SOLUZIONI APPELLO del 03/07/2015
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Innanzitutto, osserviamo che per $2x-1<0$, cioè $x<1/2$, il termine generale $\frac{e^{-n(2x-1)}}{\sqrt[4]{n}} \to +\infty \neq 0$, quindi la serie proposta non converge, in quanto non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza. Invece, per $2x-1>0$, cioè $x>1/2$, utilizzando il criterio della radice, si ricava

$$\sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{e^{-n(2x-1)}}{\sqrt[4]{n}}\right|} = \sqrt[n]{\frac{e^{-n(2x-1)}}{\sqrt[4]{n}}} = \frac{e^{-(2x-1)}}{\sqrt[4n]{n}} \to e^{-(2x-1)} < 1\,,$$

e quindi la serie proposta converge assolutamente. Infine, per $2x-1=0$, cioè $x=1/2$, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\,,$$

che converge semplicemente, ma non assolutamente, grazie al Criterio di Leibniz.

Esercizio 2

Innanzitutto osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione integranda è continua e non negativa in $[1/2,1)$; pertanto, al fine di stablire se l'integrale improprio proposto converge, dobbiamo studiare il comportamento di f solo per $x \to 1^-$. Ricordando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$ con $t = 1-x$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{2\alpha-1}\,|\log(1-x)|^{3\alpha-2}} = \frac{1}{t^{2\alpha-1}\,|\log t|^{3\alpha-2}} \qquad \text{dove } t=1-x \to 0^+ \text{ per } x \to 1^-$$

che, per confronto con la funzione di Abel, risulta essere convergente per $2\alpha-1<1$, cioè per $\alpha<1$. Invece, per $\alpha>1$, l'integrale proposto è divergente, cosiccome per $\alpha=1$, poiché in quest'ultimo caso abbiamo $p=1$ e $q=3\alpha-2=1$.

Esercizio 3

Osserviamo che l'equazione differenziale associata al problema di Cauchy proposto è un'equazione del primo ordine a variabili separabili che ha come soluzioni singolari $y(x)\equiv 0$ e $y(x)\equiv -3$. Esse saranno, rispettivamente, la soluzione cercata per $\lambda=0$ e quella per $\lambda=-3$. Invece, per $\lambda \neq 0; -3$, procediamo con la separazione delle variabili, ottenendo

$$\frac{1}{3}\log\left|\frac{y(x)}{y(x)+3}\right| = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y} - \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y+3} = \int \frac{dy}{y(y+3)} = \int dx = x + C\,,$$

dove è stato utilizzato l'usuale metodo di decomposizione dei fratti semplici per integrare la funzione razionale fratta $\frac{1}{y(y+3)}$. Esplicitando la funzione $y(x)$, otteniamo

$$\frac{y(x)}{y(x)+3} = Ke^{3x} \quad\Longrightarrow\quad y(x)[1-Ke^{3x}] = 3Ke^{3x} \quad\Longrightarrow\quad y(x) = \frac{3Ke^{3x}}{1-Ke^{3x}}\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, si ricava

$$\lambda = y(0) = \frac{3K}{1-K} \quad\Longrightarrow\quad K(3+\lambda) = \lambda \quad\Longrightarrow\quad K = \frac{\lambda}{3+\lambda}\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = \frac{3\frac{\lambda}{3+\lambda}e^{3x}}{1-\frac{\lambda}{3+\lambda}e^{3x}} = \frac{3\lambda e^{3x}}{3+\lambda-\lambda e^{3x}}\,.$$

Concludiamo osservando che per $\lambda = 0; -3$, sostituendo nella precedente espressione, riotteniamo le soluzioni singolari trovate all'inizio.

Esercizio 4

Ricordando che

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) ,$$

$$\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) ,$$

$$\exp(\frac{1}{2x^2}) = 1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) ,$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} = 1 - \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) ,$$

otteniamo

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + 1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{8x^4} - 1 + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) = -\frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) .$$

Pertanto, l'ordine di infinitesimo di f rispetto all'infinitesimo campione $1/x$, per $x \to +\infty$, è pari a 4.

Esercizio 5

Le affermazioni $B)$ e $C)$ sono corrette. Infatti, poiché $\sum a_n^2 < +\infty$, in particolare $a_n \to 0$, per cui $\sqrt{1+|a_n|} \to 1 \neq 0$, mentre, almeno definitivamente, $a_n^2(1+|a_n|) \leq 2a_n^2$. Quindi in $B)$ il termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza e conseguentemente $\sum \sqrt{1+|a_n|} = +\infty$, mentre per la $C)$ si ha che la convergenza è conseguenza del criterio del confronto.
Le affermazioni $A)$ e $D)$, invece, sono false. Infatti, per la $A)$ è sufficiente considerare, ad esempio, $a_n = \frac{1}{n^2}$; in tal caso, le ipotesi sono verificate, ma $\sum \sqrt{|a_n|} = \sum 1/n^2 < +\infty$. Invece, per la $D)$ è sufficiente osservare che $\frac{2+a_n}{3+a_n} \to 2/3 \neq 0$ e quindi il termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

