SOLUZIONI COMPITO del 9/02/2018
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Ponendo $z = a + ib$, da cui $|z|^2 = a^2 + b^2$ e $\mathrm{Im}(z) = b$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $a^2 + b^2 + 2ia - 2b - ib = 1$, da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 2b = 1\,, \\ 2a - b = 0\,, \end{cases} \implies \begin{cases} b = 2a\,, \\ a^2 + 4a^2 - 4a - 1 = 0\,, \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1\,, \\ b = 2\,, \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} a = -1/5\,, \\ b = -2/5\,. \end{cases}$$

Quindi l'equazione proposta ha due soluzioni date da $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = -1/5 - 2i/5$.

Esercizio 2

Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta dobbiamo imporre le condizioni

$$\begin{array}{l} \arcsin(3\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x) \geq 0\,, \\ -1 \leq 3\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x \leq 1\,, \end{array} \iff 0 \leq 3\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x \leq 1\,.$$

Risolvendo la prima disequazione si ottiene $\mathrm{e}^x(3\mathrm{e}^x - 2) \geq 0$, ovvero $\mathrm{e}^x \geq 2/3$, che fornisce $x \geq \log(2/3)$. Per la seconda disequazione procediamo effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^x$, da cui ricaviamo $3t^2 - 2t - 1 \leq 0$, ovvero $-1/3 \leq t \leq 1$, che fornisce $\mathrm{e}^x \leq 1$, da cui $x \leq 0$. Quindi il campo d'esistenza della funzione proposta sarà $E = [\log(2/3), 0]$. Infine, ricordando che $-\pi/2 \leq \arcsin s \leq \pi/2$, si ricava subito che $f > 0$ nel suo dominio.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica è data da $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ ed ha per soluzioni $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = \mathrm{e}^x[C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)]$. Inoltre, utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = A\cos x + B \sin x$, da cui $y_p'(x) = -A \sin x + B \cos x$ e $y_p''(x) = -A\cos x - B \sin x$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$-A\cos x - B\sin x + 2A\sin x - 2B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x = 10\sin x\,,$$

che porta al sistema

$$\begin{cases} -A - 2B + 5A = 0\,, \\ -B + 2A + 5B = 10\,, \end{cases} \implies \begin{cases} B = 2A\,, \\ 10A = 10\,, \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1\,, \\ B = 2\,. \end{cases}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da $y(x) = \mathrm{e}^x[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)] + \cos x + 2\sin x$, che risulta una funzione periodica se e solo se $C_1 = C_2 = 0$. Quindi, esiste un'unica soluzione del problema proposto, che è da $y(x) = \cos x + 2\sin x$.

Esercizio 4

Poiché la funzione proposta è non negativa e continua nell'intervallo $(0, 1)$, studiando il suo comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to 1^-$ otteniamo

$$\text{per } x \to 1^- \quad f(x) \sim \frac{\sqrt[5]{x(1-x)}}{\log(1+\sqrt{3})\sqrt[4]{(1-x)}} \sim \frac{\sqrt[5]{1-x}}{\log(1+\sqrt{3})\sqrt[4]{(1-x)}} \sim \frac{1}{\log(1+\sqrt{3})(1-x)^{1/20}}$$

che è impropriamente integrabile;

$$\text{per } x \to 0^+ \quad f(x) \sim \frac{\sqrt[5]{x(1-x)}}{\sqrt{x(2+x)}\sqrt[4]{1}} \sim \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{2x}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\,x^{3/10}} \quad \text{che è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto la funzione proposta risulta impropriamente integrabile in $(0, 1)$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Dal Teorema di Torricelli si ricava

$$F'(x) = -e^{-x}[f(e^{-x})]^2 \qquad \Longrightarrow$$
$$F''(x) = e^{-x}[f(e^{-x})]^2 - 2e^{-x}f(e^{-x})f'(e^{-x})(-e^{-x}) = e^{-x}[f(e^{-x})]^2 + 2e^{-2x}f(e^{-x})f'(e^{-x})\,.$$

Pertanto, $F''(x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto $f \geq 0$ per ipotesi e $f' \geq 0$, poiché f è crescente. Quindi, avendo la derivata seconda sempre non negativa, F è convessa.

