SOLUZIONI COMPITO del 2/02/2012
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno dipendente dal parametro α, pertanto consideriamo direttamente la serie dei valori assoluti ed applichiamo il criterio della radice. Ricordando le proprietà delle potenze e il limite notevole $\sqrt[n]{n} \to 1$, otteniamo

$$\sqrt[n]{|a_n|} := \sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{(n+2)^{6\alpha-1}(2\alpha)^n}\right|} \sim \sqrt[n]{\left|\frac{3}{2\alpha}\right|^n} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{6\alpha-1} \to \left|\frac{3}{2\alpha}\right| \begin{cases} < 1 & \text{se } \alpha < -3/2 \text{ e } \alpha > 3/2, \\ > 1 & \text{se } -3/2 < \alpha < 3/2, \\ = 1 & \text{se } \alpha = \pm 3/2. \end{cases}$$

Pertanto, la serie proposta converge assolutamente per $\alpha < -3/2$ e $\alpha > 3/2$, mentre non converge per $-3/2 < \alpha < 3/2$. Invece, per $\alpha = \pm 3/2$ il criterio non dà alcuna informazione e quindi la serie va studiata in altro modo. Per $\alpha = 3/2$ la serie proposta si riscrive nella forma $\sum \frac{1}{(n+2)^8}$, che converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^8}$; per $\alpha = -3/2$ la serie proposta si riscrive nella forma $\sum (-1)^n (n+2)^{10}$, che non converge poiché il termine generale non è infinitesimo.

Esercizio 2

Ponendo $z = a + ib$ e richiedendo la condizione d'esistenza $z \neq 1$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma

$$\left|\mathrm{e}^{\frac{3a+3ib}{(a-1)+ib}}\right| = \mathrm{e}^4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{\frac{3a(a-1)+3b^2}{(a-1)^2+b^2}} = \mathrm{e}^4\,,$$

che fornisce $3a(a-1) + 3b^2 = 4(a-1)^2 + 4b^2$, ovvero $3a^2 - 3a + 3b^2 = 4a^2 - 8a + 4 + 4b^2$. Quest'ultima equazione si può riscrivere nella forma $(a - 5/2)^2 + b^2 = 9/4$, che rappresenta la circonferenza di centro $(5/2, 0)$ e raggio $3/2$, denotata con $C_{3/2}(5/2, 0)$. Tenendo conto della condizione d'esistenza avremo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione proposta è dato $C_{3/2}(5/2, 0) \setminus \{(1, 0)\}$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che può essere riscritta nella forma $y'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2\arctan(2x)+1}}{2+8x^2}\,\mathrm{e}^{-y(x)}$; ovvero essa risulta essere a variabili separabili e priva di soluzioni singolari. Poiché il secondo membro soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale della soluzione per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, avremo che la soluzione del problema proposto si ottiene per separazione di variabili. Otteniamo

$$\mathrm{e}^y = \int \mathrm{e}^y\,dy = \int \frac{\mathrm{e}^{2\arctan(2x)+1}}{2+8x^2}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{2\arctan(2x)+1}}{8} + C \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \log\left(\frac{\mathrm{e}^{2\arctan(2x)+1}}{8} + C\right).$$

Imponendo la condizione iniziale, ricaviamo $\log\left(\frac{\mathrm{e}}{8}\right) = 1 - \log 8 = y(0) = \log\left(\frac{\mathrm{e}}{8} + C\right)$, che fornisce $C = 0$. Quindi la soluzione richiesta è

$$y(x) = \log\left(\frac{\mathrm{e}^{2\arctan(2x)+1}}{8}\right).$$

Esercizio 4

Il campo d'esistenza della funzione proposta si ottiene imponendo le condizioni

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x \neq 0\,, \\ \left|\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x}\right| \leq 1\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 2) \neq 0\,, \\ \left|\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x\right| \geq 1\,. \end{cases}$$

La prima condizione conduce a $\mathrm{e}^x \neq 2$, ovvero $x \neq \log 2$, mentre, effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^x$, dalla seconda otteniamo

- $t^2 - 2t - 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \leq 1 - \sqrt{2}$ e $t \geq 1 + \sqrt{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^x \geq 1 + \sqrt{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq \log(1 + \sqrt{2})\,,$
- $t^2 - 2t + 1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0\,.$

