SOLUZIONI COMPITO del 10/02/2015
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1
Ricordando che per $x \to 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\,, \qquad \text{con } x = 1 - \cos\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\,, \qquad \text{con } x = \tfrac{1}{\sqrt{n}},$$

otteniamo

$$\begin{aligned} a_n &= \left[1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] - \frac{\left[1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^3}{6} + o\left(\left[1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^3\right) \\ &= \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{720n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{720n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{720n^3} - \frac{1}{48n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} - \frac{7}{360n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Esercizio 2
Ricordando che

$$\begin{aligned} &\sinh t \sim t\,, && \text{con } t = x^2-9 \text{ oppure } t = \log(4-x),\ x \to 3, \\ &\log(1+t) \sim t\,, && \text{con } t = 3-x,\ x \to 3, \\ &\exp t - 1 \sim t\,, && \text{con } t = \sinh\big(\log(4-x)\big),\ x \to 3, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\lim_{x\to3} \frac{\sinh(x^2-9)}{\exp[\sinh\big(\log(4-x)\big)]-1} = \lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{\sinh\big(\log(4-x)\big)} = \lim_{x\to3} \frac{(x+3)(x-3)}{\log(4-x)} =$$
$$\lim_{x\to3} \frac{6(x-3)}{\log[1+(3-x)]} = \lim_{x\to3} \frac{6(x-3)}{3-x} = -6\,.$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è $4\lambda^2 - 3 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm\sqrt{3}/2$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{3}x/2} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x/2}$. Inoltre, tenendo conto che $(\cos x)^2 - (\sin x)^2 = \cos(2x)$, otteniamo che una soluzione particolare dell'equazione completa sarà della forma $y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$, da cui, derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa otteniamo $-16A\cos(2x) - 16B\sin(2x) - 3A\cos(2x) - 3B\sin(2x) = 38\cos(2x)$, che fornisce $A = -2$ e $B = 0$. Quindi l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{3}x/2} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x/2} - 2\cos(2x)$.

Infine, poiché $\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x/2} \to 0$ mentre $\mathrm{e}^{\sqrt{3}x/2} \to +\infty$, per $x \to +\infty$, e il $\cos(2x)$ è limitato su tutto $\mathbb{R}$, l'integrale generale si manterrà limitato per $x \to +\infty$, se e solo se $C_1 = 0$. Quindi ci sono infinite soluzioni dell'equazione differenziale proposta soddisfacenti alla condizione richiesta e sono date da $y(x) = C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x/2} - 2\cos(2x)$ con $C_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che il dominio di F è tutto $\mathbb{R}$, poiché $1 + x^2 \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi, se $t \in [1, 1 + x^2]$, si ha che $t > 0$, per cui sono ben definiti $\sqrt{t}$ e $\log \sqrt{t}$ ed, inoltre, $1 + |t| \neq 0$.

Per studiare gli eventuali estremanti, cominciamo a calcolare la derivata di F, che grazie al Teorema di Torricelli ed al teorema di derivazione della funzione composta, risulta essere

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x \, \frac{\log^2 \sqrt{1+x^2} - \log \sqrt{1+x^2}}{1 + |1 + x^2|} \\ &= 2x \frac{\log \sqrt{1+x^2}(\log \sqrt{1+x^2} - 1)}{2 + x^2} \begin{cases} > 0 & \text{se } -\sqrt{\mathrm{e}^2 - 1} < x < 0 \text{ oppure } x > \sqrt{\mathrm{e}^2 - 1}, \\ = 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = \pm\sqrt{\mathrm{e}^2 - 1}, \\ < 0 & \text{se } x < -\sqrt{\mathrm{e}^2 - 1} \text{ oppure } 0 < x < \sqrt{\mathrm{e}^2 - 1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $x = 0$ è punto di massimo relativo e $x = \pm\sqrt{\mathrm{e}^2 - 1}$ sono punti di minimo relativo.

