_0}\,, \\ 0, & \text{per} \quad x \in [x_1, x_0 - \sqrt[3]{y_0}]\,, \\ (x - x_1)^3, & \text{per} \quad x \leq x_1\,. \end{cases}$$

Si rilevi che la y^* soluzione del problema di Cauchy è funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$ e che la retta $y \equiv 0$ è *l'inviluppo* della famiglia delle semicubiche relative alla $y > 0$ ed anche di quella relative alla $y < 0$. Limitandoci invece allo studio in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ per ogni punto (x_0, y_0) passa una sola semicubica; due diverse semicubiche non hanno punti comuni.

In modo analogo per ciò che concerne $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$.

* * *

Fin qui abbiamo dato tre casi notevoli di equazioni differenziali, la cui soluzione si ottiene *direttamente* (almeno da un punto di vista formale) ricorrendo alle "quadrature". Tuttavia esistono altre equazioni che con semplici *sostituzioni* si riconducono ad uno dei tre tipi considerati.

Tipo 4 - Equazioni di Bernoulli. Sono della forma

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha\,, \tag{10.3.15}$$

con $a(x)$, $b(x)$ continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, essendo α un assegnato numero reale arbitrario. Si nota subito che per $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ si hanno equazioni lineari (in particolare a variabili separabili se $\alpha = 1$). Supponiamo pertanto che sia $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Per $\alpha > 0$, una soluzione della (10.3.15) è data dalla $y \equiv 0$; naturalmente riferendoci ad α reale occorre $y \in \mathbb{R}^+$. Riferiamoci perciò in ogni caso allo studio dell'equazione data in $I \times \mathbb{R}^+$ ed osserviamo che allora la (10.3.15) si può scrivere

$$y'y^{-\alpha} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)\,.$$

Se assumiamo come *nuova incognita* la funzione $u = u(x)$ data da

$$u(x) = \big[y(x)\big]^{1-\alpha} \tag{10.3.16}$$

è immediato verificare che essa soddisfa l'equazione differenziale lineare

$$u' = (1 - \alpha)a(x)u + (1 - \alpha)b(x)\,, \tag{10.3.16'}$$

che va studiata per $u \in \mathbb{R}^+$. Ad ogni soluzione $u(x) \in \mathbb{R}^+$ di tale equazione corrisponde mediante (10.3.16) una soluzione della (10.3.15), data da

$$y = \big[u(x)\big]^{1/(1-\alpha)}\,. \tag{10.3.17}$$

Il lettore nel corso delle operazioni che esegue, ricordi che si richiedono soluzioni di (10.3.17) di classe C^1 in intervalli. Osservi inoltre che per particolari α, si può operare anche per $y < 0$.

Esempio 5 - Consideriamo l'equazione

$$y' = 2y\,\mathrm{tg}\,x + 2\sqrt{y}, \quad (x, y) \in (-\pi/2, \pi/2) \times [0, +\infty)\,.$$

Eseguito il cambiamento della funzione incognita mediante la $y = u^2$, essendo $y' = 2u \cdot u'$ si ha $2u\,u' = 2u^2\,\mathrm{tg}\,x + 2u$, che dà $u \equiv 0$, oppure

$$u' = u\,\mathrm{tg}\,x + 1\,,$$

che è un'equazione lineare in u. Dopo aver moltiplicato ambo i membri per $e^{-\int \mathrm{tg}\,x\,dx} = e^{\log\cos x} = \cos x$, si ha $(u\cos x)' = \cos x$ da cui segue

$$u = \mathrm{tg}\,x + c/\cos x$$

e quindi tornando alla variabile y, si ha l'*integrale generale*

$$y = (\mathrm{tg}\,x + c/\cos x)^2\,.$$

La $y \equiv 0$, è pure una soluzione del problema dato, ma non è possibile ottenerla per alcun valore di c (finito o infinito); pertanto è da considerare un *integrale singolare*. Si osservi che la retta $y = 0$ appartiene alla frontiera dell'insieme ove è continua la funzione a secondo membro dell'equazione data.

Tipo 5 - Equazioni differenziali esatte a mezzo del fattore integrante. Riprendiamo in esame l'equazione (10.3.7) e supponiamo che essa *non sia* esatta nel campo connesso A. Possiamo allora tentare l'integrazione con il metodo seguente, detto del *fattore integrante*.

Detta $\mu(x, y) \neq 0$, $\forall (x, y) \in A$ una funzione continua, moltiplicando ambo i membri di (10.3.7) per $\mu(x, y)$, si ha l'equazione *equivalente*

$$\mu(x, y)X(x, y)dx + \mu(x, y)Y(x, y)dy = 0\,. \tag{10.3.18}$$

Se è possibile scegliere $\mu(x, y)$ in modo che tale equazione sia esatta in A, in luogo della equazione data (10.3.7) basta integrare la (10.3.18): il fattore $\mu(x, y)$ prende il nome di *fattore integrante*.

Per esempio, se A è semplicemente connesso, se X, Y ammettono le derivate $X_y, Y_x \in C^0(A)$, e se $\mu \in C^1(A)$, ciò avverrà se e solo se risulta $\dfrac{\partial(\mu X)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu Y)}{\partial x}$, vale a dire

$$X\frac{\partial \mu}{\partial y} - Y\frac{\partial \mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\mu = 0\,. \tag{10.3.19}$$

La ricerca di un fattore integrante si è così ridotta alla risoluzione dell'equazione (10.3.19) che è un'*equazione alle derivate parziali* nell'incognita $\mu = \mu(x, y)$. Tale problema è in generale complicato, ma si può osservare che basta trovare *una sola* soluzione $\mu(x, y)$ della (10.3.19) e ciò in molti casi può risultare abbastanza agevole.

Si può, ad esempio, cercare se esiste un fattore integrante che dipenda *dalla sola variabile* x. Se nella (10.3.19) si pone $\mu = \mu(x)$, essa diventa

$$\mu'(x) = \frac{X_y - Y_x}{Y}\mu(x) \tag{10.3.20}$$