SOLUZIONI COMPITO del 1/02/2013
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
INGEGNERIA MECCANICA - INGEGNERIA ENERGETICA
INGEGNERIA AMBIENTE e TERRITORIO

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che la serie proposta è a termini di segno alterno. Studiamone dapprima la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice e tenendo conto che $\log[1+2/(n^2+1)] \sim 2/(n^2+1)$, si ha

$$a_n := \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right) \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n} = \log\left(1+\frac{2}{n^2+1}\right) \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)^n} \sim \frac{2}{n^2+1} \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n} \sim \frac{2}{n^2} \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n} .$$

Ricordando il limite notevole $\sqrt[n]{n} \to 1$, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2\,\mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n}}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(\alpha^2-1)}}{(\sqrt[n]{n})^2} = \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)} \begin{cases} >1 & \text{se } \alpha^2-1>0, \text{ cioè } \alpha<-1 \text{ o } \alpha>1; \\ =1 & \text{se } \alpha^2=1, \text{ cioè } \alpha=\pm 1; \\ <1 & \text{se } \alpha^2-1<0, \text{ cioè se } -1<\alpha<1. \end{cases}$$

Pertanto, per $\alpha < -1$ e $\alpha > 1$, la serie proposta non converge né assolutamente né semplicemente, in quanto in tal caso il criterio fornisce l'informazione che il termine generale non è infinitesimo; per $-1 < \alpha < 1$, la serie proposta converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente. Infine, per $\alpha = \pm 1$, si ha $a_n \sim \frac{2}{n^2}$, quindi la serie converge assolutamente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

Esercizio 2

Ponendo $w = z^2$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $w^2 - 2w + 2 = 0$ che, utilizzando la formula risolutiva ridotta delle equazioni di secondo grado, conduce a $w = 1 + \sqrt{1-2} = 1 \pm i$. Pertanto,

$$z_{1,2} = \sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2}\sqrt{e^{\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{2}e^{\pi i/8}\,; \\ \sqrt[4]{2}e^{9\pi i/8}\,; \end{cases} \qquad z_{3,4} = \sqrt{1-i} = \sqrt[4]{2}\sqrt{e^{-\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{2}e^{-\pi i/8}\,; \\ \sqrt[4]{2}e^{7\pi i/8}\,. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili dove $g(x) := \frac{\log x^2}{x}$ ed $h(y) := \frac{[y^4-4]^2}{4y^3}$. Poiché $g \in \mathcal{C}^0(0,+\infty)$ e $h \in \mathcal{C}^1\big((-\infty,0)\cup(0,+\infty)\big)$, dal teorema di esistenza ed unicità in piccolo si ricava che esiste un intorno $I(1)$ del punto iniziale $x_0 = 1$ ed un'unica funzione $y \in \mathcal{C}^1\big(I(1)\big)$ soluzione del problema di Cauchy proposto, per ogni $\alpha \neq 0$.

Poiché $h(y) = 0$ per $y = \pm\sqrt{2}$, abbiamo due integrali singolari dati da $y(x) \equiv \sqrt{2}$ e $y(x) \equiv -\sqrt{2}$, che sono soluzioni (in tutto l'intervallo $(0,+\infty)$) del problema di Cauchy, rispettivamente, per $\alpha = \sqrt{2}$ e per $\alpha = -\sqrt{2}$.

Invece, per $\alpha \neq 0; \pm\sqrt{2}$, la soluzione del problema va cercata separando le variabili. In tal caso otteniamo

$$-\frac{1}{y^4(x)-4} = \int \frac{4y^3}{(y^4-4)^2}\,dy = 2\int \frac{\log x}{x}\,dx = \log^2 x + C \qquad \Longrightarrow \qquad y^4(x) = 4 - \frac{1}{\log^2 x + C}\,.$$

