SOLUZIONI COMPITO del 12/01/2016
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1
Osservando che $\log\left(\frac{n}{n+3}\right) = \log\left(\frac{n+3-3}{n+3}\right) = \log\left(1-\frac{3}{n+3}\right) \sim -\frac{3}{n+3} \sim -\frac{3}{n}$ e che $\sin\left(\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$, otteniamo

$$a_n = \frac{\sqrt{n}\left[\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right]^\alpha}{\log\left(\frac{n}{n+3}\right)} \sim -\frac{2^\alpha n^{1/2} n}{3n^\alpha} = -\left(\frac{2^\alpha}{3}\right)\frac{1}{n^{\alpha-3/2}}\,.$$

Pertanto, si ricava che il termine generale è definitivamente negativo e, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie proposta converge se e solo se $\alpha - 3/2 > 1$, ovvero per $\alpha > 5/2$.

Esercizio 2
Poiché $D = (-1,1)\cup(1,+\infty)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}\frac{1+\log(x+1)}{-2} = \lim_{x\to-1^+}\frac{\log(x+1)}{-2} = +\infty\,,\\
&\lim_{x\to1^\pm} f(x) = \lim_{x\to1^\pm}\frac{1+\log 2}{x-1} = \pm\infty\,,\\
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty\,,\\
&\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-x} = 1\,,\\
&\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\log(x+1)-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1} = 1\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, le rette $x=-1$ e $x=1$ sono asintoti verticali, mentre la retta $y = x+1$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $2\lambda^2+8=0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 2i$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$, da cui $y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$ e $y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$-2A\cos x - 2B\sin x + 8A\cos x + 8B\sin x = 3\sin x \qquad\Longrightarrow\qquad A=0\,,\ B=1/2\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)+\frac{1}{2}\sin x$.
Imponendo ora le condizioni richieste otteniamo

$$\begin{cases} C_1 = -C_1 + 1/2\,,\\ 2C_2 + 1/2 = -2C_2\,,\end{cases} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{cases} C_1 = 1/4\,,\\ C_2 = -1/8\,.\end{cases}$$

Pertanto, esiste un'unica soluzione del problema proposto, data da $y(x) = \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{8}\sin(2x) + \frac{1}{2}\sin x$.

Esercizio 4
Effettuando la sostituzione $t = \sqrt{2x^2-x}$, da cui $dt = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}\,dx$, $t(1)=1$ e $t(2)=\sqrt{6}$, si ricava

$$\int_1^2 \frac{(8x-2)\,\mathrm{e}^{\sqrt{2x^2-x}}}{\sqrt{2x^2-x}}\,dx = 4\int_1^2\frac{(4x-1)\,\mathrm{e}^{\sqrt{2x^2-x}}}{2\sqrt{2x^2-x}}\,dx = 4\int_1^{\sqrt{6}}\mathrm{e}^t\,dt = 4\mathrm{e}^t\Big|_1^{\sqrt{6}} = 4(\mathrm{e}^{\sqrt{6}}-\mathrm{e})\,.$$

Esercizio 5

Tenendo conto che $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ possiamo scrivere che, per $x \to 0$, $f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + o(x^2)$. Quindi, per $x \neq 0$ e $x \to 0$, avremo

$$F(x) = \frac{f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + o(x^2) + 1 - 3x}{x^2} = \frac{f(0)+1}{x^2} + \frac{f'(0)-3}{x} + \frac{f''(0)}{2} + o(1)\,.$$

Ricordando che, per ipotesi, F è continua nell'origine, cioè $F(x) \to F(0)$ per $x \to 0$, si ricava innanzitutto che $f(0) + 1 = f'(0) - 3 = 0$, altrimenti F sarebbe divergente. Pertanto, per $x \neq 0$ e $x \to 0$, possiamo riscrivere $F(0) \leftarrow F(x) = \frac{f''(0)}{2} + o(1) \to \frac{f''(0)}{2}$. Tenendo conto, infine, che $F(0) = 0$, otteniamo anche $\frac{f''(0)}{2} = 0$ e, quindi, lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per f sarà dato da $f(x) = -1 + 3x + o(x^2)$, per $x \to 0$.

TEMA B

Esercizio 1

Osservando che $\log\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)=\log\left(\frac{2n+1+1}{2n+1}\right)=\log\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\sim\frac{1}{2n+1}\sim\frac{1}{2n}$ e che $\sin\left(\frac{2}{3n}\right)\sim\frac{2}{3n}$, otteniamo

$$a_n=\frac{\sin\left(\frac{2}{3n}\right)}{\sqrt[4]{n}\left[\log\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\right]^{\alpha}}\sim\frac{2\,2^{\alpha}n^{\alpha}}{3n^{1/4}n}=\left(\frac{2^{\alpha+1}}{3}\right)\frac{1}{n^{5/4-\alpha}}\,.$$

Pertanto, si ricava che il termine generale è definitivamente positivo e, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie proposta converge se e solo se $5/4-\alpha>1$, ovvero per $\alpha<1/4$.

