ANALISI I (h. 2.30) Appello del **11 Febbraio 2020**	**9 CFU - TEMA A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Energetica

1. Data la famiglia di funzioni $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_\alpha(x) = x^7 e^{\alpha x^4}$, $\alpha > 0$, determinare le eventuali primitive $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano le condizioni $F_\alpha(0) = -1$ ed $F_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}\right) = 3$.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) - 8y(x) = e^{-2x} .$$

a) Determinare l'integrale generale.
b) Trovare le eventuali soluzioni y per le quali esiste finito

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} .$$

---

3. Calcolare il seguente

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} (e^{2\sqrt{t}} - 1 - 2\sqrt{t} - 2t)\, dt}{\sin(x^5)} .$$

---

4. Data la funzione $f(x) = \log(e^{2x} - 2e^x + 4) + \log 4$, determinare i punti di massimo e minimo relativo ed assoluto per f nell'intervallo $[-\log 2, \log 2]$.

5.

1. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

2. Sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ una funzione crescente e convessa sul semiasse positivo delle ascisse. Dimostrare che la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^{x^2} f'(t)\, dt$$

è anch'essa convessa.

ANALISI I (h. 2.30) Appello del **11 Febbraio 2020**	**9 CFU - TEMA B** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Energetica

1. Data la famiglia di funzioni $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_\alpha(x) = x^3 \sin(\alpha x^2)$, $\alpha > 0$, determinare le eventuali primitive $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano le condizioni $F_\alpha(0) = 0$ ed $F_\alpha\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = e^{2x} .$$

a) Determinare l'integrale generale.
b) Trovare le eventuali soluzioni y per le quali esiste finito

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} .$$

---

3. Calcolare il seguente

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^3} [\sin(4\sqrt[3]{t}) - 4\sqrt[3]{t} + \tfrac{32}{3}t]\, dt}{e^{x^8} - 1} .$$

---

4. Data $f(x) = -\log 4 - \log(3e^{2x} - 6e^x + 4)$, determinare i punti di massimo e minimo relativo ed assoluto per f nell'intervallo $[-\log 2, \log 2]$.

5.

1. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.
2. Sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ una funzione decrescente e concava sul semiasse positivo delle ascisse. Dimostrare che la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^{x^4} f'(t)\, dt$$

è anch'essa concava.

ANALISI I (h. 2.30) Appello del **11 Febbraio 2020**	**9 CFU - TEMA C** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Energetica

1. Data la famiglia di funzioni $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_\alpha(x) = x^3 \cos(\alpha x^2)$, $\alpha > 0$, determinare le eventuali primitive $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano le condizioni $F_\alpha(0) = 0$ ed $F_\alpha\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = -4$.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = \mathrm{e}^{-4x} .$$

a) Determinare l'integrale generale.
b) Trovare le eventuali soluzioni y per le quali esiste finito

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} .$$

---

3. Calcolare il seguente

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} [\sin(2\sqrt{t}) - 2\sqrt{t} + \tfrac{4}{3}\sqrt{t^3}]\, dt}{\mathrm{e}^{x^7} - 1} .$$

---

4. Data $f(x) = \log 6 - \log(4\mathrm{e}^{2x} - 8\mathrm{e}^x + 5)$, determinare i punti di massimo e minimo relativo ed assoluto per f nell'intervallo $[-\log 2, \log 2]$.

5.
1. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.
2. Sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ una funzione decrescente e concava sul semiasse positivo delle ascisse. Dimostrare che la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^{x^4} f'(t)\, dt$$

è anch'essa concava.

ANALISI I (h. 2.30) Appello del **11 Febbraio 2020**	**9 CFU - TEMA D** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Energetica

1. Data la famiglia di funzioni $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_\alpha(x) = x^5 e^{\alpha x^3}$, $\alpha > 0$, determinare le eventuali primitive $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano le condizioni $F_\alpha(0) = 1$ ed $F_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\right) = 4$.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) - 8y(x) = e^{4x} .$$

a) Determinare l'integrale generale.
b) Trovare le eventuali soluzioni y per le quali esiste finito

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y(x)}{x} .$$

---

3. Calcolare il seguente

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^3} \left(e^{3\sqrt[3]{t}} - 1 - 3\sqrt[3]{t} - \tfrac{9}{2}\sqrt[3]{t^2}\right) dt}{\sin(x^6)} .$$

---

4. Data $f(x) = \log(2e^{2x} - 4e^x + 5) - \log 7$, determinare i punti di massimo e minimo relativo ed assoluto per f nell'intervallo $[-\log 2, \log 2]$.

5.

1. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

2. Sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ una funzione crescente e convessa sul semiasse positivo delle ascisse. Dimostrare che la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^{x^2} f'(t)\, dt$$

è anch'essa convessa.