Imponenendo ora la condizione iniziale ricaviamo $\alpha^4 = 4 - 1/C$, da cui $C = 1/(4-\alpha^4)$. Quindi, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt[4]{4 - \frac{1}{\log^2 x + 1/(4-\alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{4(4-\alpha^4)\log^2 x + \alpha^4}{(4-\alpha^4)\log^2 x + 1}} \qquad \text{se } \alpha > 0 \text{ (e } \alpha \neq \sqrt{2});$$

$$y(x) = -\sqrt[4]{4 - \frac{1}{\log^2 x + 1/(4-\alpha^4)}} = -\sqrt[4]{\frac{4(4-\alpha^4)\log^2 x + \alpha^4}{(4-\alpha^4)\log^2 x + 1}} \qquad \text{se } \alpha < 0 \text{ (e } \alpha \neq -\sqrt{2}).$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è continua in $[0, 1/2) \cup (1/2, 1]$, quindi è integrabile in senso proprio in tutti gli insiemi della forma $[0, a] \cup [b, 1]$, con $0 < a < 1/2$ e $1/2 < b < 1$. Pertanto, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento della funzione per $x \to 1/2^{\pm}$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = \sqrt{|2x-1|}$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = |2x-1|^{1/4}$, otteniamo che, per $t \to 1/2^{\pm}$,

$$\begin{aligned}\frac{x(x^2+1)}{\mathrm{e}^{\sqrt{|2x-1|}} - \cos\left(|2x-1|^{1/4}\right)} &\sim \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+1\right)}{1 + \sqrt{|2x-1|} - 1 + \frac{1}{2}\left(|2x-1|^{1/4}\right)^2} \\ &= \frac{5/8}{(3/2)\sqrt{|2x-1|}} = \frac{5}{12\sqrt{2}}\,\frac{1}{|x-1/2|^{1/2}}\,.\end{aligned}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, possiamo concludere che, essendo $1/2 < 1$, l'integrale proposto converge.

Esercizio 5

L'affermazione $A)$ è vera poiché $\sin x^6 \sim x^6$ e, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.
L'affermazione $B)$ è falsa, poiché fra infiniti di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più alto, cioè in questo caso x^7.
L'affermazione $C)$ è falsa, basta considerare $x^8 = o(x^5)$ ed osservare che $x^7 + x^8 \sim x^7$, per $x \to 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.
L'affermazione $D)$ è falsa, basta considerare nuovamente $x^8 = o(x^6)$ ed osservare che $x^6 + x^8 \sim x^6$, per $x \to 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che la serie proposta è a termini di segno alterno. Studiamone dapprima la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice, si ha

$$a_n := (2+\alpha)^n n \sin\left(\frac{n+4}{n+2}\right) = (2+\alpha)^n n \sin\left(1+\frac{2}{n+2}\right) \sim (2+\alpha)^n n \sin 1\,.$$

Ricordando il limite notevole $\sqrt[n]{n} \to 1$, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(2+\alpha)^n n \sin 1} = \lim_{n\to+\infty} (2+\alpha)\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\sin 1} = (2+\alpha)\begin{cases} > 1 & \text{se } \alpha > -1; \\ = 1 & \text{se } \alpha = -1; \\ < 1 & \text{se } -2 \le \alpha < -1. \end{cases}$$

Pertanto, per $\alpha > -1$, la serie proposta non converge né assolutamente né semplicemente, in quanto in tal caso il criterio fornisce l'informazione che il termine generale non è infinitesimo; per $-2 \le \alpha < -1$, la serie proposta converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente. Infine, per $\alpha = -1$, si ha $a_n \sim n \sin 1 \to +\infty$, quindi la serie non converge né assolutamente né semplicemente poiché di nuovo il termine generale non è infinitesimo.

Esercizio 2

Ponendo $w = z^2$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $w^2 - 4w + 8 = 0$ che, utilizzando la formula risolutiva ridotta delle equazioni di secondo grado, conduce a $w = 2 + \sqrt{4-8} = 2 \pm 2i$. Pertanto,

$$z_{1,2} = \sqrt{2+2i} = \sqrt[4]{8}\sqrt{e^{\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{8}e^{\pi i/8}\,; \\ \sqrt[4]{8}e^{9\pi i/8}\,; \end{cases} \qquad z_{3,4} = \sqrt{2-2i} = \sqrt[4]{8}\sqrt{e^{-\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{8}e^{-\pi i/8}\,; \\ \sqrt[4]{8}e^{7\pi i/8}\,. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili dove $g(x) := \frac{\log^2(x+1)}{x+1}$ ed $h(y) := \frac{[y^2-4]^4}{2y}$. Poiché $g \in \mathcal{C}^0(-1,+\infty)$ e $h \in \mathcal{C}^1\big((-\infty,0)\cup(0,+\infty)\big)$, dal teorema di esistenza ed unicità in piccolo si ricava che esiste un intorno $I(0)$ del punto iniziale $x_0 = 0$ ed un'unica funzione $y \in \mathcal{C}^1\big(I(0)\big)$ soluzione del problema di Cauchy proposto, per ogni $\alpha \neq 0$.