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^2([0, +\infty))$; quindi, una condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia concava è che $F''(x) \leq 0$, per ogni $x \geq 0$. Utilizzando il Teorema di Torricelli, ricaviamo

$$F'(x) = \int_0^x f(s)\, ds + f(x)\,, \qquad F''(x) = f(x) + f'(x)\,.$$

Imponendo che la derivata seconda sia non positiva e tenendo conto della positività di f, otteniamo

$$f(x) + f'(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) \leq -f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} \leq -1\,.$$

Integrando, ora, ambo i membri tra 0 e $x > 0$, tenendo conto della condizione iniziale e della monotonia dell'integrale, si ha

$$\log[f(x)] = \int_1^{f(x)} \frac{df}{f} = \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt \leq -\int_0^x 1\, dt = -x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}\,.$$

Abbiamo quindi ottenuto $0 < f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$, per $x \geq 0$.

TEMA B

Esercizio 1

Ricordando che per $x \to 0$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\,, \qquad \text{con } x = 1 - \cosh\left(\tfrac{1}{n^{5/2}}\right),$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\,, \qquad \text{con } x = \tfrac{1}{n^{5/2}},$$

otteniamo

$$\begin{aligned} a_n &= \left[1 - \cosh\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)\right] + \frac{\left[1 - \cosh\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)\right]^3}{6} + o\left(\left[1 - \cosh\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)\right]^3\right) \\ &= \left[-\frac{1}{2n^5} - \frac{1}{24n^{10}} - \frac{1}{720n^{15}} + o\left(\frac{1}{n^{15}}\right)\right] - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2n^5} - \frac{1}{24n^{10}} - \frac{1}{720n^{15}} + o\left(\frac{1}{n^{15}}\right)\right]^3 + o\left(\frac{1}{n^{15}}\right) \\ &= \left[-\frac{1}{2n^5} - \frac{1}{24n^{10}} - \frac{1}{720n^{15}} - \frac{1}{48n^{15}}\right] + o\left(\frac{1}{n^{15}}\right) = -\frac{1}{2n^5} - \frac{1}{24n^{10}} - \frac{1}{45n^{15}} + o\left(\frac{1}{n^{15}}\right). \end{aligned}$$

Esercizio 2

Ricordando che

$$\sin t \sim t\,, \qquad \text{con } t = x^2 - 4 \text{ oppure } t = \log(x-1),\ x \to 2,$$
$$\log(1+t) \sim t\,, \qquad \text{con } t = x - 2 \text{ oppure } t = \sin\big(\log(x-1)\big),\ x \to 2,$$

otteniamo

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log[1 + \sin\big(\log(x-1)\big)]}{\sin(x^2-4)} = \lim_{x\to 2} \frac{\sin\big(\log(x-1)\big)}{(x^2-4)} = \lim_{x\to 2} \frac{\log(x-1)}{(x+2)(x-2)} =$$
$$\lim_{x\to 2} \frac{\log[1 + (x-2)]}{4(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{4(x-2)} = 1/4\,.$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è $4\lambda^2 + 3 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm i\sqrt{3}/2$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1 \cos(\sqrt{3}x/2) + C_2 \sin(\sqrt{3}x/2)$. Inoltre, tenendo conto che $\sin x \, \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$, otteniamo che una soluzione particolare dell'equazione completa sarà della forma $y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$, da cui, derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa otteniamo $-16A\cos(2x) - 16B\sin(2x) + 3A\cos(2x) + 3B\sin(2x) = 26\sin(2x)$, che fornisce $A = 0$ e $B = -2$. Quindi l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\cos(\sqrt{3}x/2) + C_2\sin(\sqrt{3}x/2) - 2\sin(2x)$.
Infine, poiché $\cos(\sqrt{3}x/2)$ e $\sin(\sqrt{3}x/2)$ sono periodiche di periodo $4\pi/\sqrt{3}$ e $\sin(2x)$ è periodico di periodo π, l'integrale generale sarà di periodo π, se e solo se $C_1 = C_2 = 0$. Quindi c'è un'unica soluzione dell'equazione differenziale proposta soddisfacente alla condizione richiesta ed è data da $y(x) = -2\sin(2x)$.

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che il dominio di F è tutto $\mathbb{R}$, poiché $x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi, se $t \in [0, x^2]$, si ha che $t \geq 0$, per cui sono ben definiti $\sqrt{t}$ e $\log(1 + \sqrt{t})$ ed, inoltre, $1 + t^2 \neq 0$.

