

SOLUZIONI COMPITO del 10/02/2014
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Per poter scrivere l'equazione della retta tangente, dobbiamo innanzitutto calcolare la derivata della funzione nel punto $x = 3$; a tal fine, dopo aver osservato che f è continua in $x = 3$, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\log(1 + x^2/9) \arctan [3 \log (1 + (x - 3)^2)]}{(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(\log 2)3(x - 3)^2}{(x - 3)} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \sin [(\log 8)(x - 3)] = 0 = f(3),$$

consideriamo il limite del rapporto incrementale, cioè

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} \left[\frac{\log[1 + (3 + t)^2/9] \arctan [3 \log (1 + t^2)]}{t} - 0 \right] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[\frac{(\log 2)3t^2}{t^2} \right] = \log 8,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left[\sin [(\log 8)t] - 0 \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\log 8)t}{t} = \log 8.$$

Pertanto, l'equazione della retta tangente sarà $y(x) = (\log 8)(x - 3)$.

Esercizio 2

Tenendo conto della gerarchia degli infiniti e del fatto che $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0$, otteniamo

$$a_n := [n^{1/4} - \log(n^{10})]^{4\alpha} \left(e^{\frac{n}{n^2+1}} - 1 - \frac{1}{2n+1} \right) \sim [n^{1/4}]^{4\alpha} \left(\frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\sim n^\alpha \left(\frac{n}{n^2} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2n^{1-\alpha}} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1, \\ 1/2 & \text{se } \alpha = 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}[y^2(x) + 2]$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan[y(x)/\sqrt{2}] = \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2} dy \right) \Big|_{y=y(x)} = \int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} dx = -\sqrt{2-x^2} + C,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan 1 = -\sqrt{2} + C$, ovvero $C = (\pi + 8)/4\sqrt{2}$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt{2} \tan \left[\pi/4 + 2 - \sqrt{2}\sqrt{2-x^2} \right].$$

Esercizio 4

Ricordando che $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ e che $\cos(6x) = 2 \cos^2(3x) - 1$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/12} \frac{\tan(3x)}{1 + \tan^2(6x)} dx &= \int_0^{\pi/12} \frac{\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{\cos^2(6x) + \sin^2(6x)}{\cos^2(6x)}} dx = \int_0^{\pi/12} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} \cos^2(6x) dx \\ &= \int_0^{\pi/12} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} [2 \cos^2(3x) - 1]^2 dx = \int_0^{\pi/12} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} [4 \cos^4(3x) - 4 \cos^2(3x) + 1] dx \\ &= 4 \int_0^{\pi/12} \sin(3x) \cos^3(3x) - 4 \int_0^{\pi/12} \sin(3x) \cos(3x) + \int_0^{\pi/12} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} dx \\ &= -4 \frac{\cos^4(3x)}{4 \cdot 3} \Big|_0^{\pi/12} + 4 \frac{\cos^2(3x)}{2 \cdot 3} \Big|_0^{\pi/12} - \frac{\log[\cos(3x)]}{3} \Big|_0^{\pi/12} \\ &= \frac{1}{3} [-\cos^4(\pi/4) + 1 + 2 \cos^2(\pi/4) - 2 - \log[\cos(\pi/4)]] = -\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \log 2. \end{aligned}$$

Esercizio 5

Poiché $f \in C^0(\mathbb{R})$, la funzione integrale $F \in C^1(\mathbb{R})$ e, dal Teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione della funzione composta, si ha

$$F'(x) = 2x[x^2 f(x^2) - x^2 e^{-x^2}] \geq 0,$$

dove l'ultima disuguaglianza è conseguenza del criterio di monotonia. Tenendo conto che siamo interessati al comportamento per $x \rightarrow -\infty$ (cioè per $x < 0$) e ricordando che per ipotesi $f > 0$ su tutto \mathbb{R} , dividendo per x^3 , ricaviamo

$$f(x^2) - e^{-x^2} \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x^2) \leq e^{-x^2},$$

ovvero $0 < f(x^2) \leq e^{-x^2} \rightarrow 0$, per $x \rightarrow -\infty$. Il risultato segue, quindi, dal teorema dei due carabinieri.

