**SOLUZIONI COMPITO del 7/06/2012**
**ANALISI MATEMATICA I - 10 CFU**
**ENERGETICA**

**TEMA A**

**Esercizio 1**

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini positivi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \sin \frac{1}{n}$, e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/n$, otteniamo

$$n^\alpha \log\left(1 + \sin\frac{1}{n}\right) = n^\alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim n^\alpha \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, avremo che la serie proposta converge se e solo se $1-\alpha > 1$, ovvero per $\alpha < 0$. Per $\alpha \geq 0$, la serie proposta diverge a $+\infty$.

**Esercizio 2**

Utilizzando il teorema di riduzione degli integrali doppi, si ottiene

$$\begin{aligned}
\iint_E \mathrm{e}^x(2y+x)\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^x \mathrm{e}^x(2y+x)\,dy\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^x \left(\int_0^x (2y+x)\,dy\right) dx = \int_0^1 \mathrm{e}^x(y^2+xy)\Big|_0^x dx \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^x(x^2+x^2)\,dx = 2x^2\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 4\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,dx \\
&= 2\mathrm{e} - 4x\mathrm{e}^x\Big|_0^1 + 4\int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx = 2\mathrm{e} - 4\mathrm{e} + 4\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 2\mathrm{e} - 4\mathrm{e} + 4\mathrm{e} - 4 = 2\mathrm{e} - 4\,.
\end{aligned}$$

**Esercizio 3**

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e omogenea, la cui equazione caratteristica è data da $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + 3 = 0$. Otteniamo, pertanto,

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 3} = \begin{cases} \text{due soluzioni reali distinte per} & \alpha < -\sqrt{3} \text{ e } \alpha > \sqrt{3}; \\ \text{due soluzioni reali coincidenti per} & \alpha = \pm\sqrt{3}; \\ \text{due soluzioni complesse coniugate per} & -\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}. \end{cases}$$

- <u>Caso $\alpha < -\sqrt{3}$ e $\alpha > \sqrt{3}$</u> L'integrale generale dell'equazione differenziale è
$$y(x) = C_1 \exp[-(\alpha + \sqrt{\alpha^2-3})x] + C_2 \exp[-(\alpha - \sqrt{\alpha^2-3})x]\,.$$
- <u>Caso $\alpha = \pm\sqrt{3}$</u> L'integrale generale dell'equazione differenziale è
$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} + C_2 x\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} \quad (\text{rispett. } y(x) = C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x} + C_2 x \mathrm{e}^{-\sqrt{3}x})\,.$$
- <u>Caso $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$</u> L'integrale generale dell'equazione differenziale è
$$y(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\left\{C_1 \cos[(\sqrt{3-\alpha^2})x] + C_2 \sin[(\sqrt{3-\alpha^2})x]\right\}\,.$$

**Esercizio 4**

Studiamo, innanzitutto, gli estremanti della funzione $f$, utilizzando il Teorema di Fermat nell'intervallo $(0,\pi)$:

$$f'(x) = 1 - 2\cos x \begin{cases} > 0 & \text{se } \cos x < 1/2 \iff \pi/3 < x < \pi; \\ = 0 & \text{se } \cos x = 1/2 \iff x = \pi/3; \\ < 0 & \text{se } \cos x > 1/2 \iff 0 < x < \pi/3. \end{cases}$$

Quindi $x = 0$ e $x = \pi$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = \pi/3$ è punto di minimo relativo e assoluto. Calcolando $f(0) = 0$ ed $f(\pi) = \pi$, otteniamo anche che $x = \pi$ è punto di massimo assoluto. Inoltre, poiché $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$, si ha anche che $f(x) + \sqrt{3} > 0$ in tutto l'intervallo $[0,\pi]$, quindi la funzione $g(x)$ coincide con la funzione $f(x) + \sqrt{3}$ nell'intervallo considerato. Pertanto, $x = 0$ è punto di massimo relativo per $g$, $x = \pi$ è punto di massimo assoluto per $g$ e $x = \pi/3$ è punto di minimo assoluto per $g$.

**Esercizio 5**

*a)* L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ 1/x^2 & \text{se } x < -1 \text{ e } x > 1. \end{cases}$$

Essa è limitata su tutto $\mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ per $x \to 0$, ma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{che è una serie convergente.}$$

*b)* L'affermazione è vera, poiché per ipotesi la serie è a termini non negativi ed $f(1/n) \sim 1/n$; quindi, per il criterio del confronto asintotico, otteniamo che la serie proposta è convergente, in quanto $f^2(1/n) \sim 1/n^2$, che è il termine generale di una serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1.

*c)* L'affermazione è vera, poiché per ipotesi la serie è a termini non negativi ed $f\big(1-\cos(1/n)\big) \sim 1 - \cos(1/n) \sim 1/2n^2$; quindi, per il criterio del confronto asintotico, otteniamo che la serie proposta è convergente, in quanto il suo termine generale è asintotico a quello di una serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1.

*d)* L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, $f(x) = |\arctan x|$ che è positiva e limitata su tutto $\mathbb{R}$ ed, inoltre, $f(x) \sim |x|$ per $x \to 0$. Tuttavia

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2} \quad \text{e} \quad \frac{\arctan n}{n^2} \leq \frac{\pi}{2n^2} \quad \text{che è il termine generale di una serie convergente.}$$