TEMA B

Esercizio 1

Ponendo $z = a + ib$, da cui $|z|^2 = a^2 + b^2$ e $\mathrm{Re}(z) = a$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $a - ia^2 - ib^2 + 2ia - 2b = -i$, da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} a - 2b = 0\,, \\ -a^2 - b^2 + 2a = -1\,, \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2b\,, \\ -4b^2 - b^2 + 4b + 1 = 0\,, \end{cases} \implies \begin{cases} b = 1\,, \\ a = 2\,, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} b = -1/5\,, \\ a = -2/5\,. \end{cases}$$

Quindi l'equazione proposta ha due soluzioni date da $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = -2/5 - i/5$.

Esercizio 2

Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta dobbiamo imporre le condizioni

$$\begin{array}{l} \pi/2 - \arccos(5\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x) \geq 0\,, \\ -1 \leq 5\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x \leq 1\,, \end{array} \iff \quad 0 \leq 5\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x \leq 1\,.$$

Risolvendo la prima disequazione si ottiene $\mathrm{e}^x(5\mathrm{e}^x - 4) \geq 0$, ovvero $\mathrm{e}^x \geq 4/5$, che fornisce $x \geq \log(4/5)$. Per la seconda disequazione procediamo effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^x$, da cui ricaviamo $5t^2 - 4t - 1 \leq 0$, ovvero $-1/5 \leq t \leq 1$, che fornisce $\mathrm{e}^x \leq 1$, da cui $x \leq 0$. Quindi il campo d'esistenza della funzione proposta sarà $E = [\log(4/5), 0]$. Infine, ricordando che $0 \leq \arccos s \leq \pi$, ovvero $-\pi/2 \leq \pi/2 - \arccos s \leq \pi/2$, si ricava subito che $f < 0$ nel suo dominio.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica è data da $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ ed ha per soluzioni $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = \mathrm{e}^x[C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)]$. Inoltre, utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = A\cos x + B \sin x$, da cui $y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$ e $y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$-A\cos x - B\sin x + 2A\sin x - 2B\cos x + 10A\cos x + 10B\sin x = -85\cos x\,,$$

che porta al sistema

$$\begin{cases} -B + 2A + 10B = 0\,, \\ -A - 2B + 10A = -85\,, \end{cases} \implies \begin{cases} A = -9B/2\,, \\ -85B/2 = -85\,, \end{cases} \implies \begin{cases} A = -9\,, \\ B = 2\,. \end{cases}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da $y(x) = \mathrm{e}^x[C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)] - 9\cos x + 2\sin x$, che risulta una funzione periodica se e solo se $C_1 = C_2 = 0$. Quindi, esiste un'unica soluzione del problema proposto, che è da $y(x) = -9\cos x + 2\sin x$.

Esercizio 4

Poiché la funzione proposta è non negativa e continua nell'intervallo $(0, 1)$, studiando il suo comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to 1^-$ otteniamo

$$\text{per } x \to 1^- \quad f(x) \sim \frac{\log(1 + \sqrt[4]{4})\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{\log(1+\sqrt{2})\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt{1-x}} \sim \frac{\log(1+\sqrt{2})}{(1-x)^{1/4}}$$

che è impropriamente integrabile;

$$\text{per } x \to 0^+ \quad f(x) \sim \frac{\sqrt[4]{x(3+x)}\sqrt[4]{1}}{\sqrt{x\sin 1}} \sim \frac{\sqrt[4]{3x}}{\sqrt{x \sin 1}} \sim \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{\sin 1}\, x^{1/4}} \quad \text{che è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto la funzione proposta risulta impropriamente integrabile in $(0, 1)$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Dal Teorema di Torricelli si ricava

$$\begin{aligned} &F'(x) = 2x[f(x^2)]^2 \qquad\qquad \Longrightarrow \\ &F''(x) = 2[f(x^2)]^2 + 2x2f(x^2)f'(x^2)2x = 2[f(x^2)]^2 + 8x^2 f(x^2)f'(x^2)\,. \end{aligned}$$

Pertanto, $F''(x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto $f \leq 0$ per ipotesi e $f' \leq 0$, poiché f è decrescente. Quindi, avendo la derivata seconda sempre non negativa, F è convessa.

