SOLUZIONI COMPITO del 12/01/2012
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1
Ricordando che $1-\cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t=\sin\frac{1}{n}$, e per la funzione $t\mapsto \sin t$, con $t=1/n$, cioè

$$\log\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)=\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\sim\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}$$

otteniamo

$$\frac{\log\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}\sim\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n^2}}=-1\,.$$

Esercizio 2
Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è non positiva e continua in $(0,1]$; pertanto dobbiamo studiarne il comportamento solo per $x\to 0^+$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x\mapsto \mathrm{e}^x$ e quello al terzo ordine per la funzione $t\mapsto\sin t$, con $t=3x$, si ha

$$\text{per } x\to 0^+ \qquad f(x)\sim\frac{(3x-27x^3/6)-3x}{x^{\alpha^2}}=-\frac{9x^3}{2x^{\alpha^2}}=-\frac{9}{2x^{\alpha^2-3}}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la funzione sarà impropriamente integrabile in $(0,1]$ per $\alpha^2-3<1$, ovvero $\alpha^2<4$, che fornisce $-2<\alpha<2$.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2-2\lambda+5=0$. Essa ha come soluzioni $\lambda=1\pm 2i$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x)=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. Dal metodo di somiglianza, otteniamo che la soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+4A\sin 2x-4B\cos 2x+5A\cos 2x+5B\sin 2x=17\sin 2x\,,$$

da cui $A=4$ e $B=1$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x)=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+4\cos 2x+\sin 2x\,.$$

Infine, l'equazione proposta ha un'unica soluzione periodica che si ottiene imponendo $C_1=C_2=0$, ovvero $y(x)=4\cos 2x+\sin 2x$.

Esercizio 4
Studiamo, dapprima, gli estremanti, gli zeri ed il comportamento all'infinito della funzione $f(x)$. Otteniamo

$$f(x)\begin{cases}>0 & \iff & x^2-4x+3>0 & \iff & x<1 \text{ e } x>3\\ =0 & \iff & x^2-4x+3=0 & \iff & x=1 \text{ e } x=3\\ <0 & \iff & x^2-4x+3<0 & \iff & 1<x<3\end{cases}\qquad \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=1$$

$$f'(x)=-\frac{4x^2+12-8x^2}{(x^2+3)^2}=4\frac{x^2-3}{(x^2+3)^2}\begin{cases}>0 & \text{per } x<-\sqrt{3} \text{ e } x>\sqrt{3},\\ =0 & \text{per } x=\pm\sqrt{3},\\ <0 & \text{per } -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}.\end{cases}$$

Quindi $x=-\sqrt{3}$ è punto di massimo relativo e assoluto (poiché $f(-\sqrt{3})=1+\frac{2}{\sqrt{3}}>1$), e $x=\sqrt{3}$ è punto di minimo relativo e assoluto (poiché $f(\sqrt{3})=1-\frac{2}{\sqrt{3}}<0$). Cosideriamo ora la funzione $g(x)=|f(x)|$; dai risultati precedenti si ricava che $x=1$ e $x=3$ sono punti di minimo assoluto, dove $g=0$; $x=-\sqrt{3}$ è punto di massimo assoluto e $x=\sqrt{3}$ è punto di massimo relativo (poiché $g(\sqrt{3})=|f(\sqrt{3})|<1$).

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e la funzione $x \mapsto \sin x$ è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, dal Teorema dell'Hospital e dal Teorema di Torricelli otteniamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^5} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{5f(\sin^2 x)\cos x}{5x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{5(\sin^2 x)^2}{5x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1\,.$$

Poiché il precedente limite esiste finito e non nullo, la funzione F risulta essere un infinitesimo di ordine 5, per $x \to 0$.

TEMA B

Esercizio 1

Ricordando che $\left[1+\log(1+1/n^2)\right]^5 - 1 \sim 5\log(1+1/n^2) \sim 5/n^2$ e utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \sinh t$, con $t = e^{1/n} - 1$, e per la funzione $t \mapsto e^t$, con $t = 1/n$, cioè

$$\sinh\left(e^{1/n}-1\right) = \left(e^{1/n}-1\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

otteniamo

$$\frac{\sinh\left(e^{1/n}-1\right) - \frac{1}{n}}{\left[1+\log(1+1/n^2)\right]^5 - 1} \sim \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{1}{10}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è non positiva e continua in $[1,+\infty)$; pertanto dobbiamo studiarne il comportamento solo per $x \to +\infty$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 1/x$, e per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 2/x$, si ha

$$\text{per } x \to 0^+ \qquad f(x) \sim \frac{\left(\frac{1}{2x^2}\right)^{1+3\alpha^2}}{\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x}} = -\frac{x^2}{2^{2+3\alpha^2}x^{2+6\alpha^2}} = -\frac{1}{2^{2+3\alpha^2}x^{6\alpha^2}}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la funzione sarà impropriamente integrabile in $[1,+\infty)$ per $6\alpha^2 > 1$, ovvero $\alpha^2 > 1/6$, che fornisce $\alpha < -1/\sqrt{6}$ e $\alpha > 1/\sqrt{6}$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda = 2 \pm 3i$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2 \sin 3x)$. Dal metodo di somiglianza, otteniamo che la soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ae^{2x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 13Ae^{2x} = 18e^{2x}\,,$$

da cui $A = 2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + 2e^{2x}\,.$$

Infine, l'equazione proposta non ammette alcuna soluzione periodica.

