SOLUZIONI COMPITO dell'11/02/2020
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

L'insieme delle primitive F_α delle funzioni assegnate, che soddisfano la condizione $F_\alpha(0) = -1$, è costituito dalla famiglia di funzioni integrali

$$F_\alpha(x) = -1 + \int_0^x t^7 \mathrm{e}^{\alpha t^4}\, dt = -1 + \int_0^x t^4 \mathrm{e}^{\alpha t^4} t^3\, dt\,, \qquad \alpha > 0\,.$$

L'espressione esplicita di F_α si ottiene effettuando la sostituzione $s = t^4$, da cui $t^3\,dt = ds/4$, $s(0) = 0$ e $s(x) = x^4$, ed integrando poi per parti. In tal modo si ricava

$$\begin{aligned} F_\alpha(x) &= -1 + \int_0^x t^7 \mathrm{e}^{\alpha t^4}\, dt = -1 + \frac{1}{4}\int_0^{x^4} s\mathrm{e}^{\alpha s}\, ds \\ &= -1 + \frac{1}{4\alpha}\, s\mathrm{e}^{\alpha s}\Big|_0^{x^4} - \frac{1}{4\alpha}\int_0^{x^4} \mathrm{e}^{\alpha s}\, ds = -1 + \frac{1}{4\alpha}\, x^4\mathrm{e}^{\alpha x^4} - \frac{1}{4\alpha^2}\,\mathrm{e}^{\alpha x^4} + \frac{1}{4\alpha^2}\,. \end{aligned}$$

Imponendo ora l'ulteriore condizione $F_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}\right) = 3$, si ricava

$$-1 + \frac{1}{4\alpha^2}\,\mathrm{e} - \frac{1}{4\alpha^2}\,\mathrm{e} + \frac{1}{4\alpha^2} = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{4\alpha^2} = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{4}\,.$$

Quindi, esiste un'unica primitiva soddisfacente tutte le condizioni richieste ed è data da

$$F(x) = -1 + x^4\mathrm{e}^{x^4/4} - 4\,\mathrm{e}^{x^4/4} + 4 = (x^4 - 4)\mathrm{e}^{x^4/4} + 3\,.$$

Esercizio 2

a) L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -2, 4$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{4x}\,.$$

Dal metodo di somiglianza si ricava che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-2x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{-2x}(1 - 2x)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{-2x}(4x - 4)$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $4Ax\mathrm{e}^{-2x} - 4A\mathrm{e}^{-2x} + 4Ax\mathrm{e}^{-2x} - 2A\mathrm{e}^{-2x} - 8Ax\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}$, cioè $A = -1/6$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{6}x\mathrm{e}^{-2x}\,,$$

b) Calcolando

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{4x}}{x} - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{C_2\mathrm{e}^{4x}}{x}\,,$$

e quest'ultimo limite è finito se e solo se $C_2 = 0$. Quindi, si ottengono infinite soluzioni della forma $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{6}x\mathrm{e}^{-2x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Poiché la funzione $t \mapsto e^{2\sqrt{t}} - 1 - 2\sqrt{t} - 2t$ è una funzione continua su tutto $[0, +\infty)$, essa risulta anche integrabile e quindi il numeratore del limite proposto è infinitesimo per $x \to 0^+$. Poiché anche il denominatore è infinitesimo, tenendo conto che $\sin(x^5) \sim x^5$, per $x \to 0^+$, possiamo applicare il Teorema di de L'Hospital ed ottenere

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} (e^{2\sqrt{t}} - 1 - 2\sqrt{t} - 2t)\, dt}{\sin(x^5)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} (e^{2\sqrt{t}} - 1 - 2\sqrt{t} - 2t)\, dt}{x^5} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x(e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2)}{5x^4},$$

dove abbiamo utilizzato il Teorema di Torricelli ed il teorema di derivazione della funzione composta per calcolare la derivata della funzione integrale composta al numeratore. A questo punto, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $x \mapsto e^{2x}$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x(e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2)}{5x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2[1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} - 1 - 2x - 2x^2]}{5x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2 \cdot 8x^3/6}{5x^3} = \frac{8}{15}.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che $e^{2x} - 2e^x + 4 = (e^x - 1)^2 + 3 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione proposta è ben definita su tutto l'asse reale. Inoltre essa è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-\log 2, \log 2]$, quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Iniziamo studiando gli estremanti locali di f, calcolandone la derivata e studiandone il segno in $[-\log 2, \log 2]$. Si ottiene