TEMA B

Esercizio 1

Per poter scrivere l'equazione della retta tangente, dobbiamo innanzitutto calcolare la derivata della funzione nel punto $x = 2$; a tal fine, dopo aver osservato che f è continua in $x = 2$, in quanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \arctan \left[\frac{\pi}{2}(x-2) \right] &= 0 = f(2), \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2}(3-x) \right] \log [1 + \pi \arctan^2(x-2)]}{2(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\pi(x-2)^2}{2(x-2)} = 0, \end{aligned}$$

consideriamo il limite del rapporto incrementale, cioè

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} \left[\arctan \left(\frac{\pi}{2} t \right) - 0 \right] &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{(\pi/2)t}{t} = \pi/2, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left[\frac{\sin \left[\frac{\pi}{2}(1-t) \right] \log [1 + \pi \arctan^2 t]}{2t} - 0 \right] &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{\pi t^2}{2t^2} \right] = \pi/2. \end{aligned}$$

Pertanto, l'equazione della retta tangente sarà $y(x) = (\pi/2)(x-2)$.

Esercizio 2

Tenendo conto della gerarchia degli infiniti e del fatto che $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \frac{n+1}{n^3+2} \rightarrow 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{\left(\frac{4}{2n^2+3} + 1 - e^{\frac{n+1}{n^3+2}} \right)}{[n^3 + (\log n)^5]^{\alpha/6}} \sim \frac{\left(\frac{4}{2n^2+3} - \frac{n+1}{n^3+2} \right)}{[n^3]^{\alpha/6}} \\ &\sim \frac{\left(\frac{4}{2n^2} - \frac{n}{n^3} \right)}{n^{\alpha/2}} = \frac{1}{n^{\alpha/2+2}} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -4, \\ 1 & \text{se } \alpha = -4, \\ +\infty & \text{se } \alpha < -4. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}[y^2(x) + 4]$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{2} \arctan[y(x)/2] = \frac{1}{4} \left(\int \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} dy \right) \Big|_{y=y(x)} = - \int \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} dx = -2\sqrt{x^2-4} + C,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \arctan 1 = -2 + C$, ovvero $C = (\pi+16)/8$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = 2 \tan \left[\pi/4 + 4 - 4\sqrt{x^2-4} \right].$$

Esercizio 4

Ricordando che $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ e che $\cos^2(3x) = \frac{\cos(6x)+1}{2}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/24} \frac{\tan(6x)}{1 + \tan^2(3x)} dx &= \int_0^{\pi/24} \frac{\frac{\sin(6x)}{\cos(6x)}}{\frac{\cos^2(3x)+\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)}} dx = \int_0^{\pi/24} \frac{\frac{\sin(6x)}{\cos(6x)}}{\frac{1}{\cos^2(3x)}} dx \\ &= \int_0^{\pi/24} \frac{\sin(6x)}{\cos(6x)} \cos^2(3x) dx = \int_0^{\pi/24} \frac{\sin(6x)}{\cos(6x)} \frac{\cos(6x)+1}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/24} \sin(6x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/24} \frac{\sin(6x)}{\cos(6x)} dx = -\frac{\cos(6x)}{2 \cdot 6} \Big|_0^{\pi/24} - \frac{\log[\cos(6x)]}{2 \cdot 6} \Big|_0^{\pi/24} \\ &= -\frac{1}{12} [\cos(\pi/4) - 1 + \log[\cos(\pi/4)]] = -\frac{1}{12\sqrt{2}} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} \log 2. \end{aligned}$$

Esercizio 5

Poiché $f \in C^0(\mathbb{R})$, la funzione integrale $F \in C^1(\mathbb{R})$ e, dal Teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione della funzione composta, si ha

$$F'(x) = 2x[x^2 e^{x^2} - x^2 f(x^2)] \leq 0,$$

dove l'ultima disuguaglianza è conseguenza del criterio di monotonia. Tenendo conto che siamo interessati al comportamento per $x \rightarrow +\infty$ (cioè per $x > 0$), dividendo per x^3 , ricaviamo

$$e^{x^2} - f(x^2) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{x^2} \leq f(x^2),$$

ovvero $f(x^2) \geq e^{x^2} \rightarrow +\infty$, per $x \rightarrow +\infty$. Il risultato segue, quindi, dal teorema del confronto.