Per studiare gli eventuali estremanti, cominciamo a calcolare la derivata di F, che grazie al Teorema di Torricelli ed al teorema di derivazione della funzione composta, risulta essere

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x\,\frac{\log^2(1+|x|) - \log(1+|x|)}{1+x^4} \\ &= 2x\frac{\log(1+|x|)(\log(1+|x|)-1)}{1+x^4} \begin{cases} > 0 & \text{se } -(\mathrm{e}-1) < x < 0 \text{ oppure } x > (\mathrm{e}-1), \\ = 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = \pm(\mathrm{e}-1), \\ < 0 & \text{se } x < -(\mathrm{e}-1) \text{ oppure } 0 < x < (\mathrm{e}-1). \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $x = 0$ è punto di massimo relativo e $x = \pm(\mathrm{e}-1)$ sono punti di minimo relativo.

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^2((-\infty, 0])$; quindi, una condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia convessa è che $F''(x) \geq 0$, per ogni $x \leq 0$. Utilizzando il Teorema di Torricelli, ricaviamo

$$F'(x) = \int_x^0 f(s)\, ds + f(x)\,, \qquad F''(x) = -f(x) + f'(x)\,.$$

Imponendo che la derivata seconda sia non negativa e tenendo conto della positività di f, otteniamo

$$-f(x) + f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq f'(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} \geq 1\,.$$

Integrando, ora, ambo i membri tra $x < 0$ e 0, tenendo conto della condizione iniziale e della monotonia dell'integrale, si ha

$$-\log[f(x)] = \int_{f(x)}^1 \frac{df}{f} = \int_x^0 \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt \geq \int_x^0 1\, dt = -x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq \mathrm{e}^x\,.$$

Abbiamo quindi ottenuto $0 < f(x) \leq \mathrm{e}^x$, per $x \leq 0$.

TEMA C

Esercizio 1

Ricordando che per $x \to 0$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\,, \qquad \text{con } x = \cosh\left(\tfrac{1}{n^{7/2}}\right) - 1,$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\,, \qquad \text{con } x = \tfrac{1}{n^{7/2}},$$

otteniamo

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\cosh\left(\frac{1}{n^{7/2}}\right) - 1\right] + \frac{\left[\cosh\left(\frac{1}{n^{7/2}}\right) - 1\right]^3}{6} + o\left(\left[\cosh\left(\frac{1}{n^{7/2}}\right) - 1\right]^3\right) \\ &= \left[\frac{1}{2n^7} + \frac{1}{24n^{14}} + \frac{1}{720n^{21}} + o\left(\frac{1}{n^{21}}\right)\right] + \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2n^7} + \frac{1}{24n^{14}} + \frac{1}{720n^{21}} + o\left(\frac{1}{n^{21}}\right)\right]^3 + o\left(\frac{1}{n^{21}}\right) \\ &= \left[\frac{1}{2n^7} + \frac{1}{24n^{14}} + \frac{1}{720n^{21}} + \frac{1}{48n^{21}}\right] + o\left(\frac{1}{n^{21}}\right) = \frac{1}{2n^7} + \frac{1}{24n^{14}} + \frac{1}{45n^{21}} + o\left(\frac{1}{n^{21}}\right). \end{aligned}$$

Esercizio 2

Ricordando che

$$\sin t \sim t\,, \qquad \text{con } t = 4x^2 - 1 \text{ oppure } t = \log(4x-1),\ x \to 1/2,$$
$$\log(1+t) \sim t\,, \qquad \text{con } t = 4x - 2 \text{ oppure } t = \sin\big(\log(4x-1)\big),\ x \to 1/2,$$

otteniamo

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{\log[1 + \sin\big(\log(4x-1)\big)]}{\sin(4x^2-1)} = \lim_{x\to 1/2} \frac{\sin\big(\log(4x-1)\big)}{(4x^2-1)} = \lim_{x\to 1/2} \frac{\log(4x-1)}{(2x+1)(2x-1)} =$$
$$\lim_{x\to 1/2} \frac{\log[1 + (4x-2)]}{2(2x-1)} = \lim_{x\to 1/2} \frac{4x-2}{2(2x-1)} = 1\,.$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è $3\lambda^2 + 4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm i2/\sqrt{3}$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1\cos(2x/\sqrt{3}) + C_2\sin(2x/\sqrt{3})$. Inoltre, tenendo conto che $\sin x\,\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$, otteniamo che una soluzione particolare dell'equazione completa sarà della forma $y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$, da cui, derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa otteniamo $-12A\cos(2x) - 12B\sin(2x) + 4A\cos(2x) + 4B\sin(2x) = -16\sin(2x)$, che fornisce $A = 0$ e $B = 2$. Quindi l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\cos(2x/\sqrt{3}) + C_2\sin(2x/\sqrt{3}) + 2\sin(2x)$.
Infine, poiché $\cos(2x/\sqrt{3})$ e $\sin(2x/\sqrt{3})$ sono periodiche di periodo $\sqrt{3}\pi$ e $\sin(2x)$ è periodico di periodo π, l'integrale generale sarà di periodo π, se e solo se $C_1 = C_2 = 0$. Quindi c'è un'unica soluzione dell'equazione differenziale proposta soddisfacente alla condizione richiesta ed è data da $y(x) = 2\sin(2x)$.

