SOLUZIONI COMPITO del 12/01/2015
ANALISI MATEMATICA I - 10 CFU
ENERGETICA

TEMA

Esercizio 1

Innanzitutto, osserviamo che il dominio D è definito dall'unica condizione $x^2 - 3 \neq 0$, che fornisce $x \neq \pm\sqrt{3}$. Quindi $D = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Inoltre,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(\sin x)^2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sin x)^2}{x} = 0 \quad \text{quindi } y = 0 \text{ è asintoto orizzontale per } x \to \pm\infty;$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}} f(x) = \lim_{x\to-\sqrt{3}} -\frac{\sqrt{3}(\sin\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}|x+\sqrt{3}|} = -\infty \quad \text{quindi } x = -\sqrt{3} \text{ è asintoto verticale per } x \to -\sqrt{3};$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}(\sin\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}|x-\sqrt{3}|} = +\infty \quad \text{quindi } x = \sqrt{3} \text{ è asintoto verticale per } x \to \sqrt{3}.$$

Infine, tenendo conto che $\frac{(\sin x)^2}{|x^2-3|} > 0$ per $x \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, si ricava subito che

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x > 0 \text{ e } x \neq k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{N}, \\ = 0 & \text{per } x = k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \\ < 0 & \text{per } x < 0 \text{ e } x \neq k\pi, \text{ con } -k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Esercizio 2

Tenendo conto $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}\, x^2$, per $x \to 0$ con $x = \sin\frac{1}{n+3\sqrt{n}}$, e che $\sin x \sim x$, per $x \to 0$ con $x = \frac{1}{n+3\sqrt{n}}$, ricaviamo subito che

$$n^2\left[1 - \cos\left(\sin\frac{1}{n+3\sqrt{n}}\right)\right] \sim n^2\frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{n+3\sqrt{n}}\right)^2 \sim \frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{n+3\sqrt{n}}\right)^2 \sim \frac{n^2}{2}\,\frac{1}{n^2} \to \frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1 \pm 2i$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = \mathrm{e}^x[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)]$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^x$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^x$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$A\mathrm{e}^x - 2A\mathrm{e}^x + 5A\mathrm{e}^x = 4\mathrm{e}^x \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = \mathrm{e}^x[C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)] + \mathrm{e}^x$. Imponendo ora le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} C_1 + 1 = 0\,, \\ C_1 + 2C_2 + 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = -1\,, \\ C_2 = 0\,. \end{cases}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x) = \mathrm{e}^x[1 - \cos(2x)]$.

Esercizio 4

Effettuando la sostituzione $t = \log(1+x)$, da cui $dt = \frac{1}{1+x}\,dx$, $t(0) = 0$, $t(y) = \log(1+y)$, si ricava

$$\begin{aligned} \iint_Q \frac{[\log(1+x)^2]}{(1+x)(1+y)}\,dx\,dy &= 2\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{\log(1+x)}{(1+x)(1+y)}\,dx\right) dy \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{(1+y)}\left(\int_0^{\log(1+y)} t\,dt\right) dy = \int_0^1 \frac{1}{(1+y)}\left(t^2\Big|_0^{\log(1+y)}\right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{[\log(1+y)]^2}{(1+y)}\,dy = \int_0^{\log 2} t^2\,dt = \frac{(\log 2)^3}{3}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5

Per ipotesi, $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; inoltre, poiché $f(0) = 0$ ed f è strettamente crescente, avremo che $f(x) > 0$ per $x > 0$ ed $f(x) < 0$ per $x < 0$. Osserviamo, inoltre, che dal teorema di derivazione della funzione composta si ha $g'(x) = 2f(x)f'(x)$; pertanto, ricaviamo subito che

$$g'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x > 0, \\ = 0 & \text{per } x = 0, \\ < 0 & \text{per } x < 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{ovvero } x = 0 \text{ è punto di minimo.}$$