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} - 2e^x + 4} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 2e^x + 4}\,(e^x - 1) \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < x < \log 2, \\ = 0 & \text{per } x = 0, \\ < 0 & \text{per } -\log 2 < x < 0. \end{cases}$$

Quindi, dal criterio di monotonia, si ricava che $x = \pm \log 2$ sono punti di massimo locale per f, mentre $x = 0$ è punto di minimo locale per f. Essendoci un unico punto di minimo locale, esso è necessariamente anche il punto di minimo assoluto; per determinare invece il punto di massimo assoluto, valutiamo la funzione nei due punti di massimo locale. In questo modo si ottiene

$$f(-\log 2) = \log\left(\frac{13}{4}\right) + \log 4 = \log(13), \qquad f(\log 2) = \log 4 + \log 4 = \log(16);$$

quindi $x = -\log 2$ risulta essere punto di massimo locale, mentre $x = \log 2$ risulta essere punto di massimo assoluto.

Esercizio 5

a) Per l'enunciato e la dimostrazione, si veda il libro di testo.

b) Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ed è crescente e convessa sul semiasse positivo delle ascisse, si ha che $f'(x), f''(x) \geq 0$, per $x \geq 0$. Inoltre, dal teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione della funzione composta, otteniamo

$$F'(x) = 2xf'(x^2), \qquad F''(x) = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2).$$

Pertanto, F è convessa, in quanto $F'' \geq 0$, essendo somma di funzioni non negative.

TEMA B

Esercizio 1

L'insieme delle primitive F_α delle funzioni assegnate, che soddisfano la condizione $F_\alpha(0) = 0$, è costituito dalla famiglia di funzioni integrali

$$F_\alpha(x) = \int_0^x t^3 \sin(\alpha t^2)\, dt = \int_0^x t^2 \sin(\alpha t^2)\, t\, dt\,, \qquad \alpha > 0\,.$$

L'espressione esplicita di F_α si ottiene effettuando la sostituzione $s = t^2$, da cui $t\,dt = ds/2$, $s(0) = 0$ e $s(x) = x^2$, ed integrando poi per parti. In tal modo si ricava

$$\begin{aligned} F_\alpha(x) &= \int_0^x t^3 \sin(\alpha t^2)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} s \sin(\alpha s)\, ds \\ &= -\frac{1}{2\alpha}\, s\cos(\alpha s)\Big|_0^{x^2} + \frac{1}{2\alpha}\int_0^{x^2} \cos(\alpha s)\, ds = -\frac{1}{2\alpha}\, x^2 \cos(\alpha x^2) + \frac{1}{2\alpha^2}\sin(\alpha x^2)\,. \end{aligned}$$

Imponendo ora l'ulteriore condizione $F_\alpha\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \frac{\pi}{2}$, si ricava

$$-\frac{\pi}{2\alpha^2}\cos\pi = \frac{\pi}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\pi}{2\alpha^2} = \frac{\pi}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 1\,.$$

Quindi, esiste un'unica primitiva soddisfacente tutte le condizioni richieste ed è data da

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2\cos(x^2) + \frac{1}{2}\sin(x^2)\,.$$

Esercizio 2

a) L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 2, -4$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-4x}\,.$$