Esercizio 4

Studiamo, dapprima, gli estremanti, gli zeri ed il comportamento all'infinito della funzione $f(x)$. Otteniamo

$$f(x)\begin{cases} < 0 \iff x^2+5x+4>0 \iff x<-4 \text{ e } x>-1 \\ = 0 \iff x^2+5x+4=0 \iff x=-4 \text{ e } x=-1 \\ > 0 \iff x^2+5x+4<0 \iff -4<x<-1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$$

$$f'(x) = -\frac{5x^2+20-10x^2}{(x^2+4)^2} = 5\frac{x^2-4}{(x^2+4)^2}\begin{cases} >0 & \text{per } x<-2 \text{ e } x>2, \\ =0 & \text{per } x=\pm 2, \\ <0 & \text{per } -2<x<2. \end{cases}$$

Quindi $x = -2$ è punto di massimo relativo e assoluto (poiché $f(-2) = 1/4 > 0$), e $x = 2$ è punto di minimo relativo e assoluto (poiché $f(2) = -9/4 < -1$). Cosideriamo ora la funzione $g(x) = |f(x)|$; dai risultati precedenti si ricava che $x = -4$ e $x = -1$ sono punti di minimo assoluto, dove $g = 0$; $x = -2$ è punto di massimo relativo e $x = 2$ (poiché $g(-2) = f(-2) < 1$) è punto di massimo assoluto (poiché $g(2) = |f(2)| > 1$).

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e la funzione $x \mapsto \sin^2 x$ è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, dal Teorema dell'Hospital e dal Teorema di Torricelli otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^6} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)f(\sin^2 x)2\sin x\cos x}{6x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{2(\sin^3 x)(\sin^2 x)}{6x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{3x^5} = 1/3\,.$$

Poiché il precedente limite esiste finito e non nullo, la funzione F risulta essere un infinitesimo di ordine 6, per $x \to 0$.

TEMA C

Esercizio 1

Ricordando che $\sqrt[4]{1+\sin(1/n^2)}-1 \sim (1/4)\sin(1/n^2) \sim 1/4n^2$ e utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = \sinh(1/n)$, e per la funzione $t \mapsto \sinh t$, con $t = 1/n$, cioè

$$\mathrm{e}^{\sinh(1/n)} = 1 + \sinh(1/n) + \frac{1}{2}\big(\sinh(1/n)\big)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\Big)^2 \sim 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

otteniamo

$$\frac{\sqrt[4]{1+\sin\frac{1}{n^2}}-1}{\mathrm{e}^{\sinh(1/n)}-1-\frac{1}{n}} \sim \frac{\frac{1}{4n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è non negativa e continua in $[1,+\infty)$; pertanto dobbiamo studiarne il comportamento solo per $x \to +\infty$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 1/x$, e per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 4/x$, si ha

$$\text{per } x \to 0^+ \qquad f(x) \sim \frac{\left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)\right]^{3\alpha^2}}{\frac{16}{2x^2}} = \frac{x^2}{8\cdot 2^{3\alpha^2} x^{6\alpha^2}} = \frac{1}{2^{3+3\alpha^2} x^{6\alpha^2-2}}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la funzione sarà impropriamente integrabile in $[1,+\infty)$ per $6\alpha^2 - 2 > 1$, ovvero $\alpha^2 > 1/2$, che fornisce $\alpha < -1/\sqrt{2}$ e $\alpha > 1/\sqrt{2}$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda = 3 \pm 4i$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = \mathrm{e}^{3x}(C_1\cos 4x + C_2 \sin 4x)$. Dal metodo di somiglianza, otteniamo che la soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{3x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$9A\mathrm{e}^{3x} - 18A\mathrm{e}^{3x} + 25A\mathrm{e}^{3x} = 32\mathrm{e}^{3x}\,,$$

da cui $A = 2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = \mathrm{e}^{3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + 2\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Infine, l'equazione proposta non ammette alcuna soluzione periodica.

Esercizio 4

Studiamo, dapprima, gli estremanti, gli zeri ed il comportamento all'infinito della funzione $f(x)$. Otteniamo

$$f(x)\begin{cases} > 0 & \iff \quad -5x > 0 \quad \iff \quad x < 0 \\ = 0 & \iff \quad -5x = 0 \quad \iff \quad x = 0 \\ < 0 & \iff \quad -5x < 0 \quad \iff \quad x > 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{5x^2+20-10x^2}{(x^2+4)^2} = 5\frac{x^2-4}{(x^2+4)^2}\begin{cases} > 0 & \text{per } x < -2 \text{ e } x > 2, \\ = 0 & \text{per } x = \pm 2, \\ < 0 & \text{per } -2 < x < 2. \end{cases}$$

Quindi $x = -2$ è punto di massimo relativo e assoluto (poiché $f(-2) = 5/4 > 0$), e $x = 2$ è punto di minimo relativo e assoluto (poiché $f(2) = -5/4 < 0$). Cosideriamo ora la funzione $g(x) = |f(x)|$; dai risultati precedenti si ricava che $x = 0$ è punto di minimo assoluto, dove $g = 0$; $x = \pm 2$ sono punti di massimo relativo e assoluto. Per completezza osserviamo, anche, che la funzione $f(x)$ è dispari e quindi $g(x) = |f(x)|$ è pari.

