SOLUZIONI COMPITO del 11/09/2013
ANALISI MATEMATICA II - 5 CFU
ENERGETICA

Esercizio 1
Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è continua in $(0,1]$; pertanto, per stabilire se è impropriamente integrabile dobbiamo studiare il suo comportamento per $x \to 0^+$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$ e quello al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = x^{7/2}$, otteniamo

$$\frac{\sin x - x}{\log(1+x^{7/2})} \sim \frac{x - \frac{x^3}{6} - x}{x^{7/2}} = -\frac{\frac{x^3}{6}}{x^{7/2}} = -\frac{1}{6\sqrt{x}}\,.$$

Quindi, dal teorema del confronto asintotico per integrali, poiché $7/2 < 1$, l'integrale proposto esiste finito.

Esercizio 2
Applicando il criterio della radice otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{2^n|x^2-4|^n}{n^2}} = \sqrt[n]{2^n|x^2-4|^n}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 2|x^2-4|\,.$$

Quindi la serie converge per $2|x^2-4| < 1$, cioè per $x^2 < 4+1/2$ e $x^2 > 4-1/2$, ovvero $-3/\sqrt{2} < x < -\sqrt{7/2}$ e $\sqrt{7/2} < x < 3/\sqrt{2}$; la serie diverge per $2|x^2-4| > 1$, ovvero $x < -3/\sqrt{2}$, $-\sqrt{7/2} < x < \sqrt{7/2}$ e $x > 3/\sqrt{2}$. Per $x = \pm\sqrt{7/2}$ e $x = \pm 3/\sqrt{2}$ il limite della radice ennesima viene 1 e, quindi, il criterio non dà informazioni. Tuttavia, sostituendo nel termine generale della serie i valori trovati otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n|\pm 1/2|^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\,,$$

che è una serie convergente, in quanto si tratta della serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

Esercizio 3
Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$. Essa ha per soluzioni $\lambda = -2 \pm i$ e, quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)\,.$$

Poiché $\lambda = -2$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otterremo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{-2x}$, da cui $y'(x) = -2A\mathrm{e}^{-2x}$ e $y''(x) = 4A\mathrm{e}^{-2x}$. Sostituendo nell'equazione, otteniamo

$$4A\mathrm{e}^{-2x} - 8A\mathrm{e}^{-2x} + 5A\mathrm{e}^{-2x} = 2\mathrm{e}^{-2x} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 2\,;$$

pertanto, $y_p(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$ e $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + 2\mathrm{e}^{-2x}$. Imponendo le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{aligned} 2 = y(0) = C_1 + 2 \qquad &\Longrightarrow \qquad C_1 = 0\,,\\ -3 = y'(0) = C_2 - 4 \qquad &\Longrightarrow \qquad C_2 = 1\,. \end{aligned}$$

Quindi, la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(\sin x + 2)$.

Esercizio 4
Dal teorema di riduzione degli integrali doppi otteniamo

$$\begin{aligned} \iint_D 2x\log x\,dx\,dy &= \int_1^2\left(\int_{1/\sqrt{y}}^{\mathrm{e}^y} 2x\log x\,dx\right)dy = \int_1^2\left(x^2\log x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1/\sqrt{y}}^{\mathrm{e}^y} dy \\ &= \int_1^2\left(\mathrm{e}^{2y}y - \frac{\mathrm{e}^{2y}}{2} + \frac{\log y}{2y} + \frac{1}{2y}\right)dy = \left(\mathrm{e}^{2y}\frac{y}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2y}}{2} + \frac{\log^2 y}{4} + \frac{\log y}{2}\right)\Big|_1^2 \\ &= \mathrm{e}^4 - \frac{\mathrm{e}^4}{2} + \frac{\log^2 2}{4} + \frac{\log 2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \frac{\mathrm{e}^2}{2} = \frac{\mathrm{e}^4}{2} + \frac{\log^2 2}{4} + \frac{\log 2}{2}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5

Affinché f abbia un punto di minimo relativo nell'origine, è sufficiente, ad esempio, che $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e che la matrice Hessiana di f abbia tutti gli autovalori positivi nell'origine. Poiché

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x\,, \\ f_y(x,y) = g'(y)\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla f(0,0) = \big(0, g'(0)\big)\,,$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & g''(y) \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & g''(0) \end{pmatrix}\,,$$

avremo che le condizioni richieste saranno soddisfatte se $g'(0) = 0$ e $g''(0) > 0$.