TEMA C

Esercizio 1

Per poter scrivere l'equazione della retta tangente, dobbiamo innanzitutto calcolare la derivata della funzione nel punto $x = 4$; a tal fine, dopo aver osservato che f è continua in $x = 4$, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} -\frac{1}{4} \log [1 + \pi(4 - x)] = 0 = f(4),$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2}(5 - x) \right] \arctan^2 \left[\log (1 + \sqrt{\pi}(x - 4)) \right]}{4(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\pi(x - 4)^2}{4(x - 4)} = 0,$$

consideriamo il limite del rapporto incrementale, cioè

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} \left[-\frac{1}{4} \log (1 - \pi t) - 0 \right] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\pi t}{4t} = \pi/4,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left[\frac{\sin \left[\frac{\pi}{2}(1 - t) \right] \arctan^2 \left[\log (1 + \sqrt{\pi} t) \right]}{4t} - 0 \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{\pi t^2}{4t^2} \right] = \pi/4.$$

Pertanto, l'equazione della retta tangente sarà $y(x) = (\pi/4)(x - 4)$.

Esercizio 2

Tenendo conto della gerarchia degli infiniti e del fatto che $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \frac{n}{2n^3+4} \rightarrow 0$, otteniamo

$$a_n := \frac{\left(\frac{2}{5n^2+4} + 1 - e^{\frac{n}{2n^3+4}} \right)}{[n^{1/3} + (\log n)^4]^{9\alpha}} \sim \frac{\left(\frac{2}{5n^2+4} - \frac{n}{2n^3+4} \right)}{[n^{1/3}]^{9\alpha}}$$

$$\sim \frac{\left(\frac{2}{5n^2} - \frac{n}{2n^3} \right)}{n^{3\alpha}} = -\frac{1}{10n^{3\alpha+2}} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -2/3, \\ -1/10 & \text{se } \alpha = -2/3, \\ -\infty & \text{se } \alpha < -2/3. \end{cases}$$

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = -\frac{2(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+9}} \left[\frac{y^2(x)}{9} + 1 \right]$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$3 \arctan[y(x)/3] = \left(\int \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2} dy \right) \Big|_{y=y(x)} = - \int \frac{2(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+9}} dx = -2\sqrt{(x+1)^2+9} + C,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{3\pi}{4} = 3 \arctan 1 = -6 + C$, ovvero $C = (3\pi + 24)/4$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = 3 \tan \left[\pi/4 + 2 - \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^2+9} \right].$$

Esercizio 4

Ricordando che $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ e che $\cos^2(2x) = \frac{\cos(4x)+1}{2}$, otteniamo

$$\int_0^{\pi/16} \frac{\tan(4x)}{1 + \tan^2(2x)} dx = \int_0^{\pi/16} \frac{\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}}{\frac{\cos^2(2x)+\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)}} dx = \int_0^{\pi/16} \frac{\sin(4x)}{\cos(4x)} \frac{1}{\cos^2(2x)} dx$$

$$= \int_0^{\pi/16} \frac{\sin(4x)}{\cos(4x)} \cos^2(2x) dx = \int_0^{\pi/16} \frac{\sin(4x)}{\cos(4x)} \frac{\cos(4x) + 1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/16} \sin(4x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/16} \frac{\sin(4x)}{\cos(4x)} dx = -\frac{\cos(4x)}{2 \cdot 4} \Big|_0^{\pi/16} - \frac{\log[\cos(4x)]}{2 \cdot 4} \Big|_0^{\pi/16}$$

$$= -\frac{1}{8} [\cos(\pi/4) - 1 + \log[\cos(\pi/4)]] = -\frac{1}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \log 2.$$

Esercizio 5

Poiché $f \in C^0(\mathbb{R})$, la funzione integrale $F \in C^1(\mathbb{R})$ e, dal Teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione della funzione composta, si ha

$$F'(x) = 2x[x^2 e^{x^2} - x^2 f(x^2)] \leq 0,$$

dove l'ultima disuguaglianza è conseguenza del criterio di monotonia. Tenendo conto che siamo interessati al comportamento per $x \rightarrow +\infty$ (cioè per $x > 0$), dividendo per x^3 , ricaviamo

$$e^{x^2} - f(x^2) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{x^2} \leq f(x^2),$$

ovvero $f(x^2) \geq e^{x^2} \rightarrow +\infty$, per $x \rightarrow +\infty$. Il risultato segue, quindi, dal teorema del confronto.