Poiché $h(y) = 0$ per $y = \pm 2$, abbiamo due integrali singolari dati da $y(x) \equiv 2$ e $y(x) \equiv -2$, che sono soluzioni (in tutto l'intervallo $(-1,+\infty)$) del problema di Cauchy, rispettivamente, per $\alpha = 2$ e per $\alpha = -2$.

Invece, per $\alpha \neq 0; \pm 2$, la soluzione del problema va cercata separando le variabili. In tal caso otteniamo

$$-\frac{1}{3[y^2(x)-4]^3} = \int \frac{2y}{(y^2-4)^4}\,dy = \int \frac{\log^2(x+1)}{x+1}\,dx = \frac{\log^3(x+1)}{3} + C$$

$$\Longrightarrow \qquad y^2(x) = 4 - \frac{1}{\sqrt[3]{\log^3(x+1)+C}}\,.$$

Imponenendo ora la condizione iniziale ricaviamo $\alpha^2 = 4 - 1/\sqrt[3]{C}$, da cui $C = 1/(4-\alpha^2)^3$. Quindi, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt{4 - \frac{1}{\sqrt[3]{\log^3(x+1) + 1/(4-\alpha^2)^3}}} = \sqrt{4 - \frac{4-\alpha^2}{\sqrt[3]{(4-\alpha^2)^3\log^3(x+1)+1}}} \qquad \text{se } \alpha > 0 \text{ (e } \alpha \neq 2);$$

$$y(x) = -\sqrt{4 - \frac{1}{\sqrt[3]{\log^3(x+1) + 1/(4-\alpha^2)^3}}} = -\sqrt{4 - \frac{4-\alpha^2}{\sqrt[3]{(4-\alpha^2)^3\log^3(x+1)+1}}} \qquad \text{se } \alpha < 0 \text{ (e } \alpha \neq -2).$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è continua in $[-3/4, -1/2) \cup (-1/2, -1/4]$, quindi è integrabile in senso proprio in tutti gli insiemi della forma $[-3/4, a] \cup [b, -1/4]$, con $-3/4 < a < -1/2$ e $-1/2 < b < -1/4$. Pertanto, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento della funzione per $x \to -1/2^{\pm}$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = (4x+2)^4$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cosh t$, con $t = (4x+2)^2$, otteniamo che, per $t \to -1/2^{\pm}$,

$$\begin{aligned}\frac{(3x+2)(2x-1)}{\sqrt[3]{\cosh(4x+2)^2 + \sin(4x+2)^4 - 1}} &\sim \frac{\left(-\frac{3}{2}+2\right)(-1-1)}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{2}\left[(4x+2)^2\right]^2 + (4x+2)^4 - 1}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}(4x+2)^4}} = -\frac{1}{4\sqrt[3]{6}}\frac{1}{(x+1/2)^{\frac{4}{3}}}\,.\end{aligned}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, possiamo concludere che, essendo $4/3 \geq 1$, l'integrale proposto diverge.

Esercizio 5

L'affermazione $A)$ è falsa poiché $\log(1+x^6) \sim x^6$ e, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso, cioè in questo caso x^5.
L'affermazione $B)$ è vera, poiché fra infiniti di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più alto.
L'affermazione $C)$ è falsa, basta considerare $1/x^8 = o(1/x^5)$, per $x \to +\infty$, ed osservare che, per $x \to +\infty$, $1/x^7$ e $1/x^8$ sono infinitesimi, pertanto, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso, cioè in questo caso $1/x^7 = (1/x)^7$.
L'affermazione $D)$ è falsa, basta considerare $x^4 = o(x^3)$ ed osservare che $x^5 + x^4 \sim x^4$, per $x \to 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che la serie proposta è a termini di segno alterno. Studiamone dapprima la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice, si ha

$$a_n := \frac{1}{(\alpha-3)^n}\, n^2 \sin\left(\frac{n^3+5}{n^3+1}\right) = \frac{1}{(\alpha-3)^n}\, n^2 \sin\left(1+\frac{4}{n^3+1}\right) \sim \frac{1}{(\alpha-3)^n}\, n^2 \sin 1\,.$$