Dal metodo di somiglianza si ricava che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{2x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{2x}(1 + 2x)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{2x}(4x + 4)$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $4Ax\mathrm{e}^{2x} + 4A\mathrm{e}^{2x} + 4Ax\mathrm{e}^{2x} + 2A\mathrm{e}^{2x} - 8Ax\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{2x}$, cioè $A = 1/6$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-4x} + \frac{1}{6}x\mathrm{e}^{2x}\,,$$

b) Calcolando

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-4x}}{x} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{2x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{C_2\mathrm{e}^{-4x}}{x}\,,$$

e quest'ultimo limite è finito se e solo se $C_2 = 0$. Quindi, si ottengono infinite soluzioni della forma $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{6}x\mathrm{e}^{2x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Poiché la funzione $t \mapsto \sin(4\sqrt[3]{t}) - 4\sqrt[3]{t} + \frac{32}{3}t$ è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, essa risulta anche integrabile e quindi il numeratore del limite proposto è infinitesimo per $x \to 0^+$. Poiché anche il denominatore è infinitesimo, tenendo conto che $\mathrm{e}^{x^8} - 1 \sim x^8$, per $x \to 0^+$, possiamo applicare il Teorema di de L'Hospital ed ottenere

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^3}[\sin(4\sqrt[3]{t}) - 4\sqrt[3]{t} + \tfrac{32}{3}t]\, dt}{\mathrm{e}^{x^8} - 1} = \lim_{x\to0^+}\frac{\displaystyle\int_0^{x^3}[\sin(4\sqrt[3]{t}) - 4\sqrt[3]{t} + \tfrac{32}{3}t]\, dt}{x^8} \overset{H}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{3x^2[\sin(4x) - 4x + \frac{32}{3}x^3]}{8x^7}\,,$$

dove abbiamo utilizzato il Teorema di Torricelli ed il teorema di derivazione della funzione composta per calcolare la derivata della funzione integrale composta al numeratore. A questo punto, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quinto ordine per la funzione $x \mapsto \sin(4x)$, otteniamo

$$\lim_{x\to0^+}\frac{3x^2[\sin(4x) - 4x + \frac{32}{3}x^3]}{8x^7} = \lim_{x\to0^+}\frac{3[4x - \frac{(4x)^3}{3!} + \frac{(4x)^5}{5!} - 4x + \frac{32}{3}x^3]}{8x^5} = \lim_{x\to0^+}\frac{3\cdot 128\, x^5/15}{8x^5} = \frac{16}{5}\,.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che $3e^{2x} - 6e^x + 4 = 3(e^x - 1)^2 + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione proposta è ben definita su tutto l'asse reale. Inoltre essa è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-\log 2, \log 2]$, quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Iniziamo studiando gli estremanti locali di f, calcolandone la derivata e studiandone il segno in $[-\log 2, \log 2]$. Si ottiene

$$f'(x) = -\frac{6e^{2x} - 6e^x}{3e^{2x} - 6e^x + 4} = \frac{6e^x}{3e^{2x} - 6e^x + 4}\,(1 - e^x) \begin{cases} > 0 & \text{per } -\log 2 < x < 0, \\ = 0 & \text{per } x = 0, \\ < 0 & \text{per } 0 < x < \log 2. \end{cases}$$

Quindi, dal criterio di monotonia, si ricava che $x = \pm \log 2$ sono punti di minimo locale per f, mentre $x = 0$ è punto di massimo locale per f. Essendoci un unico punto di massimo locale, esso è necessariamente anche il punto di massimo assoluto; per determinare invece il punto di minimo assoluto, valutiamo la funzione nei due punti di minimo locale. In questo modo si ottiene

$$f(-\log 2) = -\log 4 - \log\left(\frac{7}{4}\right) = \log\left(\frac{1}{7}\right), \qquad f(\log 2) = -\log 4 - \log 4 = \log\left(\frac{1}{16}\right);$$

quindi $x = -\log 2$ risulta essere punto di minimo locale, mentre $x = \log 2$ risulta essere punto di minimo assoluto.

Esercizio 5

a) Per l'enunciato e la dimostrazione, si veda il libro di testo.

b) Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ed è decrescente e concava sul semiasse positivo delle ascisse, si ha che $f'(x), f''(x) \leq 0$, per $x \geq 0$. Inoltre, dal teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione della funzione composta, otteniamo

$$F'(x) = 4x^3 f'(x^4), \qquad F''(x) = 12x^2 f'(x^4) + 16x^6 f''(x^4).$$

Pertanto, F è concava, in quanto $F'' \leq 0$, essendo somma di funzioni non positive.