TEMA D

Esercizio 1

Per poter scrivere l'equazione della retta tangente, dobbiamo innanzitutto calcolare la derivata della funzione nel punto $x = 1$; a tal fine, dopo aver osservato che f è continua in $x = 1$, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log(1+x^3) \sin [2 \log (1+(x-1)^2)]}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\log 2) 2(x-1)^2}{(x-1)} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan [(\log 4)(x-1)] = 0 = f(1),$$

consideriamo il limite del rapporto incrementale, cioè

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} \left[\frac{\log[1+(1+t)^3] \sin [2 \log (1+t^2)]}{t} - 0 \right] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[\frac{(\log 2) 2t^2}{t^2} \right] = \log 4,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left[\arctan [(\log 4)t] - 0 \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\log 4)t}{t} = \log 4.$$

Pertanto, l'equazione della retta tangente sarà $y(x) = (\log 4)(x-1)$.

Esercizio 2

Tenendo conto della gerarchia degli infiniti e del fatto che $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \frac{n+1}{n^2+2} \rightarrow 0$, otteniamo

$$a_n := [n^2 - \log(n^7)]^\alpha \left(e^{\frac{n+1}{n^2+2}} - 1 - \frac{3}{n+2} \right) \sim [n^2]^\alpha \left(\frac{n+1}{n^2+2} - \frac{3}{n+2} \right)$$

$$\sim n^{2\alpha} \left(\frac{n}{n^2} - \frac{3}{n} \right) = -\frac{2}{n^{1-2\alpha}} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1/2, \\ -2 & \text{se } \alpha = 1/2, \\ -\infty & \text{se } \alpha > 1/2. \end{cases}$$

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = \frac{(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} \left[\frac{y^2(x)}{3} + 1 \right]$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\sqrt{3} \arctan[y(x)/\sqrt{3}] = \left(\int \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2} dy \right) \Big|_{y=y(x)} = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} dx = \sqrt{(x+1)^2+1} + C,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{\sqrt{3}\pi}{4} = \sqrt{3} \arctan 1 = 1 + C$, ovvero $C = (\sqrt{3}\pi - 4)/4$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt{3} \tan \left[\pi/4 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(x+1)^2+1} \right].$$

Esercizio 4

Ricordando che $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ e che $\cos(4x) = 2 \cos^2(2x) - 1$, otteniamo

$$\int_0^{\pi/8} \frac{\tan(2x)}{1 + \tan^2(4x)} dx = \int_0^{\pi/8} \frac{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}{\frac{\cos^2(8x) + \sin^2(8x)}{\cos^2(8x)}} dx = \int_0^{\pi/8} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \cos^2(8x) dx$$

$$= \int_0^{\pi/8} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} [2 \cos^2(2x) - 1]^2 dx = \int_0^{\pi/8} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} [4 \cos^4(2x) - 4 \cos^2(2x) + 1] dx$$

$$= 4 \int_0^{\pi/8} \sin(2x) \cos^3(2x) - 4 \int_0^{\pi/8} \sin(2x) \cos(2x) + \int_0^{\pi/8} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} dx$$

$$= -4 \frac{\cos^4(2x)}{4 \cdot 2} \Big|_0^{\pi/8} + 4 \frac{\cos^2(2x)}{2 \cdot 2} \Big|_0^{\pi/8} - \frac{\log[\cos(2x)]}{2} \Big|_0^{\pi/8}$$

$$= \frac{1}{2} [-\cos^4(\pi/4) + 1 + 2 \cos^2(\pi/4) - 2 - \log[\cos(\pi/4)]] = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \log 2.$$

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e, dal Teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione della funzione composta, si ha

$$F'(x) = 2x[x^2 f(x^2) - x^2 e^{-x^2}] \geq 0,$$

dove l'ultima disuguaglianza è conseguenza del criterio di monotonia. Tenendo conto che siamo interessati al comportamento per $x \rightarrow -\infty$ (cioè per $x < 0$) e ricordando che per ipotesi $f > 0$ su tutto \mathbb{R} , dividendo per x^3 , ricaviamo

$$f(x^2) - e^{-x^2} \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x^2) \leq e^{-x^2},$$

ovvero $0 < f(x^2) \leq e^{-x^2} \rightarrow 0$, per $x \rightarrow -\infty$. Il risultato segue, quindi, dal teorema dei due carabinieri.