ANALISI I (h. 2.30) Appello del **4 Luglio 2012**	**9 CFU - TEMA A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Energetica

1. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0\,.$$

Indicate, inoltre, con z_1, z_2 le soluzioni della precedente equazione, calcolare $\sqrt{z_1^5}$ e $\sqrt{z_2^5}$ ed esprimere il risultato in forma algebrica.

---

2. Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione

$$f(x) = 1 + \sin(2x^{2/3}) - \cos\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right) - 2x^{2/3}\,.$$

---

3. Determinare, al variare del parametro reale λ , la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) - 1\,, \\ y(0) = \lambda\,. \end{cases}$$

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \sin x\,.$$

Determinare gli eventuali estremanti relativi e assoluti in $[0, 2\pi]$.

---

5. Supponiamo che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano due successioni di numeri positivi tali che $a_n \sim n^2$ e $b_n \sim \frac{1}{n}$. Stabilire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono corrette

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)$ converge; $b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + a_n b_n}$ converge;

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n b_n}{1 + b_n a_n}$ diverge; $d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n b_n^2}{1 + a_n^2 b_n}$ diverge.

Fornire un controesempio per quelle false.

ANALISI I (h. 2.30)	**9 CFU - TEMA B**
Appello del	Cognome e nome (in stampatello)
4 Luglio 2012	Corso di laurea in Ingegneria Energetica

1. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^2 + 2\sqrt{3}iz - 4 = 0 \,.$$

Indicate, inoltre, con z_1, z_2 le soluzioni della precedente equazione, calcolare $\sqrt{z_1^3}$ e $\sqrt{z_2^3}$ ed esprimere il risultato in forma algebrica.

---

2. Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione

$$f(x) = 1 - \cos(2x^{2/5}) + \sin(\sqrt[3]{12}\, x^{4/15}) - \sqrt[3]{12} x^{4/15} \,.$$

---

3. Determinare, al variare del parametro reale λ, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - 4y^2(x)\,, \\ y(0) = \lambda\,. \end{cases}$$

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \cos x \,.$$

Determinare gli eventuali estremanti relativi e assoluti in $[0, 2\pi]$.

---

5. Supponiamo che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano due successioni di numeri positivi tali che $a_n \sim n^2$ e $b_n \sim \frac{1}{n}$. Stabilire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono corrette

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n b_n^2}{1 + a_n^2 b_n}$ diverge; $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n b_n}{1 + b_n a_n}$ diverge;

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)$ converge; $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + a_n b_n}$ converge.

Fornire un controesempio per quelle false.