TEMA C

Esercizio 1

L'insieme delle primitive F_α delle funzioni assegnate, che soddisfano la condizione $F_\alpha(0) = 0$, è costituito dalla famiglia di funzioni integrali

$$F_\alpha(x) = \int_0^x t^3 \cos(\alpha t^2)\, dt = \int_0^x t^2 \cos(\alpha t^2)\, t\, dt\,, \qquad \alpha > 0\,.$$

L'espressione esplicita di F_α si ottiene effettuando la sostituzione $s = t^2$, da cui $t\,dt = ds/2$, $s(0) = 0$ e $s(x) = x^2$, ed integrando poi per parti. In tal modo si ricava

$$\begin{aligned} F_\alpha(x) &= \int_0^x t^3 \cos(\alpha t^2)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} s\cos(\alpha s)\, ds \\ &= \frac{1}{2\alpha}\, s\sin(\alpha s)\Big|_0^{x^2} - \frac{1}{2\alpha}\int_0^{x^2} \sin(\alpha s)\, ds = \frac{1}{2\alpha}\, x^2\sin(\alpha x^2) + \frac{1}{2\alpha^2}\cos(\alpha x^2) - \frac{1}{2\alpha^2}\,. \end{aligned}$$

Imponendo ora l'ulteriore condizione $F_\alpha\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = -4$, si ricava

$$\frac{1}{2\alpha^2}\cos\pi - \frac{1}{2\alpha^2} = -4 \qquad\Longrightarrow\qquad -\frac{1}{\alpha^2} = -4 \qquad\Longrightarrow\qquad \alpha = \frac{1}{2}\,.$$

Quindi, esiste un'unica primitiva soddisfacente tutte le condizioni richieste ed è data da

$$F(x) = x^2\sin(x^2/2) + 2\cos(x^2/2) - 2\,.$$

Esercizio 2

a) L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 2, -4$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-4x}\,.$$

Dal metodo di somiglianza si ricava che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-4x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{-4x}(1-4x)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{-4x}(16x-8)$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $16Ax\mathrm{e}^{-4x} - 8A\mathrm{e}^{-4x} - 8Ax\mathrm{e}^{-4x} + 2A\mathrm{e}^{-4x} - 8Ax\mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{-4x}$, cioè $A = -1/6$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-4x} - \frac{1}{6}x\mathrm{e}^{-4x}\,,$$

b) Calcolando

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-4x}}{x} - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{C_1\mathrm{e}^{2x}}{x}\,,$$

e quest'ultimo limite è finito se e solo se $C_1 = 0$. Quindi, si ottengono infinite soluzioni della forma $y(x) = C_2\mathrm{e}^{-4x} - \frac{1}{6}x\mathrm{e}^{-4x}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Poiché la funzione $t \mapsto \sin(2\sqrt{t}) - 2\sqrt{t} + \frac{4}{3}\sqrt{t^3}$ è una funzione continua su tutto $[0,+\infty)$, essa risulta anche integrabile e quindi il numeratore del limite proposto è infinitesimo per $x \to 0^+$. Poiché anche il denominatore è infinitesimo, tenendo conto che $\mathrm{e}^{x^7} - 1 \sim x^7$, per $x \to 0^+$, possiamo applicare il Teorema di de L'Hospital ed ottenere

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}[\sin(2\sqrt{t}) - 2\sqrt{t} + \tfrac{4}{3}\sqrt{t^3}]\, dt}{\mathrm{e}^{x^7} - 1} = \lim_{x\to0^+}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}[\sin(2\sqrt{t}) - 2\sqrt{t} + \tfrac{4}{3}\sqrt{t^3}]\, dt}{x^7} \overset{H}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{2x[\sin(2x) - 2x + \frac{4}{3}x^3]}{7x^6}\,,$$

dove abbiamo utilizzato il Teorema di Torricelli ed il teorema di derivazione della funzione composta per calcolare la derivata della funzione integrale composta al numeratore. A questo punto, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quinto ordine per la funzione $x \mapsto \sin(2x)$, otteniamo