TEMA C

Esercizio 1

Ponendo $z = a + ib$, da cui $|z|^2 = a^2 + b^2$ e $\mathrm{Re}(z) = a$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $a^2 + b^2 - 2a - 2ib + ia = 9$, da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} -2b + a = 0\,, \\ a^2 + b^2 - 2a = 9\,, \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2b\,, \\ 4b^2 + b^2 - 4b - 9 = 0\,, \end{cases} \implies \begin{cases} b = -1\,, \\ a = -2\,, \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} b = 9/5\,, \\ a = 18/5\,. \end{cases}$$

Quindi l'equazione proposta ha due soluzioni date da $z_1 = -2 - i$ e $z_2 = 18/5 + 9i/5$.

Esercizio 2

Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta dobbiamo imporre le condizioni

$$\begin{aligned} &\pi/2 - \arccos(7\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^x) \geq 0\,, \\ &-1 \leq 7\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^x \leq 1\,, \end{aligned} \qquad \iff \qquad 0 \leq 7\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^x \leq 1\,.$$

Risolvendo la prima disequazione si ottiene $\mathrm{e}^x(7\mathrm{e}^x - 6) \geq 0$, ovvero $\mathrm{e}^x \geq 6/7$, che fornisce $x \geq \log(6/7)$. Per la seconda disequazione procediamo effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^x$, da cui ricaviamo $7t^2 - 6t - 1 \leq 0$, ovvero $-1/7 \leq t \leq 1$, che fornisce $\mathrm{e}^x \leq 1$, da cui $x \leq 0$. Quindi il campo d'esistenza della funzione proposta sarà $E = [\log(6/7), 0]$. Infine, ricordando che $0 \leq \arccos s \leq \pi$, ovvero $-\pi/2 \leq \pi/2 - \arccos s \leq \pi/2$, si ricava subito che $f > 0$ nel suo dominio.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica è data da $\lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0$ ed ha per soluzioni $\lambda_{1,2} = 3 \pm 3i$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = \mathrm{e}^{3x}[C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)]$. Inoltre, utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$, da cui $y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$ e $y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$-A\cos x - B\sin x + 6A\sin x - 6B\cos x + 18A\cos x + 18B\sin x = -325\cos x\,,$$

che porta al sistema

$$\begin{cases} -B + 6A + 18B = 0\,, \\ -A - 6B + 18A = -325\,, \end{cases} \implies \begin{cases} A = -17B/6\,, \\ -325B/6 = -325\,, \end{cases} \implies \begin{cases} A = -17\,, \\ B = 6\,. \end{cases}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da $y(x) = \mathrm{e}^{3x}[C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)] - 17\cos x + 6\sin x$, che risulta una funzione periodica se e solo se $C_1 = C_2 = 0$. Quindi, esiste un'unica soluzione del problema proposto, che è da $y(x) = -17\cos x + 6\sin x$.

Esercizio 4

Poiché la funzione proposta è non negativa e continua nell'intervallo $(0,1)$, studiando il suo comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to 1^-$ otteniamo

$$\text{per } x \to 1^- \quad f(x) \sim \frac{\log(1 + \sqrt[4]{4})\sqrt[6]{1-x}}{\sqrt[3]{x(1-x)}} \sim \frac{\log(1+\sqrt{2})\sqrt[6]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}} \sim \frac{\log(1+\sqrt{2})}{(1-x)^{1/6}}$$

che è impropriamente integrabile;

$$\text{per } x \to 0^+ \quad f(x) \sim \frac{\sqrt[4]{2x(1+x)}\sqrt[6]{1}}{\sqrt[3]{x(1-x)}} \sim \frac{\sqrt[4]{2x}}{\sqrt[3]{x}} \sim \frac{\sqrt[4]{2}}{x^{1/12}} \quad \text{che è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto la funzione proposta risulta impropriamente integrabile in $(0,1)$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Dal Teorema di Torricelli si ricava

$$F'(x) = 2x[f(x^2)]^2 \qquad \Longrightarrow$$
$$F''(x) = 2[f(x^2)]^2 + 2x2f(x^2)f'(x^2)2x = 2[f(x^2)]^2 + 8x^2 f(x^2)f'(x^2)\,.$$

Pertanto, $F''(x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto $f \leq 0$ per ipotesi e $f' \leq 0$, poiché f è decrescente. Quindi, avendo la derivata seconda sempre non negativa, F è convessa.