Tenendo conto che $0 < \log 2 < \log(1 + \sqrt{2})$, si ricava

$$D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq \log(1 + \sqrt{2})\} \cup \{0\}\,.$$

Esercizio 5

a) L'affermazione è falsa, basta considerare la funzione $f(x) = 1$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, che è discontinua in $x = 0$.

b) L'affermazione è vera, poiché per definizione di funzione continua nel punto $x = 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \overset{\text{per ipotesi}}{=} 0\,.$$

c) L'affermazione è falsa, basta considerare la funzione del punto *a*) che, essendo discontinua in $x = 0$, non può essere neppure derivabile in tale punto.

d) L'affermazione è falsa, basta considerare la funzione $f(x) = x$, che vale 0 nell'origine ed è ivi derivabile con $f'(0) = 1$.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno dipendente dal parametro α, pertanto consideriamo direttamente la serie dei valori assoluti ed applichiamo il criterio della radice. Ricordando le proprietà delle potenze e il limite notevole $\sqrt[n]{n} \to 1$, otteniamo

$$\sqrt[n]{|a_n|} := \sqrt[n]{\left|\frac{(-5)^n}{(n^2+2)^{3\alpha-1}(6\alpha)^n}\right|} \sim \sqrt[n]{\left|\frac{-5}{6\alpha}\right|^n} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}\right)^{3\alpha-1} \to \left|\frac{-5}{6\alpha}\right| \begin{cases} < 1 & \text{se } \alpha < -5/6 \text{ e } \alpha > 5/6, \\ > 1 & \text{se } -5/6 < \alpha < 5/6, \\ = 1 & \text{se } \alpha = \pm 5/6. \end{cases}$$

Pertanto, la serie proposta converge assolutamente per $\alpha < -5/6$ e $\alpha > 5/6$, mentre non converge per $-5/6 < \alpha < 5/6$. Invece, per $\alpha = \pm 5/6$ il criterio non dà alcuna informazione e quindi la serie va studiata in altro modo. Per $\alpha = 5/6$ la serie proposta si riscrive nella forma $\sum \frac{(-1)^n}{(n^2+2)^{3/2}}$, che converge assolutamente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^3}$; per $\alpha = -5/6$ la serie proposta si riscrive nella forma $\sum (n^2+2)^{7/2}$, che non converge poiché il termine generale non è infinitesimo.

Esercizio 2

Ponendo $z = a + ib$ e richiedendo la condizione d'esistenza $z \neq 0$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma

$$\left|\mathrm{e}^{\frac{a+i(b+1)}{2a+2ib}}\right| = \mathrm{e} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{\frac{a^2+b(b+1)}{2a^2+2b^2}} = \mathrm{e}\,,$$

che fornisce $a^2 + b(b+1) = 2a^2 + 2b^2$, ovvero $a^2 + b^2 + b = 2a^2 + 2b^2$. Quest'ultima equazione si può riscrivere nella forma $a^2 + (b - 1/2)^2 = 1/4$, che rappresenta la circonferenza di centro $(0, 1/2)$ e raggio $1/2$, denotata con $C_{1/2}(0, 1/2)$. Tenendo conto della condizione d'esistenza avremo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione proposta è dato $C_{1/2}(0, 1/2) \setminus \{(0, 0)\}$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che può essere riscritta nella forma $y'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\arctan x+1}}{2+2x^2} \frac{\mathrm{e}^{-y^2(x)}}{2y(x)}$; ovvero essa risulta essere a variabili separabili e priva di soluzioni singolari. Poiché il secondo membro soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale della soluzione per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, avremo che la soluzione del problema proposto si ottiene per separazione di variabili. Otteniamo

$$\mathrm{e}^{y^2} = \int 2y\mathrm{e}^{y^2}\, dy = \int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x+1}}{2+2x^2}\, dx = \frac{\mathrm{e}^{\arctan x+1}}{2} + C \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt{\log\left(\frac{\mathrm{e}^{\arctan x+1}}{2} + C\right)}.$$