TEMA B

Esercizio 1

Innanzitutto, osserviamo che per $x+2<0$, cioè $x<-2$, il termine generale $\frac{e^{-n(x+2)}}{\sqrt{n}} \to +\infty \neq 0$, quindi la serie proposta non converge, in quanto non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza. Invece, per $x+2>0$, cioè $x>-2$, utilizzando il criterio della radice, si ricava

$$\sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{e^{-n(x+2)}}{\sqrt{n}}\right|} = \sqrt[n]{\frac{e^{-n(x+2)}}{\sqrt{n}}} = \frac{e^{-(x+2)}}{\sqrt[2n]{n}} \to e^{-(x+2)} < 1\,,$$

e quindi la serie proposta converge assolutamente. Infine, per $x+2=0$, cioè $x=-2$, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$

che converge semplicemente, ma non assolutamente, grazie al Criterio di Leibniz.

Esercizio 2

Innanzitutto osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione integranda è continua e non negativa in $(1, 3/2]$; pertanto, al fine di stablire se l'integrale improprio proposto converge, dobbiamo studiare il comportamento di f solo per $x \to 1^+$. Ricordando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$ con $t = 2x-2$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{1}{(2x-2)^{\alpha-3} \left|\log(x-1)\right|^{\alpha/2-1}} = \frac{1}{2^{\alpha-3} t^{\alpha-3} \left|\log t\right|^{\alpha/2-1}} \qquad \text{dove } t = x-1 \to 0^+ \text{ per } x \to 1^+$$

che, per confronto con la funzione di Abel, risulta essere convergente per $\alpha - 3 < 1$, cioè per $\alpha < 4$. Invece, per $\alpha > 4$, l'integrale proposto è divergente, cosiccome per $\alpha = 4$, poiché in quest'ultimo caso abbiamo $p = 1$ e $q = \alpha/2 - 1 = 1$.

Esercizio 3

Osserviamo che l'equazione differenziale associata al problema di Cauchy proposto è un'equazione del primo ordine a variabili separabili che ha come soluzioni singolari $y(x) \equiv 0$ e $y(x) \equiv -4$. Esse saranno, rispettivamente, la soluzione cercata per $\lambda = 0$ e quella per $\lambda = -4$. Invece, per $\lambda \neq 0; -4$, procediamo con la separazione delle variabili, ottenendo

$$\frac{1}{4} \log \left|\frac{y(x)}{4+y(x)}\right| = \frac{1}{4} \int \frac{dy}{y} - \frac{1}{4} \int \frac{dy}{4+y} = \int \frac{dy}{y(4+y)} = -\int dx = -x + C\,,$$

dove è stato utilizzato l'usuale metodo di decomposizione dei fratti semplici per integrare la funzione razionale fratta $\frac{1}{y(4+y)}$. Esplicitando la funzione $y(x)$, otteniamo

$$\frac{y(x)}{4+y(x)} = K e^{-4x} \quad \Longrightarrow \quad y(x)[1 - K e^{-4x}] = 4K e^{-4x} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{4K e^{-4x}}{1 - K e^{-4x}}\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, si ricava

$$\lambda = y(0) = \frac{4K}{1-K} \quad \Longrightarrow \quad K(4+\lambda) = \lambda \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{\lambda}{4+\lambda}\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = \frac{4 \frac{\lambda}{4+\lambda} e^{-4x}}{1 - \frac{\lambda}{4+\lambda} e^{-4x}} = \frac{4\lambda e^{-4x}}{4 + \lambda - \lambda e^{-4x}}\,.$$

Concludiamo osservando che per $\lambda = 0; -4$, sostituendo nella precedente espressione, riotteniamo le soluzioni singolari trovate all'inizio.

Esercizio 4
Ricordando che

$$
\begin{aligned}
2\sin\frac{1}{2x} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{24x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) ,\\
\log\left(1-\frac{1}{2x^2}\right) &= -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) ,\\
\exp(-\frac{1}{x}) &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{24x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) ,\\
\sqrt[3]{1-\frac{5}{8x^3}} &= 1 - \frac{5}{24x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) ,
\end{aligned}
$$

otteniamo

$$
f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{24x^3} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{8x^4} + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{24x^4} - 1 + \frac{5}{24x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{1}{6x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) .
$$

Pertanto, l'ordine di infinitesimo di f rispetto all'infinitesimo campione $1/x$, per $x \to +\infty$, è pari a 4.

Esercizio 5
Le affermazioni A) e C) sono corrette, infatti, poiché $\sum |a_n| < +\infty$, in particolare $a_n \to 0$ e quindi, almeno definitivamente, $a_n^2 \le |a_n|$ e $\left|\frac{a_n}{1+|a_n|}\right| \le |a_n|$; quindi la convergenza è conseguenza del criterio del confronto. Le affermazioni B) e D), invece, sono false. Infatti, per la B) è sufficiente considerare, ad esempio, $a_n = \frac{1}{n^2}$; in tal caso, le ipotesi sono verificate, ma $\sum \sqrt{|a_n|} = \sum 1/n = +\infty$. Invece, per la D) è sufficiente osservare che $\frac{1+a_n}{2+a_n} \to 1/2 \ne 0$ e quindi il termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.