SOLUZIONI COMPITO del 4/07/2012
ANALISI MATEMATICA I - 5 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quinto ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \frac{2}{n^{2/3}}$, dato da

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^6) = \frac{2}{n^{2/3}} - \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)^5 + o\Big((\frac{2}{n^{2/3}})^6\Big) \\ &= \frac{2}{n^{2/3}} - \frac{4}{3n^2} + \frac{4}{15n^{10/3}} + o\left(\frac{1}{n^4}\right), \end{aligned}$$

e quello al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 2\sqrt{2}/n\sqrt{3}$, dato da

$$\begin{aligned} \cos t &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^5) = 1 - \frac{1}{2!}(2\sqrt{2}/n\sqrt{3})^2 + \frac{1}{4!}(2\sqrt{2}/n\sqrt{3})^4 + o\big((2\sqrt{2}/n\sqrt{3})^5\big) \\ &= 1 - \frac{4}{3n^2} + \frac{8}{27n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right), \end{aligned}$$

per $n \to +\infty$, otteniamo

$$\begin{aligned} a_n &:= 1 + \sin\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right) - \cos\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{n}\right) - \frac{2}{n^{2/3}} \\ &= 1 + \frac{2}{n^{2/3}} - \frac{4}{3n^2} + \frac{4}{15n^{10/3}} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - 1 + \frac{4}{3n^2} - \frac{8}{27n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right) - \frac{2}{n^{2/3}} \\ &= \frac{4}{15n^{10/3}} - \frac{8}{27n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{4}{15n^{10/3}}. \end{aligned}$$

La serie proposta, pertanto, converge, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $10/3 > 1$.

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di riduzione degli integrali doppi, otteniamo

$$\begin{aligned} \iint_E \log(x+1)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\log(x+1)\int_0^{x^2} dy\right) dx = \int_0^1 x^2 \log(x+1)\,dx \\ &= \frac{x^3}{3}\log(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3+1-1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1}\,dx = \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{3}\left(\int_0^1 (x^2-x+1)\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx\right) \\ &= \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\log(x+1)\Big|_0^1 = \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{\log 2}{3} = \frac{2}{3}\log 2 - \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $3\lambda^2 - 18\lambda + 24 = 0$, che ha per soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$. Utilizzando il metodo di somiglianza e tenendo conto che $\lambda = 2$ è soluzione dell'equazione caratteristica, ricaviamo che una soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Axe^{2x}$, da cui $y'(x) = 2Axe^{2x} + Ae^{2x}$ e $y''(x) = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$. Sostituendo nell'equazione proposta, otteniamo

$$\begin{aligned} 12Axe^{2x} + 12Ae^{2x} - 36Axe^{2x} - 18Ae^{2x} + 24Axe^{2x} = 12e^{2x} \qquad &\Longrightarrow \qquad -6Ae^{2x} = 12e^{2x} \\ A = -2 \qquad &\Longrightarrow \qquad y_p(x) = -2xe^{2x}\,. \end{aligned}$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione completa risulta essere

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} - 2xe^{2x}\,.$$

Inserendo, infine, le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{cases} 1 = y(0) = C_1 + C_2\,, \\ -2 = y'(0) = 2C_1 + 4C_2 - 2\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1\,, \\ 2C_1 + 4C_2 = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -2C_2\,, \\ -2C_2 + C_2 = 1\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_2 = -1\,, \\ C_1 = 2\,. \end{cases}$$

Concludendo, la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = 2e^{2x} - e^{4x} - 2xe^{2x}$.

Esercizio 4

Poiché la funzione proposta, essendo un polinomio, è continua sull'insieme chiuso e limitato $D := [-2, 0] \times [-1, 1]$, il Teorema di Weierstrass assicura che essa ammette almeno un punto di minimo ed un punto di massimo assoluti. Studiamo, innanzitutto, gli estremanti della funzione f all'interno di D, cioè nell'insieme $(-2, 0) \times (-1, 1)$, utilizzando i metodi del calcolo differenziale:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = x + 1 = 0 \\ f_y(x, y) = y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad (x, y) = (-1, 0)\,.$$

Calcolando la matrice Hessiana nell'unico punto stazionario trovato, ovvero $H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si ricava subito che essa è una matrice definita positiva e, quindi, il punto $(-1, 0)$ è un punto di minimo relativo.