Imponendo la condizione iniziale, ricaviamo $\sqrt{\log\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)} = \sqrt{1 - \log 2} = y(0) = \sqrt{\log\left(\frac{\mathrm{e}}{2} + C\right)}$, che fornisce $C = 0$. Quindi la soluzione richiesta è

$$y(x) = \sqrt{\log\left(\frac{\mathrm{e}^{\arctan x+1}}{2}\right)}.$$

Esercizio 4

Il campo d'esistenza della funzione proposta si ottiene imponendo le condizioni

$$\begin{cases} x \neq 0\,, \\ \left|\mathrm{e}^{6/x} - 2\mathrm{e}^{3/x}\right| \leq 1\,. \end{cases}$$

Effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^{3/x}$, dalla seconda condizione otteniamo

- $t^2 - 2t - 1 \leq 0 \iff 1 - \sqrt{2} \leq t \leq 1 + \sqrt{2} \iff \mathrm{e}^{3/x} \leq 1 + \sqrt{2} \iff \dfrac{3}{x} \leq \log(1 + \sqrt{2})\,,$
- $t^2 - 2t + 1 \geq 0 \iff \forall t \in \mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$

Tenendo conto che $\log(1+\sqrt{2}) > 0$, la prima disequazione è sempre verificata per $x < 0$, mentre per $x > 0$ conduce a $x \geq \frac{3}{\log(1+\sqrt{2})}$. Pertanto, si ricava

$$D = (-\infty, 0) \cup \left[\frac{3}{\log(1+\sqrt{2})}, +\infty\right) .$$

Esercizio 5

a) L'affermazione è vera, poiché la derivabilità in $x = 0$ implica la continuità in tale punto.

b) L'affermazione è falsa, basta considerare la funzione $f(x) = 2x + 1$, che non è infinitesima per $x \to 0$.

c) L'affermazione è vera, come conseguenza dello sviluppo di Mc Laurin in $x = 0$, che fornisce

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = f(0) + 2x + o(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) - f(0) \sim 2x\,.$$

d) L'affermazione è falsa poiché, essendo f discontinua in $x = 0$, essa non può essere ivi derivabile (e per di più con derivata pari a 2).

TEMA C

Esercizio 1
Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno dipendente dal parametro α, pertanto consideriamo direttamente la serie dei valori assoluti ed applichiamo il criterio della radice. Ricordando le proprietà delle potenze e il limite notevole $\sqrt[n]{n} \to 1$, otteniamo

$$\sqrt[n]{|a_n|} := \sqrt[n]{\left|\frac{(5\alpha)^n}{6^n(n+3)^{1-\alpha}}\right|} \sim \sqrt[n]{\left|\frac{5\alpha}{6}\right|^n} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{1-\alpha} \to \left|\frac{5\alpha}{6}\right| \begin{cases} > 1 & \text{se } \alpha < -6/5 \text{ e } \alpha > 6/5, \\ < 1 & \text{se } -6/5 < \alpha < 6/5, \\ = 1 & \text{se } \alpha = \pm 6/5. \end{cases}$$

Pertanto, la serie proposta converge assolutamente per $-6/5 < \alpha < 6/5$, mentre non converge per $\alpha < -6/5$ e $\alpha > 6/5$. Invece, per $\alpha = \pm 6/5$ il criterio non dà alcuna informazione e quindi la serie va studiata in altro modo. Per $\alpha = 6/5$ la serie proposta si riscrive nella forma $\sum (n+3)^{1/5}$, che non converge poiché il termine generale non è infinitesimo; per $\alpha = -6/5$ la serie proposta si riscrive nella forma $\sum \frac{(-1)^n}{(n+3)^{11/5}}$, che converge assolutamente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^{11/5}}$.

Esercizio 2
Ponendo $z = a + ib$ e richiedendo la condizione d'esistenza $z \neq 0$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma

$$\left|e^{\frac{2a+2i(b-1)}{a+ib}}\right| = e^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{\frac{2a^2+2b(b-1)}{a^2+b^2}} = e^3 \,,$$

che fornisce $a^2 + b(b+1) = 2a^2 + 2b^2$, ovvero $2a^2 + 2b^2 - 2b = 3a^2 + 3b^2$. Quest'ultima equazione si può riscrivere nella forma $a^2 + (b+1)^2 = 1$, che rappresenta la circonferenza di centro $(0, -1)$ e raggio 1, denotata con $C_1(0, -1)$. Tenendo conto della condizione d'esistenza avremo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione proposta è dato $C_1(0, -1) \setminus \{(0, 0)\}$.

