Un altro modo per calcolare i limiti di funzioni di due variabili è quello di passare alle coordinate polari (già trattate anche nel volume *Geometria analitica e algebra lineare*). Si può infatti provare il seguente risultato.

Teorema 2.5. *Sia $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di accumulazione per D. Allora*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

se e solo se si ha:

$$\lim_{r \to 0} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) = l$$

uniformemente rispetto a θ.

□

Chiariamo il significato di " uniformemente rispetto a θ".

Il limite precedente è **uniforme rispetto a θ** se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $0 < r < \delta$ e per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ si ha:

$$|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - l| < \epsilon.$$

In pratica, per provare che il limite è uniforme rispetto a θ è sufficiente mostrare che esiste una funzione $g(r) \geq 0$ tale che

$$|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - l| < g(r), \ \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

con

$$\lim_{r \to 0} g(r) = 0.$$

Esempio 2.20

Provare che si ha:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Svolgimento. Poniamo

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nella funzione $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, si ottiene

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r\cos^2\theta\sin\theta.$$

Poiché si ha:

$$|r\cos^2\theta\sin\theta| \leq r \quad \text{e anche} \quad \lim_{r \to 0} r = 0,$$

si ottiene che

$$\lim_{r \to 0}(r\cos^2\theta \sin\theta) = 0,$$

uniformemente rispetto a θ. Da qui il risultato cercato.

□

Esempio 2.21

Provare che non esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Svolgimento. Poniamo

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nella funzione $f(x,y)$ data si ottiene

$$\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \cos\theta\sin\theta.$$

Poiché $\lim_{r\to 0}\cos\theta\sin\theta$ dipende da θ, appare particolarmente evidente che non può essere uniforme rispetto a θ; dunque il limite dato non esiste.

□

Nota. Un risultato analogo a quello stabilito dal Teorema 2.5 vale ovviamente anche nel caso:

$$\|(x,y)\| \longrightarrow +\infty.$$

◇

Un'osservazione molto utile nel calcolo dei limiti di funzioni di più variabili è la seguente.

Supponiamo che sia:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L;$$

allora il limite per $(x,y) \to (x_0,y_0)$ della funzione ristretta a una qualunque curva passante per il punto (x_0,y_0) è sempre L. Quindi, in particolare, se il limite della funzione ristretta a una curva non esiste oppure dipende dalla curva, allora possiamo affermare che non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Esempio 2.22

Dire se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Svolgimento. Consideriamo il limite per $(x,y) \to (0,0)$ della funzione $f(x,y)$, ristretta alla retta di equazione $y = mx$. Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{1}{1+m^2}.$$

Tale limite dipende da m, cioè dalla retta. Dunque il limite dato non esiste.

□

Si potrebbe essere tentati di pensare che, se il limite della funzione ristretta a una qualunque retta passante per l'origine è sempre lo stesso (ed è uguale a L, con L eventualmente uguale anche a $\pm\infty$), allora anche

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L.$$

Ciò non è vero, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.23

Dire se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Svolgimento. Consideriamo il limite per $(x,y) \to (0,0)$ della funzione data ristretta alla retta di equazione $x = 0$. Tale limite è evidentemente uguale a 0.

Consideriamo una generica retta di equazione $y = mx$. Si ha, per ogni $m \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3m}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xm}{x^2+m^2} = 0.$$

Dunque il limite per $(x,y) \to (0,0)$ della funzione data ristretta a una generica retta passante per l'origine è uguale a 0.

Consideriamo adesso il limite per $(x,y) \to (0,0)$ della funzione data ristretta alla parabola di equazione $y = x^2$. Tale limite vale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto il limite richiesto non esiste.

□

L'esempio precedente chiarisce ulteriormente alcuni aspetti del calcolo dei limiti se vengono usate le coordinate polari.

Ponendo

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

si ha, sostituendo tali valori nella funzione dell'esempio precedente:

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2(r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta)} = \lim_{r\to 0}\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta} = 0.$$

Quindi il limite vale 0 per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$. Tuttavia esso non è uniforme rispetto a θ, altrimenti esso esisterebbe (per il Teorema 2.5).

Pertanto dire "uniforme rispetto a θ" *non* equivale a dire "per ogni θ".

2.6 Integrali dipendenti da un parametro

Nel Volume 1, studiando le proprietà degli integrali, abbiamo affrontato la continuità e la derivabilità della seguente funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b].$$

Adesso vogliamo studiare la seguente funzione di tre variabili, che rappresenta una generalizzazione della funzione integrale precedente. Più precisamente studieremo:

$$F(x,y,z) = \int_y^x f(t,z)\,dt, \quad x,y,t \in [a,b], \quad z \in [c,d].$$

Supponiamo che la funzione

$$f\colon [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

sia *continua* nell'insieme $R = [a,b] \times [c,d]$. Ricordando che il prodotto cartesiano $R = [a,b] \times [c,d]$ è definito come:

$$[a,b] \times [c,d] = \{(t,z) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a,b],\ z \in [c,d]\}$$

(si veda la Figura 2.21).

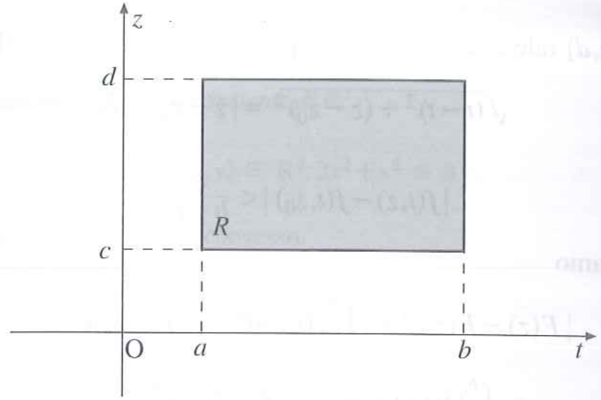

Figura 2.21

Notiamo che l'integrale che compare al secondo membro dell'ultima espressio
esiste per ogni $x, y \in [a,b]$, $z \in [c,d]$, poiché la funzione $f(t,z)$, consider
come funzione della sola t, è continua per ogni $z \in [c,d]$; dunque la funzio
data $F(x,y,z)$ è ben definita.

Notiamo anche che, se la funzione $f(t,z)$ è funzione della sola t e se $y = a$, allo
la funzione F (data) diventa proprio la funzione integrale definita nel Volume
ricordata all'inizio di questo paragrafo.

Si può provare che la funzione $F(x,y,z)$ è *continua* nell'insieme R $= [a,b] \times [a,b] \times [c,d]$.

Proveremo tale risultato in un caso particolare: nel caso generale la dimostrazio
è analoga, a parte una maggior laboriosità e simbologia.

Teorema 2.6. *Sia* $f\colon [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione continua. Consideria*
la funzione

$$F(z) = \int_a^b f(t,z)\,dt.$$

Allora funzione $F\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *così definita è continua (in* $[c,d]$*).*

Dimostrazione. Fissiamo $z_0 \in [c,d]$; dobbiamo provare che

$$\lim_{z\to z_0} F(z) = F(z_0).$$

Poiché la funzione $f(t,z)$ è continua nell'insieme chiuso e limitato $[a,b] \times [c,$
allora per il Teorema di Cantor segue che $f(t,z)$ è uniformemente continua