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2x[\sin(2x) - 2x + \frac{4}{3}x^3]}{7x^6} = \lim_{x\to0^+}\frac{2[2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - 2x + \frac{4}{3}x^3]}{7x^5} = \lim_{x\to0^+}\frac{2\cdot 4x^5/15}{7x^5} = \frac{8}{105}\,.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che $4e^{2x} - 8e^x + 5 = 4(e^x - 1)^2 + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione proposta è ben definita su tutto l'asse reale. Inoltre essa è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-\log 2, \log 2]$, quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Iniziamo studiando gli estremanti locali di f, calcolandone la derivata e studiandone il segno in $[-\log 2, \log 2]$. Si ottiene

$$f'(x) = -\frac{8e^{2x} - 8e^x}{4e^{2x} - 8e^x + 5} = \frac{8e^x}{4e^{2x} - 8e^x + 5}(1 - e^x) \begin{cases} > 0 & \text{per } -\log 2 < x < 0, \\ = 0 & \text{per } x = 0, \\ < 0 & \text{per } 0 < x < \log 2. \end{cases}$$

Quindi, dal criterio di monotonia, si ricava che $x = \pm \log 2$ sono punti di minimo locale per f, mentre $x = 0$ è punto di massimo locale per f. Essendoci un unico punto di massimo locale, esso è necessariamente anche il punto di massimo assoluto; per determinare invece il punto di minimo assoluto, valutiamo la funzione nei due punti di minimo locale. In questo modo si ottiene

$$f(-\log 2) = \log 6 - \log 2 = \log 3\,, \qquad f(\log 2) = \log 6 - \log 5 = \log\left(\frac{6}{5}\right)\;;$$

quindi $x = -\log 2$ risulta essere punto di minimo locale, mentre $x = \log 2$ risulta essere punto di minimo assoluto.

Esercizio 5

a) Per l'enunciato e la dimostrazione, si veda il libro di testo.

b) Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ed è decrescente e concava sul semiasse positivo delle ascisse, si ha che $f'(x), f''(x) \leq 0$, per $x \geq 0$. Inoltre, dal teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione della funzione composta, otteniamo

$$F'(x) = 4x^3 f'(x^4)\,, \qquad F''(x) = 12x^2 f'(x^4) + 16x^6 f''(x^4)\,.$$

Pertanto, F è concava, in quanto $F'' \leq 0$, essendo somma di funzioni non positive.

TEMA D

Esercizio 1

L'insieme delle primitive F_α delle funzioni assegnate, che soddisfano la condizione $F_\alpha(0) = 1$, è costituito dalla famiglia di funzioni integrali

$$F_\alpha(x) = 1 + \int_0^x t^5 e^{\alpha t^3}\, dt = 1 + \int_0^x t^3 e^{\alpha t^3} t^2\, dt\,, \qquad \alpha > 0\,.$$

L'espressione esplicita di F_α si ottiene effettuando la sostituzione $s = t^3$, da cui $t^2\, dt = ds/3$, $s(0) = 0$ e $s(x) = x^3$, ed integrando poi per parti. In tal modo si ricava

$$\begin{aligned} F_\alpha(x) &= 1 + \int_0^x t^5 e^{\alpha t^3}\, dt = 1 + \frac{1}{3}\int_0^{x^3} s e^{\alpha s}\, ds \\ &= 1 + \frac{1}{3\alpha}\, s e^{\alpha s}\Big|_0^{x^3} - \frac{1}{3\alpha}\int_0^{x^3} e^{\alpha s}\, ds = 1 + \frac{1}{3\alpha}\, x^3 e^{\alpha x^3} - \frac{1}{3\alpha^2}\, e^{\alpha x^3} + \frac{1}{3\alpha^2}\,. \end{aligned}$$

Imponendo ora l'ulteriore condizione $F_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\right) = 4$, si ricava

$$1 + \frac{1}{3\alpha^2}\, e - \frac{1}{3\alpha^2}\, e + \frac{1}{3\alpha^2} = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{3\alpha^2} = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{3}\,.$$

Quindi, esiste un'unica primitiva soddisfacente tutte le condizioni richieste ed è data da

$$F(x) = 1 + x^3 e^{x^3/3} - 3\, e^{x^3/3} + 3 = (x^3 - 3)e^{x^3/3} + 4\,.$$

Esercizio 2

a) L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -2, 4$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}\,.$$