Esercizio 3
Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che può essere riscritta nella forma $y'(x) = -\frac{e^{3\arctan x+2}}{3+3x^2}\frac{e^{y^2(x)}}{2y(x)}$; ovvero essa risulta essere a variabili separabili e priva di soluzioni singolari. Poiché il secondo membro soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale della soluzione per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, avremo che la soluzione del problema proposto si ottiene per separazione di variabili. Otteniamo

$$-e^{-y^2} = \int 2ye^{-y^2}\,dy = -\int \frac{e^{3\arctan x+2}}{3+3x^2}\,dx = -\frac{e^{3\arctan x+2}}{9} + C \implies y(x) = \sqrt{-\log\left(\frac{e^{3\arctan x+2}}{9} - C\right)}.$$

Imponendo la condizione iniziale, ricaviamo $\sqrt{-\log\left(\frac{e^2}{9}\right)} = \sqrt{\log 9 - 2} = y(0) = \sqrt{-\log\left(\frac{e^2}{9} - C\right)}$, che fornisce $C = 0$. Quindi la soluzione richiesta è

$$y(x) = \sqrt{-\log\left(\frac{e^{3\arctan x+2}}{9}\right)}.$$

Esercizio 4
Il campo d'esistenza della funzione proposta si ottiene imponendo le condizioni

$$\begin{cases} x \neq 0\,, \\ \left|e^{2/x} - 2e^{1/x}\right| \leq 1\,. \end{cases}$$

Effettuando la sostituzione $t = e^{1/x}$, dalla seconda condizione otteniamo

- $t^2 - 2t - 1 \leq 0 \iff 1 - \sqrt{2} \leq t \leq 1 + \sqrt{2} \iff e^{1/x} \leq 1 + \sqrt{2} \iff \dfrac{1}{x} \leq \log(1 + \sqrt{2})\,,$
- $t^2 - 2t + 1 \geq 0 \iff \forall t \in \mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$

Tenendo conto che $\log(1+\sqrt{2}) > 0$, la prima disequazione è sempre verificata per $x < 0$, mentre per $x > 0$ conduce a $x \geq \frac{1}{\log(1+\sqrt{2})}$. Pertanto, si ricava

$$D = (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{\log(1+\sqrt{2})}, +\infty\right) .$$

Esercizio 5

a) L'affermazione è vera, come conseguenza dello sviluppo di Mc Laurin in $x = 0$, che fornisce

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = f(0) + 2x + o(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) - f(0) \sim 2x\,.$$

b) L'affermazione è falsa poiché, essendo f discontinua in $x = 0$, essa non può essere ivi derivabile (e per di più con derivata pari a 2).

c) L'affermazione è falsa, basta considerare la funzione $f(x) = 2x + 1$, che non è infinitesima per $x \to 0$.

d) L'affermazione è vera, poiché la derivabilità in $x = 0$ implica la continuità in tale punto.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno dipendente dal parametro α, pertanto consideriamo direttamente la serie dei valori assoluti ed applichiamo il criterio della radice. Ricordando le proprietà delle potenze e il limite notevole $\sqrt[n]{n} \to 1$, otteniamo

$$\sqrt[n]{|a_n|} := \sqrt[n]{\left|\frac{(-3\alpha)^n}{2^n(n^2+1)^{1-3\alpha}}\right|} \sim \sqrt[n]{\left|\frac{-3\alpha}{2}\right|^n} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{2-6\alpha} \to \left|\frac{-3\alpha}{2}\right| \begin{cases} > 1 & \text{se } \alpha < -2/3 \text{ e } \alpha > 2/3, \\ < 1 & \text{se } -2/3 < \alpha < 2/3, \\ = 1 & \text{se } \alpha = \pm 2/3. \end{cases}$$

Pertanto, la serie proposta converge assolutamente per $-2/3 < \alpha < 2/3$, mentre non converge per $\alpha < -2/3$ e $\alpha > 2/3$. Invece, per $\alpha = \pm 2/3$ il criterio non dà alcuna informazione e quindi la serie va studiata in altro modo. Per $\alpha = 2/3$ la serie proposta si riscrive nella forma $\sum (-1)^n (n^2+1)$, che non converge poiché il termine generale non è infinitesimo; per $\alpha = -2/3$ la serie proposta si riscrive nella forma $\sum \frac{1}{(n^2+1)^3}$, che converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^6}$.