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che il dominio di F è tutto $\mathbb{R}$, poiché $x^4 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi, se $t \in [0, x^4]$, si ha che $t \geq 0$, per cui sono ben definiti $\sqrt[4]{t}$ e $\log(1 + \sqrt[4]{t})$ ed, inoltre, $1 + t^2 \neq 0$.

Per studiare gli eventuali estremanti, cominciamo a calcolare la derivata di F, che grazie al Teorema di Torricelli ed al teorema di derivazione della funzione composta, risulta essere

$$\begin{aligned} F'(x) &= -4x^3\,\frac{\log^2(1+|x|) - \log(1+|x|)}{1+x^8} \\ &= -4x^3\,\frac{\log(1+|x|)(\log(1+|x|) - 1)}{1+x^8} \begin{cases} < 0 & \text{se } -(\mathrm{e}-1) < x < 0 \text{ oppure } x > (\mathrm{e}-1), \\ = 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = \pm(\mathrm{e}-1), \\ > 0 & \text{se } x < -(\mathrm{e}-1) \text{ oppure } 0 < x < (\mathrm{e}-1). \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $x = 0$ è punto di minimo relativo e $x = \pm(\mathrm{e}-1)$ sono punti di massimo relativo.

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^2((-\infty, 0])$; quindi, una condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia convessa è che $F''(x) \geq 0$, per ogni $x \leq 0$. Utilizzando il Teorema di Torricelli, ricaviamo

$$F'(x) = \int_x^0 f(s)\, ds + f(x)\,, \qquad F''(x) = -f(x) + f'(x)\,.$$

Imponendo che la derivata seconda sia non negativa e tenendo conto della positività di f, otteniamo

$$-f(x) + f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq f'(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} \geq 1\,.$$

Integrando, ora, ambo i membri tra $x < 0$ e 0, tenendo conto della condizione iniziale e della monotonia dell'integrale, si ha

$$-\log[f(x)] = \int_{f(x)}^1 \frac{df}{f} = \int_x^0 \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt \geq \int_x^0 1\, dt = -x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq \mathrm{e}^x\,.$$

Abbiamo quindi ottenuto $0 < f(x) \leq \mathrm{e}^x$, per $x \leq 0$.

TEMA D

Esercizio 1
Ricordando che per $x \to 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\,, \qquad \text{con } x = \cos\left(\tfrac{1}{n^{3/2}}\right) - 1,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\,, \qquad \text{con } x = \tfrac{1}{n^{3/2}},$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
a_n &= \left[\cos\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - 1\right] - \frac{\left[\cos\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - 1\right]^3}{6} + o\left(\left[\cos\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - 1\right]^3\right) \\
&= \left[-\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{24n^6} - \frac{1}{720n^9} + o\left(\frac{1}{n^9}\right)\right] - \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{24n^6} - \frac{1}{720n^9} + o\left(\frac{1}{n^9}\right)\right]^3 + o\left(\frac{1}{n^9}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{24n^6} - \frac{1}{720n^9} + \frac{1}{48n^9} + o\left(\frac{1}{n^9}\right) = -\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{24n^6} + \frac{7}{360n^9} + o\left(\frac{1}{n^9}\right).
\end{aligned}$$