Dal metodo di somiglianza si ricava che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Axe^{4x}$, da cui $y_p'(x) = Ae^{4x}(1+4x)$ e $y_p''(x) = Ae^{4x}(16x+8)$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $16Axe^{4x} + 8Ae^{5x} - 8Axe^{4x} - 2Ae^{4x} - 8Axe^{4x} = e^{4x}$, cioè $A = 1/6$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{6} x e^{4x}\,,$$

b) Calcolando

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}}{x} + \frac{1}{6} e^{4x}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{C_1 e^{-2x}}{x}\,,$$

e quest'ultimo limite è finito se e solo se $C_1 = 0$. Quindi, si ottengono infinite soluzioni della forma $y(x) = C_2 e^{4x} + \frac{1}{6} x e^{4x}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Poiché la funzione $t \mapsto e^{3\sqrt[3]{t}} - 1 - 3\sqrt[3]{t} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{t^2}$ è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, essa risulta anche integrabile e quindi il numeratore del limite proposto è infinitesimo per $x \to 0^+$. Poiché anche il denominatore è infinitesimo, tenendo conto che $\sin(x^6) \sim x^6$, per $x \to 0^+$, possiamo applicare il Teorema di de L'Hospital ed ottenere

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^3} (e^{3\sqrt[3]{t}} - 1 - 3\sqrt[3]{t} - \tfrac{9}{2}\sqrt[3]{t^2})\, dt}{\sin(x^6)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^3} (e^{3\sqrt[3]{t}} - 1 - 3\sqrt[3]{t} - \tfrac{9}{2}\sqrt[3]{t^2})\, dt}{x^6} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2[e^{3x} - 1 - 3x - \frac{9}{2}x^2]}{6x^5}\,,$$

dove abbiamo utilizzato il Teorema di Torricelli ed il teorema di derivazione della funzione composta per calcolare la derivata della funzione integrale composta al numeratore. A questo punto, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $x \mapsto e^{3x}$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2[e^{3x} - 1 - 3x - \frac{9}{2}x^2]}{6x^5} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3[1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3!} - 1 - 3x - \frac{9}{2}x^2]}{6x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\cdot 9x^3/2}{6x^3} = \frac{9}{4}\,.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che $2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 5 = 2(\mathrm{e}^x - 1)^2 + 3 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione proposta è ben definita su tutto l'asse reale. Inoltre essa è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-\log 2, \log 2]$, quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Iniziamo studiando gli estremanti locali di f, calcolandone la derivata e studiandone il segno in $[-\log 2, \log 2]$. Si ottiene

$$f'(x) = \frac{4\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 5} = \frac{4\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 5}\,(\mathrm{e}^x - 1) \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < x < \log 2, \\ = 0 & \text{per } x = 0, \\ < 0 & \text{per } \log 2 < x < 0. \end{cases}$$

Quindi, dal criterio di monotonia, si ricava che $x = \pm \log 2$ sono punti di massimo locale per f, mentre $x = 0$ è punto di minimo locale per f. Essendoci un unico punto di minimo locale, esso è necessariamente anche il punto di minimo assoluto; per determinare invece il punto di massimo assoluto, valutiamo la funzione nei due punti di massimo locale. In questo modo si ottiene

$$f(-\log 2) = \log\left(\frac{7}{2}\right) - \log 7 = \log\left(\frac{1}{2}\right), \qquad f(\log 2) = \log 5 - \log 7 = \log\left(\frac{5}{7}\right);$$

quindi $x = -\log 2$ risulta essere punto di massimo locale, mentre $x = \log 2$ risulta essere punto di massimo assoluto.

Esercizio 5

a) Per l'enunciato e la dimostrazione, si veda il libro di testo.

b) Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ed è crescente e convessa sul semiasse positivo delle ascisse, si ha che $f'(x), f''(x) \geq 0$, per $x \geq 0$. Inoltre, dal teorema di Torricelli e dal teorema di derivazione della funzione composta, otteniamo
$$F'(x) = 2xf'(x^2)\,, \qquad F''(x) = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2)\,.$$
Pertanto, F è convessa, in quanto $F'' \geq 0$, essendo somma di funzioni non negative.