Esercizio 2

Ponendo $z = a + ib$ e richiedendo la condizione d'esistenza $z \neq -1$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma

$$\left|\mathrm{e}^{\frac{4a+4ib}{(a+1)+ib}}\right| = \mathrm{e}^5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{\frac{4a(a+1)+4b^2}{(a+1)^2+b^2}} = \mathrm{e}^5\,,$$

che fornisce $4a(a+1) + 4b^2 = 5(a+1)^2 + 5b^2$, ovvero $4a^2 + 4a + 4b^2 = 5a^2 + 10a + 5 + 5b^2$. Quest'ultima equazione si può riscrivere nella forma $(a+3)^2 + b^2 = 4$, che rappresenta la circonferenza di centro $(-3,0)$ e raggio 2, denotata con $C_2(-3,0)$. Tenendo conto della condizione d'esistenza avremo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione proposta è dato $C_2(-3,0) \setminus \{(-1,0)\}$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che può essere riscritta nella forma $y'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{\arctan(2x)+2}}{3+12x^2}\,\mathrm{e}^{y(x)}$; ovvero essa risulta essere a variabili separabili e priva di soluzioni singolari. Poiché il secondo membro soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale della soluzione per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, avremo che la soluzione del problema proposto si ottiene per separazione di variabili. Otteniamo

$$-\mathrm{e}^{-y} = \int \mathrm{e}^{-y}\,dy = -\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan(2x)+2}}{3+12x^2}\,dx = -\frac{\mathrm{e}^{\arctan(2x)+2}}{6} + C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = -\log\left(\frac{\mathrm{e}^{\arctan(2x)+2}}{6} - C\right).$$

Imponendo la condizione iniziale, ricaviamo $-\log\left(\frac{\mathrm{e}^2}{6}\right) = \log 6 - 2 = y(0) = -\log\left(\frac{\mathrm{e}^2}{6} - C\right)$, che fornisce $C = 0$. Quindi la soluzione richiesta è

$$y(x) = -\log\left(\frac{\mathrm{e}^{\arctan(2x)+2}}{6}\right).$$

Esercizio 4

Il campo d'esistenza della funzione proposta si ottiene imponendo le condizioni

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{6x} - 2\mathrm{e}^{3x} \neq 0\,, \\ \left|\dfrac{1}{\mathrm{e}^{6x} - 2\mathrm{e}^{3x}}\right| \leq 1\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathrm{e}^{3x}(\mathrm{e}^{3x} - 2) \neq 0\,, \\ \left|\mathrm{e}^{6x} - 2\mathrm{e}^{3x}\right| \geq 1\,. \end{cases}$$

La prima condizione conduce a $\mathrm{e}^{3x} \neq 2$, ovvero $x \neq (\log 2)/3$, mentre, effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^{3x}$, dalla seconda otteniamo

- $t^2 - 2t - 1 \geq 0 \iff t \leq 1 - \sqrt{2}$ e $t \geq 1 + \sqrt{2} \iff \mathrm{e}^{3x} \geq 1 + \sqrt{2} \iff x \geq \dfrac{1}{3}\log(1+\sqrt{2})\,,$
- $t^2 - 2t + 1 \leq 0 \iff t = 1 \iff \mathrm{e}^{3x} = 1 \iff x = 0\,.$

Tenendo conto che $0 < (\log 2)/3 < \frac{1}{3}\log(1+\sqrt{2})$, si ricava

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \;:\; x \geq \frac{1}{3}\log(1+\sqrt{2})\right\} \cup \{0\}\,.$$

Esercizio 5

a) L'affermazione è falsa, basta considerare la funzione $f(x) = x$, che vale 0 nell'origine ed è ivi derivabile con $f'(0) = 1$.

b) L'affermazione è falsa, basta considerare la funzione del punto *c*) che, essendo discontinua in $x = 0$, non può essere neppure derivabile in tale punto.

c) L'affermazione è falsa, basta considerare la funzione $f(x) = 1$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, che è discontinua in $x = 0$.

d) L'affermazione è vera, poiché per definizione di funzione continua nel punto $x = 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \overset{\text{per ipotesi}}{=} 0\,.$$