Ricordando il limite notevole $\sqrt[n]{n} \to 1$, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\alpha-3)^n}\, n^2 \sin 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\alpha-3)} (\sqrt[n]{n})^2 \sqrt[n]{\sin 1} = \frac{1}{(\alpha-3)} \begin{cases} >1 & \text{se } \alpha-3<1, \text{ cioè se } 3<\alpha<4; \\ =1 & \text{se } \alpha-3=1, \text{ cioè se } \alpha=4; \\ <1 & \text{se } \alpha-3>1, \text{ cioè se } \alpha>4. \end{cases}$$

Pertanto, per $3<\alpha<4$, la serie proposta non converge né assolutamente né semplicemente, in quanto in tal caso il criterio fornisce l'informazione che il termine generale non è infinitesimo; per $\alpha>4$, la serie proposta converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente. Infine, per $\alpha=4$, si ha $a_n \sim n^2 \sin 1 \to +\infty$, quindi la serie non converge né assolutamente né semplicemente poiché di nuovo il termine generale non è infinitesimo.

Esercizio 2

Ponendo $w=z^2$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $w^2+4w+8=0$ che, utilizzando la formula risolutiva ridotta delle equazioni di secondo grado, conduce a $w=-2+\sqrt{4-8}=-2\pm 2i$. Pertanto,

$$z_{1,2} = \sqrt{-2+2i} = \sqrt[4]{8}\sqrt{e^{3\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{8}e^{3\pi i/8}\,; \\ \sqrt[4]{8}e^{11\pi i/8}\,; \end{cases} \qquad z_{3,4} = \sqrt{-2-2i} = \sqrt[4]{8}\sqrt{e^{-3\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{8}e^{-3\pi i/8}\,; \\ \sqrt[4]{8}e^{5\pi i/8}\,. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili dove $g(x) := 2\frac{\log^3 x}{x}$ ed $h(y) := \frac{[y^2-3]^4}{y}$. Poiché $g \in \mathcal{C}^0(0,+\infty)$ e $h \in \mathcal{C}^1\big((-\infty,0)\cup(0,+\infty)\big)$, dal teorema di esistenza ed unicità in piccolo si ricava che esiste un intorno $I(1)$ del punto iniziale $x_0=1$ ed un'unica funzione $y \in \mathcal{C}^1\big(I(1)\big)$ soluzione del problema di Cauchy proposto, per ogni $\alpha \neq 0$.

Poiché $h(y)=0$ per $y=\pm\sqrt{3}$, abbiamo due integrali singolari dati da $y(x)\equiv\sqrt{3}$ e $y(x)\equiv-\sqrt{3}$, che sono soluzioni (in tutto l'intervallo $(0,+\infty)$) del problema di Cauchy, rispettivamente, per $\alpha=\sqrt{3}$ e per $\alpha=-\sqrt{3}$.

Invece, per $\alpha\neq 0; \pm\sqrt{3}$, la soluzione del problema va cercata separando le variabili. In tal caso otteniamo

$$-\frac{1}{6[y^2(x)-3]^3} = \int \frac{y}{(y^2-3)^4}\,dy = 2\int \frac{\log^3 x}{x}\,dx = \frac{\log^4 x}{2} + C \qquad \Longrightarrow \qquad y^2(x) = 3 - \sqrt[3]{\frac{1}{3\log^4 x + C}}\,.$$

Imponenendo ora la condizione iniziale ricaviamo $\alpha^2 = 3 - 1/\sqrt[3]{C}$, da cui $C = 1/(3-\alpha^2)^3$. Quindi, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt{3 - \frac{1}{\sqrt[3]{3\log^4 x + 1/(3-\alpha^2)^3}}} = \sqrt{3 - \frac{3-\alpha^2}{\sqrt[3]{3(3-\alpha^2)^3\log^4 x + 1}}} \qquad \text{se } \alpha>0 \text{ (e } \alpha\neq\sqrt{3});$$