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e la funzione $x \mapsto \sin^2 x$ è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, dal Teorema dell'Hospital e dal Teorema di Torricelli otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^6} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x) f(\sin^2 x) 2\sin x\cos x}{6x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{2(\sin^3 x)(\sin^2 x)}{6x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{3x^5} = 1/3\,.$$

Poiché il precedente limite esiste finito e non nullo, la funzione F risulta essere un infinitesimo di ordine 6, per $x \to 0$.

TEMA D

Esercizio 1

Ricordando che $\cosh\frac{1}{n}-1\sim\frac{1}{2n^2}$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t\mapsto\sin t$, con $t=\log(1+1/n)$, e per la funzione $t\mapsto\log(1+t)$, con $t=1/n$, cioè

$$\sin\left(\log(1+1/n)\right)=\log(1+1/n)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}$$

otteniamo

$$\frac{\cosh\frac{1}{n}-1}{\sin\left(\log(1+1/n)\right)-\frac{1}{n}}\sim\frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n}}=-1\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è non negativa e continua in $(0,1]$; pertanto dobbiamo studiarne il comportamento solo per $x\to0^+$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t\mapsto\mathrm{e}^t$, con $t=2x^2$, e quello al terzo ordine per la funzione $x\mapsto\sin x$, si ha

$$\text{per } x\to0^+\qquad f(x)\sim\frac{2x^2}{[x-(x-x^3/6)]^{\alpha^2-2}}=\frac{2x^2}{(x^3/6)^{\alpha^2-2}}=2\frac{6^{\alpha^2-2}}{x^{3\alpha^2-8}}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la funzione sarà impropriamente integrabile in $(0,1]$ per $3\alpha^2-8<1$, ovvero $\alpha^2<3$, che fornisce $-\sqrt{3}<\alpha<\sqrt{3}$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2-2\lambda+10=0$. Essa ha come soluzioni $\lambda=1\pm3i$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x)=\mathrm{e}^x(C_1\cos3x+C_2\sin3x)$. Dal metodo di somiglianza, otteniamo che la soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x)=A\cos3x+B\sin3x$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$-9A\cos3x-9B\sin3x+6A\sin3x-6B\cos3x+10A\cos3x+10B\sin3x=37\cos3x\,,$$

da cui $A=1$ e $B=-6$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x)=\mathrm{e}^x(C_1\cos3x+C_2\sin3x)+\cos3x-6\sin3x\,.$$

Infine, l'equazione proposta ha un'unica soluzione periodica che si ottiene imponendo $C_1=C_2=0$, ovvero $y(x)=\cos3x-6\sin3x$.

Esercizio 4

Studiamo, dapprima, gli estremanti, gli zeri ed il comportamento all'infinito della funzione $f(x)$. Otteniamo

$$f(x)\begin{cases}>0 & \iff\quad -4x>0\quad\iff\quad x<0\\ =0 & \iff\quad -4x=0\quad\iff\quad x=0\\ <0 & \iff\quad -4x<0\quad\iff\quad x>0\end{cases}\qquad\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$$

$$f'(x)=-\frac{4x^2+12-8x^2}{(x^2+3)^2}=4\frac{x^2-3}{(x^2+3)^2}\begin{cases}>0 & \text{per } x<-\sqrt{3}\text{ e }x>\sqrt{3},\\ =0 & \text{per } x=\pm\sqrt{3},\\ <0 & \text{per } -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}.\end{cases}$$

Quindi $x=-\sqrt{3}$ è punto di massimo relativo e assoluto (poiché $f(-\sqrt{3})=\frac{2}{\sqrt{3}}>0$), e $x=\sqrt{3}$ è punto di minimo relativo e assoluto (poiché $f(\sqrt{3})=-\frac{2}{\sqrt{3}}<0$). Cosideriamo ora la funzione $g(x)=|f(x)|$; dai risultati precedenti si ricava che $x=0$ è punto di minimo assoluto, dove $g=0$; $x=\pm\sqrt{3}$ sono punti di massimo relativo e assoluto. Per completezza osserviamo, anche, che la funzione $f(x)$ è dispari e quindi $g(x)=|f(x)|$ è pari.

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e la funzione $x \mapsto \sin x$ è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, dal Teorema dell'Hospital e dal Teorema di Torricelli otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^5} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{5f(\sin^2 x)\cos x}{5x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{5(\sin^2 x)^2}{5x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1\,.$$

Poiché il precedente limite esiste finito e non nullo, la funzione F risulta essere un infinitesimo di ordine 5, per $x \to 0$.