SOLUZIONI COMPITO del 4/07/2012
ANALISI MATEMATICA I - 10 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1
Utilizzando il teorema di riduzione degli integrali doppi, otteniamo

$$\iint_E \log(x+1)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\log(x+1)\int_0^{x^2} dy\right) dx = \int_0^1 x^2 \log(x+1)\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\log(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3+1-1}{x+1}\,dx$$
$$= \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1}\,dx = \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{3}\left(\int_0^1 (x^2-x+1)\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx\right)$$
$$= \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\log(x+1)\Big|_0^1 = \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{\log 2}{3} = \frac{2}{3}\log 2 - \frac{5}{18}\,.$$

Esercizio 2
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quinto ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 2x^{2/3}$, dato da

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^6) = 2x^{2/3} - \frac{1}{3!}(2x^{2/3})^3 + \frac{1}{5!}(2x^{2/3})^5 + o\big((2x^{2/3})^6\big)$$
$$= 2x^{2/3} - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{15}x^{10/3} + o(x^4)\,,$$

e quello al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 2\sqrt{2}x/\sqrt{3}$, dato da

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^5) = 1 - \frac{1}{2!}(2\sqrt{2}x/\sqrt{3})^2 + \frac{1}{4!}(2\sqrt{2}x/\sqrt{3})^4 + o\big((2\sqrt{2}x/\sqrt{3})^5\big)$$
$$= 1 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{27}x^4 + o(x^5)\,,$$

per $x \to 0^+$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin(2x^{2/3}) - \cos\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right) - 2x^{2/3}}{\log(1+x^{10/3})}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2x^{2/3} - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{15}x^{10/3} + o(x^4) - 1 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{27}x^4 + o(x^5) - 2x^{2/3}}{\log(1+x^{10/3})}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{15}x^{10/3} - \frac{8}{27}x^4 + o(x^4)}{x^{10/3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{15}x^{10/3}}{x^{10/3}} = \frac{4}{15}\,,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato anche lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = x^{10/3}$.

Esercizio 3
Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $3\lambda^2 - 18\lambda + 24 = 0$, che ha per soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$. Utilizzando il metodo di somiglianza e tenendo conto che $\lambda = 2$ è soluzione dell'equazione caratteristica,

ricaviamo che una soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Axe^{2x}$, da cui $y'(x) = 2Axe^{2x} + Ae^{2x}$ e $y''(x) = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$. Sostituendo nell'equazione proposta, otteniamo

$$\begin{aligned} 12Axe^{2x} + 12Ae^{2x} - 36Axe^{2x} - 18Ae^{2x} + 24Axe^{2x} = 12e^{2x} \qquad &\Longrightarrow \qquad -6Ae^{2x} = 12e^{2x} \\ A = -2 \qquad &\Longrightarrow \qquad y_p(x) = -2xe^{2x} \,. \end{aligned}$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione completa risulta essere

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} - 2xe^{2x} \,.$$

Inserendo, infine, le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{cases} 1 = y(0) = C_1 + C_2 \,, \\ -2 = y'(0) = 2C_1 + 4C_2 - 2 \,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \,, \\ 2C_1 + 4C_2 = 0 \,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -2C_2 \,, \\ -2C_2 + C_2 = 1 \,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_2 = -1 \,, \\ C_1 = 2 \,. \end{cases}$$

Concludendo, la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = 2e^{2x} - e^{4x} - 2xe^{2x}$.

Esercizio 4

Studiamo gli estremanti della funzione f nell'intervallo $[0, 2\pi]$, utilizzando il Teorema di Fermat ed il criterio di monotonia:

$$f'(x) = \cos(2x) - \cos x = 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \,.$$

Ponendo $\alpha = \cos x$, l'equazione proposta diviene $2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, che ha per soluzioni $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = 1, -1/2$. Quindi si ricava

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } \cos x < -1/2 \text{ o } \cos x > 1, \text{ ovvero se } 2\pi/3 < x < 4\pi/3, \\ = 0 & \text{se } \cos x = -1/2 \text{ o } \cos x = 1, \text{ ovvero se } x = 2\pi/3,\ x = 4\pi/3,\ x = 0 \text{ e } x = 2\pi, \\ < 0 & \text{se } \cos x > -1/2 \text{ o } \cos x < 1, \text{ ovvero se } 0 < x < 2\pi/3 \text{ e } 4\pi/3 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Pertanto, $x = 0$ e $x = 4\pi/3$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = 2\pi/3$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo. Calcolando $f(0) = 0$ ed $f(4\pi/3) = \sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}/4$, otteniamo che $x = 4\pi/3$ è punto di massimo assoluto. Calcolando, invece, $f(2\pi/3) = -\sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/2 = -3\sqrt{3}/4$ ed $f(2\pi) = 0$, otteniamo che $x = 2\pi/3$ è punto di minimo assoluto.

Esercizio 5

Osserviamo, innanzitutto, che le serie proposte sono tutte a termini positivi.

a) L'affermazione è vera, poiché

$$\frac{b_n}{a_n} \sim \frac{1/n}{n^2} \sim \frac{1}{n^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \log\left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right) \sim \frac{b_n}{a_n} \sim \frac{1}{n^3} \,.$$

Quindi la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3 > 1$.

b) L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, $a_n = n^2$ e $b_n = 1/n$, da cui

$$a_n b_n = n^2 \frac{1}{n} = n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{1 + a_n b_n} = \frac{1}{1+n} \sim \frac{1}{n} \,.$$

Quindi la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

c) L'affermazione è vera poiché

$$a_n b_n \sim n^2 \frac{1}{n} = n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_n b_n}{1 + b_n a_n} \sim \frac{n}{1+n} \to 1 \neq 0 \,,$$

cioè il termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

d) L'affermazione è falsa, basta considerare nuovamente $a_n = n^2$ e $b_n = 1/n$, da cui

$$\frac{a_n b_n^2}{1 + a_n^2 b_n} = \frac{n^2 \frac{1}{n^2}}{1 + n^4 \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + n^3} \sim \frac{1}{n^3} \,.$$

Quindi la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3 > 1$.