$$y(x) = -\sqrt{3 - \frac{1}{\sqrt[3]{3\log^4 x + 1/(3-\alpha^2)^3}}} = -\sqrt{3 - \frac{3-\alpha^2}{\sqrt[3]{3(3-\alpha^2)^3\log^4 x) + 1}}} \quad \text{se } \alpha<0 \text{ (e } \alpha\neq-\sqrt{3}).$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è continua in $[-2/3, -1/3) \cup (-1/3, 0]$, quindi è integrabile in senso proprio in tutti gli insiemi della forma $[-2/3, a] \cup [b, 0]$, con $-2/3 < a < -1/3$ e $-1/3 < b < 0$. Pertanto, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento della funzione per $x \to -1/3^{\pm}$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = (3x+1)^2$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cosh t$, con $t = (3x+1)$, otteniamo che, per $t \to -1/3^{\pm}$,

$$\frac{(x-2)(2x+3)}{\sqrt{\cosh(3x+1) + \sin(3x+1)^2 - 1}} \sim \frac{\left(-\frac{1}{3} - 2\right)\left(-\frac{2}{3} + 3\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(3x+1)^2 + (3x+1)^2 - 1}}$$

$$= -\frac{49/9}{\sqrt{\frac{3}{2}(3x+1)^2}} = -\frac{49\sqrt{2}}{27\sqrt{3}} \frac{1}{|x+1/3|} .$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, possiamo concludere che, essendo $1 \geq 1$, l'integrale proposto diverge.

Esercizio 5

L'affermazione $A)$ è falsa poiché $\log(1+x^6) \sim x^6$ e, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso, cioè in questo caso x^5.
L'affermazione $B)$ è vera, poiché fra infiniti di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più alto.
L'affermazione $C)$ è falsa, basta considerare $1/x^8 = o(1/x^5)$, per $x \to +\infty$, ed osservare che, per $x \to +\infty$, $1/x^7$ e $1/x^8$ sono infinitesimi, pertanto, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso, cioè in questo caso $1/x^7 = (1/x)^7$.
L'affermazione $D)$ è falsa, basta considerare $x^4 = o(x^3)$ ed osservare che $x^5 + x^4 \sim x^4$, per $x \to 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che la serie proposta è a termini di segno alterno. Studiamone dapprima la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice e tenendo conto che $\log[1+1/(n^3+3)] \sim 1/(n^3+3)$, si ha

$$a_n := \log\left(\frac{n^3+4}{n^3+3}\right)\frac{1}{\mathrm{e}^{(\alpha^2-\alpha)n}} = \log\left(1+\frac{1}{n^3+3}\right)\frac{1}{\mathrm{e}^{(\alpha^2-\alpha)n}} \sim \frac{1}{n^3+3}\frac{1}{\mathrm{e}^{(\alpha^2-\alpha)n}} \sim \frac{1}{n^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{(\alpha^2-\alpha)n}}\,.$$

Ricordando il limite notevole $\sqrt[n]{n} \to 1$, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{(\alpha^2-\alpha)n}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{(\alpha^2-\alpha)}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{(\alpha^2-\alpha)}}\begin{cases} <1 & \text{se } \alpha^2-\alpha>0, \text{ cioè } \alpha<0 \text{ o } \alpha>1;\\ =1 & \text{se } \alpha^2-\alpha=0, \text{ cioè } \alpha=0;1;\\ >1 & \text{se } \alpha^2-\alpha<0, \text{ cioè se } 0<\alpha<1.\end{cases}$$

Pertanto, per $0<\alpha<1$, la serie proposta non converge né assolutamente né semplicemente, in quanto in tal caso il criterio fornisce l'informazione che il termine generale non è infinitesimo; per $\alpha<0$ e $\alpha>1$, la serie proposta converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente. Infine, per $\alpha=0;1$, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^3}$, quindi la serie converge assolutamente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3>1$.

Esercizio 2

Ponendo $w=z^2$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $w^2+2w+2=0$ che, utilizzando la formula risolutiva ridotta delle equazioni di secondo grado, conduce a $w=-1+\sqrt{1-2}=-1\pm i$. Pertanto,

