

SOLUZIONI COMPITO del 7/06/2012
ANALISI MATEMATICA I - 5 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini positivi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \sin \frac{1}{n}$, e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/n$, otteniamo

$$n^\alpha \log \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right) = n^\alpha \sin \left(\frac{1}{n} \right) \sim n^\alpha \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, avremo che la serie proposta converge se e solo se $1 - \alpha > 1$, ovvero per $\alpha < 0$. Per $\alpha \geq 0$, la serie proposta diverge a $+\infty$.

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di riduzione degli integrali doppi, si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_E e^x(2y+x) dy dx &= \int_0^1 \int_0^x e^x(2y+x) dy dx = \int_0^1 e^x \left(\int_0^x (2y+x) dy \right) dx = \int_0^1 e^x (y^2 + xy) \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 e^x (x^2 + x^2) dx = 2x^2 e^x \Big|_0^1 - 4 \int_0^1 x e^x dx \\ &= 2e - 4x e^x \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 e^x dx = 2e - 4e + 4e^x \Big|_0^1 = 2e - 4e + 4e - 4 = 2e - 4. \end{aligned}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e omogenea, la cui equazione caratteristica è data da $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + 3 = 0$. Otteniamo, pertanto,

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 3} = \begin{cases} \text{due soluzioni reali distinte per} & \alpha < -\sqrt{3} \text{ e } \alpha > \sqrt{3}; \\ \text{due soluzioni reali coincidenti per} & \alpha = \pm\sqrt{3}; \\ \text{due soluzioni complesse coniugate per} & -\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}. \end{cases}$$

- Caso $\alpha < -\sqrt{3}$ e $\alpha > \sqrt{3}$ L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = C_1 \exp[-(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3})x] + C_2 \exp[-(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 3})x].$$

- Caso $\alpha = \pm\sqrt{3}$ L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 x e^{\sqrt{3}x} \quad (\text{rispett. } y(x) = C_1 e^{-\sqrt{3}x} + C_2 x e^{-\sqrt{3}x}).$$

- Caso $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$ L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = e^{-\alpha x} \left\{ C_1 \cos[(\sqrt{3 - \alpha^2})x] + C_2 \sin[(\sqrt{3 - \alpha^2})x] \right\}.$$

Esercizio 4

Per determinare i punti critici di f , imponiamo l'annullamento del gradiente che ci porta al sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -2y \cos(xy) = 0, \\ f_y(x, y) = 1 - 2x \cos(xy) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0, \\ x = 1/2, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} xy = \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{N}, \\ 1 = 0 \text{ impossibile.} \end{cases}$$

Quindi $(x, y) = (1/2, 0)$ è l'unico punto critico. Calcolando l'Hessiano in tale punto otteniamo

$$\begin{aligned} \det(H_f)(1/2, 0) &= \det \begin{pmatrix} 2y^2 \sin(xy) & -2 \cos(xy) + 2xy \sin(xy) \\ -2 \cos(xy) + 2xy \sin(xy) & 2x^2 \sin(xy) \end{pmatrix} \Big|_{(1/2, 0)} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0. \end{aligned}$$

Pertanto, il punto critico trovato risulta essere una sella.

Esercizio 5

- a) L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ 1/x^2 & \text{se } x < -1 \text{ e } x > 1. \end{cases}$$

Essa è limitata su tutto \mathbb{R} , $f(x) = |x|$ per $x \rightarrow 0$, ma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{che è una serie convergente.}$$

- b) L'affermazione è vera, poiché per ipotesi la serie è a termini non negativi ed $f(1/n) \sim 1/n$; quindi, per il criterio del confronto asintotico, otteniamo che la serie proposta è convergente, in quanto $f^2(1/n) \sim 1/n^2$, che è il termine generale di una serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1.
- c) L'affermazione è vera, poiché per ipotesi la serie è a termini non negativi ed $f(1 - \cos(1/n)) \sim 1 - \cos(1/n) \sim 1/2n^2$; quindi, per il criterio del confronto asintotico, otteniamo che la serie proposta è convergente, in quanto il suo termine generale è asintotico a quello di una serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1.
- d) L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, $f(x) = |\arctan x|$ che è positiva e limitata su tutto \mathbb{R} ed, inoltre, $f(x) \sim |x|$ per $x \rightarrow 0$. Tuttavia

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2} \quad \text{e} \quad \frac{\arctan n}{n^2} \leq \frac{\pi}{2n^2} \quad \text{che è il termine generale di una serie convergente.}$$