Esercizio 2
Ricordando che

$$\begin{aligned}
&\sinh t \sim t\,, \qquad \text{con } t = 1 - 9x^2 \text{ oppure } t = \log(12x - 3),\ x \to 1/3, \\
&\log(1 + t) \sim t\,, \qquad \text{con } t = 12x - 4,\ x \to 1/3, \\
&\exp t - 1 \sim t\,, \qquad \text{con } t = \sinh\big(\log(12x - 3)\big),\ x \to 1/3,
\end{aligned}$$

otteniamo

$$\lim_{x\to 1/3} \frac{\sinh(1 - 9x^2)}{\exp[\sinh\big(\log(12x - 3)\big)] - 1} = \lim_{x\to 1/3} \frac{1 - 9x^2}{\sinh\big(\log(12x - 3)\big)} = \lim_{x\to 1/3} \frac{(1 + 3x)(1 - 3x)}{\log(12x - 3)} =$$
$$\lim_{x\to 1/3} \frac{2(1 - 3x)}{\log[1 + (12x - 4)]} = \lim_{x\to 1/3} \frac{2(1 - 3x)}{12x - 4} = -1/2\,.$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è $3\lambda^2 - 4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 2/\sqrt{3}$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1 e^{2x/\sqrt{3}} + C_2 e^{-2x/\sqrt{3}}$. Inoltre, tenendo conto che $(\sin x)^2 - (\cos x)^2 = -\cos(2x)$, otteniamo che una soluzione particolare dell'equazione completa sarà della forma $y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$, da cui, derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa otteniamo $-12A\cos(2x) - 12B\sin(2x) - 4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) = -32\cos(2x)$, che fornisce $A = 2$ e $B = 0$. Quindi l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1 e^{2x/\sqrt{3}} + C_2 e^{-2x/\sqrt{3}} + 2\cos(2x)$.

Infine, poiché $e^{2x/\sqrt{3}} \to 0$ mentre $e^{-2x/\sqrt{3}} \to +\infty$, per $x \to -\infty$, e il $\cos(2x)$ è limitato su tutto $\mathbb{R}$, l'integrale generale si manterrà limitato per $x \to -\infty$, se e solo se $C_2 = 0$. Quindi ci sono infinite soluzioni dell'equazione differenziale proposta soddisfacenti alla condizione richiesta e sono date da $y(x) = C_1 e^{2x/\sqrt{3}} + 2\cos(2x)$ con $C_1 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4
Innanzitutto, osserviamo che il dominio di F è tutto $\mathbb{R}$, poiché $1 + x^4 \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi, se $t \in [1, 1 + x^4]$, si ha che $t > 0$, per cui sono ben definiti $\sqrt[4]{t}$ e $\log\sqrt[4]{t}$ ed, inoltre, $1 + |t| \neq 0$.

Per studiare gli eventuali estremanti, cominciamo a calcolare la derivata di F, che grazie al Teorema di Torricelli ed al teorema di derivazione della funzione composta, risulta essere

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -4x^3\,\frac{\log^2\sqrt[4]{1 + x^4} - \log\sqrt[4]{1 + x^4}}{1 + |1 + x^4|} \\
&= -4x^3\,\frac{\log\sqrt[4]{1 + x^4}(\log\sqrt[4]{1 + x^4} - 1)}{2 + x^4}
\begin{cases}
< 0 & \text{se } -\sqrt[4]{e^4 - 1} < x < 0 \text{ oppure } x > \sqrt[4]{e^4 - 1}, \\
= 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = \pm\sqrt[4]{e^4 - 1}, \\
> 0 & \text{se } x < -\sqrt[4]{e^4 - 1} \text{ oppure } 0 < x < \sqrt[4]{e^4 - 1}.
\end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi $x = 0$ è punto di minimo relativo e $x = \pm\sqrt[4]{\mathrm{e}^4 - 1}$ sono punti di massimo relativo.

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; quindi, una condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia concava è che $F''(x) \leq 0$, per ogni $x \geq 0$. Utilizzando il Teorema di Torricelli, ricaviamo

$$F'(x) = \int_0^x f(s)\,ds + f(x)\,, \qquad F''(x) = f(x) + f'(x)\,.$$

Imponendo che la derivata seconda sia non positiva e tenendo conto della positività di f, otteniamo

$$f(x) + f'(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) \leq -f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} \leq -1\,.$$

Integrando, ora, ambo i membri tra 0 e $x > 0$, tenendo conto della condizione iniziale e della monotonia dell'integrale, si ha

$$\log[f(x)] = \int_1^{f(x)} \frac{df}{f} = \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \leq -\int_0^x 1\,dt = -x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}\,.$$

Abbiamo quindi ottenuto $0 < f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$, per $x \geq 0$.