$$z_{1,2}=\sqrt{-1+i}=\sqrt[4]{2}\sqrt{e^{3\pi i/4}}=\begin{cases}\sqrt[4]{2}e^{3\pi i/8}\,;\\ \sqrt[4]{2}e^{11\pi i/8}\,;\end{cases} \qquad z_{3,4}=\sqrt{-1-i}=\sqrt[4]{2}\sqrt{e^{-3\pi i/4}}=\begin{cases}\sqrt[4]{2}e^{-3\pi i/8}\,;\\ \sqrt[4]{2}e^{5\pi i/8}\,.\end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili dove $g(x) := \frac{\log(x+1)^3}{x+1}$ ed $h(y) := \frac{[y^4-1]^2}{2y^3}$. Poiché $g\in\mathcal{C}^0(-1,+\infty)$ e $h\in\mathcal{C}^1\big((-\infty,0)\cup(0,+\infty)\big)$, dal teorema di esistenza ed unicità in piccolo si ricava che esiste un intorno $I(0)$ del punto iniziale $x_0=0$ ed un'unica funzione $y\in\mathcal{C}^1\big(I(0)\big)$ soluzione del problema di Cauchy proposto, per ogni $\alpha\neq 0$.

Poiché $h(y)=0$ per $y=\pm 1$, abbiamo due integrali singolari dati da $y(x)\equiv 1$ e $y(x)\equiv -1$, che sono soluzioni (in tutto l'intervallo $(-1,+\infty)$) del problema di Cauchy, rispettivamente, per $\alpha=1$ e per $\alpha=-1$.

Invece, per $\alpha\neq 0;\pm 1$, la soluzione del problema va cercata separando le variabili. In tal caso otteniamo

$$-\frac{1}{2[y^4(x)-1]} = \int\frac{2y^3}{(y^4-1)^2}\,dy = 3\int\frac{\log(x+1)}{x+1}\,dx = \frac{3\log^2(x+1)}{2}+C$$
$$\Longrightarrow \qquad y^4(x) = 1-\frac{1}{3\log^2(x+1)+C}\,.$$

Imponenendo ora la condizione iniziale ricaviamo $\alpha^4 = 1-1/C$, da cui $C=1/(1-\alpha^4)$. Quindi, la soluzione cercata sarà

$$y(x)=\sqrt[4]{1-\frac{1}{3\log^2(x+1)+1/(1-\alpha^4)}}=\sqrt[4]{\frac{3(1-\alpha^4)\log^2(x+1)+\alpha^4}{3(1-\alpha^4)\log^2(x+1)+1}} \qquad \text{se } \alpha>0 \text{ (e } \alpha\neq 1);$$
$$y(x)=-\sqrt[4]{1-\frac{1}{3\log^2(x+1)+1/(1-\alpha^4)}}=-\sqrt[4]{\frac{3(1-\alpha^4)\log^2(x+1)+\alpha^4}{3(1-\alpha^4)\log^2(x+1)+1}} \qquad \text{se } \alpha<0 \text{ (e } \alpha\neq -1).$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è continua in $[0, 2/3) \cup (2/3, 1]$, quindi è integrabile in senso proprio in tutti gli insiemi della forma $[0, a] \cup [b, 1]$, con $0 < a < 2/3$ e $2/3 < b < 1$. Pertanto, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento della funzione per $x \to 2/3^{\pm}$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = (3x-2)^2$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 3x - 2$, otteniamo che, per $t \to 2/3^{\pm}$,

$$\frac{x^2(3x+1)}{[\mathrm{e}^{(3x-2)^2} - \cos(3x-2)]^{1/4}} \sim \frac{\frac{4}{9}\,(2+1)}{\left[1 + (3x-2)^2 - 1 + \frac{1}{2}\,(3x-2)^2\right]^{1/4}}$$

$$= \frac{4/3}{\sqrt[4]{(3/2)(3x-2)^2}} = \frac{4\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{27}}\,\frac{1}{|x - 2/3|^{1/2}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, possiamo concludere che, essendo $1/2 < 1$, l'integrale proposto converge.

Esercizio 5

L'affermazione $A)$ è vera poiché $\sin x^6 \sim x^6$ e, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.
L'affermazione $B)$ è falsa, poiché fra infiniti di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più alto, cioè in questo caso x^7.
L'affermazione $C)$ è falsa, basta considerare $x^8 = o(x^5)$ ed osservare che $x^7 + x^8 \sim x^7$, per $x \to 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.
L'affermazione $D)$ è falsa, basta considerare $x^5 = o(x^6)$ per $x \to +\infty$, ed osservare che $x^6 + x^5 \sim x^6$, per $x \to +\infty$, poiché, come detto prima, fra infiniti di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più alto.