Studiamo ora il comportamento della funzione sulla frontiera del dominio, che suddividiamo nei quattro lati:

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1]\,; \qquad \gamma_2 = \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in [-2, 0]\,;$$

$$\gamma_3 = \begin{cases} x = -2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1]\,; \qquad \gamma_4 = \begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases} \quad t \in [-2, 0]\,;$$

Su γ_1

$$f(0, t) =: g_1(t) = \frac{1}{2}t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad g_1'(t) = t \begin{cases} < 0 & \text{se } -1 \le t < 0, \\ = 0 & \text{se } t = 0, \\ > 0 & \text{se } 0 < t \le 1, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad (0, -1)\ (0, 1) \text{ punti di max. vincolato su } \gamma_1\ (0, 0) \text{ punto di min. vincolato su } \gamma_1\,.$$

Su γ_2

$$f(t, 1) =: g_2(t) = \frac{1}{2}t^2 + 1 + t \qquad \Longrightarrow \qquad g_2'(t) = t + 1 \begin{cases} < 0 & \text{se } -2 \le t < -1, \\ = 0 & \text{se } t = -1, \\ > 0 & \text{se } -1 < t \le 0, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad (-2, 1)\ (0, 1) \text{ punti di max. vincolato su } \gamma_2\ (-1, 1) \text{ punto di min. vincolato su } \gamma_2\,.$$

Su γ_3

$$f(-2,t) =: g_3(t) = \frac{1}{2}(4+t^2) - 2 \quad \Longrightarrow \quad g_3'(t) = t \begin{cases} < 0 & \text{se } -1 \le t < 0, \\ = 0 & \text{se } t = 0, \\ > 0 & \text{se } 0 < t \le 1, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad (-2,-1)\ (-2,1) \text{ punti di max. vincolato su } \gamma_3\ (-2,0) \text{ punto di min. vincolato su } \gamma_3\,.$$

Su γ_4

$$f(t,-1) =: g_4(t) = \frac{1}{2}t^2 + 1 + t \quad \Longrightarrow \quad g_4'(t) = t+1 \begin{cases} < 0 & \text{se } -2 \le t < -1, \\ = 0 & \text{se } t = -1, \\ > 0 & \text{se } -1 < t \le 0, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad (-2,-1)\ (0,-1) \text{ punti di max. vincolato su } \gamma_4\ (-1,-1) \text{ punto di min. vincolato su } \gamma_4\,.$$

Calcoliamo, infine, il valore di f nei punti trovati:

$$f(-1,0) = -\frac{1}{2} \qquad f(-1,1) = f(-1,-1) = f(0,0) = f(-2,0) = 0\,,$$
$$f(0,-1) = f(0,1) = f(-2,-1) = f(-2,1) = \frac{1}{2}\,.$$

Pertanto, dai risultati ottenuti ricaviamo che il punto $(-1,0)$ è punto di minimo assoluto, mentre i punti $(0,-1),(0,1),(-2,-1),(-2,1)$ sono tutti punti di massimo assoluto.

Esercizio 5

Osserviamo, innanzitutto, che le serie sono tutte a termini positivi.

a) L'affermazione è vera, poiché

$$\frac{b_n}{a_n} \sim \frac{1/n}{n^2} \sim \frac{1}{n^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \log\left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right) \sim \frac{b_n}{a_n} \sim \frac{1}{n^3}\,.$$

Quindi la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3 > 1$.

b) L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, $a_n = n^2$ e $b_n = 1/n$, da cui

$$a_n b_n = n^2 \frac{1}{n} = n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{1 + a_n b_n} = \frac{1}{1+n} \sim \frac{1}{n}\,.$$

Quindi la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

c) L'affermazione è vera poiché

$$a_n b_n \sim n^2 \frac{1}{n} = n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_n b_n}{1 + b_n a_n} \sim \frac{n}{1+n} \to 1 \neq 0\,,$$

cioè il termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

d) L'affermazione è falsa, basta considerare nuovamente $a_n = n^2$ e $b_n = 1/n$, da cui

$$\frac{a_n b_n^2}{1 + a_n^2 b_n} = \frac{n^2 \frac{1}{n^2}}{1 + n^4 \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+n^3} \sim \frac{1}{n^3}\,.$$

Quindi la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3 > 1$.