TEMA D

Esercizio 1
Ponendo $z = a + ib$, da cui $|z|^2 = a^2 + b^2$ e $\mathrm{Im}(z) = b$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $ia^2 + ib^2 - a - ib + b = i$, da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} -a + b = 0\,, \\ a^2 + b^2 - b = 1\,, \end{cases} \implies \begin{cases} a = b\,, \\ b^2 + b^2 - b - 1 = 0\,, \end{cases} \implies \begin{cases} b = 1\,, \\ a = 1\,, \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} b = -1/2\,, \\ a = -1/2\,. \end{cases}$$

Quindi l'equazione proposta ha due soluzioni date da $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -1/2 - i/2$.

Esercizio 2
Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta dobbiamo imporre le condizioni

$$\begin{aligned} &\arcsin(2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x) \geq 0\,, \\ &-1 \leq 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x \leq 1\,, \end{aligned} \qquad \iff \qquad 0 \leq 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x \leq 1\,.$$

Risolvendo la prima disequazione si ottiene $\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - 1) \geq 0$, ovvero $\mathrm{e}^x \geq 1/2$, che fornisce $x \geq \log(1/2)$. Per la seconda disequazione procediamo effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^x$, da cui ricaviamo $2t^2 - t - 1 \leq 0$, ovvero $-1/2 \leq t \leq 1$, che fornisce $\mathrm{e}^x \leq 1$, da cui $x \leq 0$. Quindi il campo d'esistenza della funzione proposta sarà $E = [\log(1/2), 0]$. Infine, ricordando che $-\pi/2 \leq \arcsin s \leq \pi/2$, si ricava subito che $f < 0$ nel suo dominio.

Esercizio 3
L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica è data da $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$ ed ha per soluzioni $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = \mathrm{e}^{2x}[C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)]$. Inoltre, utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = A\cos x + B \sin x$, da cui $y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$ e $y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$-A\cos x - B\sin x + 4A\sin x - 4B\cos x + 8A\cos x + 8B\sin x = 65\sin x\,,$$

che porta al sistema

$$\begin{cases} -A - 4B + 8A = 0\,, \\ -B + 4A + 8B = 65\,, \end{cases} \implies \begin{cases} B = 7A/4\,, \\ 65A/4 = 65\,, \end{cases} \implies \begin{cases} A = 4\,, \\ B = 7\,. \end{cases}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da $y(x) = \mathrm{e}^{2x}[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)] + 4\cos x + 7\sin x$, che risulta una funzione periodica se e solo se $C_1 = C_2 = 0$. Quindi, esiste un'unica soluzione del problema proposto, che è da $y(x) = 4\cos x + 7\sin x$.

Esercizio 4
Poiché la funzione proposta è non negativa e continua nell'intervallo $(0, 1)$, studiando il suo comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to 1^-$ otteniamo

$$\text{per } x \to 1^- \quad f(x) \sim \frac{\sqrt[4]{1-x}}{\log(1+\sqrt{3})\sqrt[3]{x(1-x)}} \sim \frac{\sqrt[4]{1-x}}{\log(1+\sqrt{3})\sqrt[3]{1-x}} \sim \frac{1}{\log(1+\sqrt{3})(1-x)^{1/12}}$$

che è impropriamente integrabile;

$$\text{per } x \to 0^+ \quad f(x) \sim \frac{\sqrt[4]{\sin 1}}{\sqrt{x(1+2x)}\sqrt[3]{x(1-x)}} \sim \frac{\sqrt[4]{\sin 1}}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}} \sim \frac{\sqrt[4]{\sin 1}}{x^{5/6}} \quad \text{che è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto la funzione proposta risulta impropriamente integrabile in $(0, 1)$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Dal Teorema di Torricelli si ricava

$$F'(x) = -\mathrm{e}^{-x}[f(\mathrm{e}^{-x})]^2 \qquad \Longrightarrow$$
$$F''(x) = \mathrm{e}^{-x}[f(\mathrm{e}^{-x})]^2 - 2\mathrm{e}^{-x} f(\mathrm{e}^{-x}) f'(\mathrm{e}^{-x})(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}[f(\mathrm{e}^{-x})]^2 + 2\mathrm{e}^{-2x} f(\mathrm{e}^{-x}) f'(\mathrm{e}^{-x})\,.$$

Pertanto, $F''(x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto $f \geq 0$ per ipotesi e $f' \geq 0$, poiché f è crescente. Quindi, avendo la derivata seconda sempre non negativa, F è convessa.