Esercizio 2

Poiché $D=(-2,2)\cup(2+\infty)$, si ottiene

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}[-4+\log(x+2)]=\lim_{x\to-2^+}\log(x+2)=-\infty\,,$$
$$\lim_{x\to2^{\pm}}f(x)=\lim_{x\to2^{\pm}}\left[\frac{16}{x-2}+\log 4\right]=\pm\infty\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}4x=+\infty\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{(x-2)x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2-2x}=4\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4x^2-4x^2+8x}{x-2}+\log(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\log(x+2)=+\infty\,.$$

Pertanto, le rette $x=-2$ e $x=2$ sono asintoti verticali, mentre non c'è asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $4\lambda^2+1=0$, che ha come soluzioni $\lambda=\pm i/2$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x)=C_1\cos(x/2)+C_2\sin(x/2)$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x)=A\cos x+B\sin x$, da cui $y_p'(x)=-A\sin x+B\cos x$ e $y_p''(x)=-A\cos x-B\sin x$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$-4A\cos x-4B\sin x+A\cos x+B\sin x=6\cos x\qquad\Longrightarrow\qquad A=-2\,,\ B=0\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x)=C_1\cos(x/2)+C_2\sin(x/2)-2\cos x$.

Imponendo ora le condizioni richieste otteniamo

$$\begin{cases}C_1-2=C_2+2\,,\\ C_2/2=-C_1/2\,,\end{cases}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\begin{cases}C_1=2\,,\\ C_2=-2\,.\end{cases}$$

Pertanto, esiste un'unica soluzione del problema proposto, data da $y(x)=4\cos(x/2)-2\cos x$.

Esercizio 4

Effettuando la sostituzione $t=\sqrt{x^2-2x}$, da cui $dt=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}\,dx$, $t(3)=\sqrt{3}$ e $t(4)=\sqrt{8}$, si ricava

$$\int_3^4\frac{(x-1)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2-2x}}}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx=\int_3^4\frac{(2x-2)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2-2x}}}{2\sqrt{x^2-2x}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\mathrm{e}^{-t}\,dt=-\mathrm{e}^{-t}\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}=\mathrm{e}^{-\sqrt{3}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{8}}\,.$$

Esercizio 5

Tenendo conto che $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ possiamo scrivere che, per $x\to0$, $f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2}\,x^2+o(x^2)$. Quindi, per $x\neq0$ e $x\to0$, avremo

$$F(x)=\frac{f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2}\,x^2+o(x^2)+4x}{x^2}=\frac{f(0)}{x^2}+\frac{f'(0)+4}{x}+\frac{f''(0)}{2}+o(1)\,.$$

Ricordando che, per ipotesi, F è continua nell'origine, cioè $F(x)\to F(0)$ per $x\to0$, si ricava innanzitutto che $f(0)=f'(0)+4=0$, altrimenti F sarebbe divergente. Pertanto, per $x\neq0$ e $x\to0$, possiamo riscrivere $F(0)\leftarrow F(x)=\frac{f''(0)}{2}+o(1)\to\frac{f''(0)}{2}$. Tenendo conto, infine, che $F(0)=1$, otteniamo anche $\frac{f''(0)}{2}=1$ e, quindi, lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per f sarà dato da $f(x)=-4x+x^2+o(x^2)$, per $x\to0$.

TEMA C

Esercizio 1

Osservando che $\log\left(\frac{n+1}{n+3}\right) = \log\left(\frac{n+3-2}{n+3}\right) = \log\left(1 - \frac{2}{n+3}\right) \sim -\frac{2}{n+3} \sim -\frac{2}{n}$ e che $\sin\left(\frac{3}{4n}\right) \sim \frac{3}{4n}$, otteniamo

$$a_n = \frac{\log\left(\frac{n+1}{n+3}\right)}{\sqrt[5]{n}\left[\sin\left(\frac{3}{4n}\right)\right]^\alpha} \sim -\frac{2\,4^\alpha n^\alpha}{3^\alpha n^{1/5} n} = -\left(\frac{2^{2\alpha+1}}{3^\alpha}\right)\frac{1}{n^{6/5-\alpha}}\,.$$

Pertanto, si ricava che il termine generale è definitivamente positivo e, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie proposta converge se e solo se $6/5 - \alpha > 1$, ovvero per $\alpha < 1/5$.

Esercizio 2

Poiché $D = (2, 4) \cup (4 + \infty)$, si ottiene

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}[-6 + \log(x-2)] = \lim_{x\to 2^+}\log(x-2) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to 4^\pm} f(x) = \lim_{x\to 4^\pm}\left[\frac{48}{x-4} + \log 2\right] = \pm\infty\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x-4} = \lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{(x-4)x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2-4x} = 3\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 3x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2 - 3x^2 + 12x}{x-4} + \log(x-2)\right] = \lim_{x\to+\infty}\log(x-2) = +\infty\,.$$

Pertanto, le rette $x = 2$ e $x = 4$ sono asintoti verticali, mentre non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $9\lambda^2 + 1 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm i/3$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1\cos(x/3) + C_2\sin(x/3)$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$, da cui $y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$ e $y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$-9A\cos x - 9B\sin x + A\cos x + B\sin x = 8\cos x \qquad\Longrightarrow\qquad A = -1\,,\; B = 0\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\cos(x/3) + C_2\sin(x/3) - \cos x$.

Imponendo ora le condizioni richieste otteniamo

$$\begin{cases} C_1 - 1 = C_2\,, \\ C_2/3 = -C_1/3 - 1\,, \end{cases} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{cases} C_1 = -1\,, \\ C_2 = -2\,. \end{cases}$$

Pertanto, esiste un'unica soluzione del problema proposto, data da $y(x) = -\cos(x/3) - 2\sin(x/3) - \cos x$.

Esercizio 4

Effettuando la sostituzione $t = \sqrt{2x^2 - 5x}$, da cui $dt = \frac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x}}\,dx$, $t(3) = \sqrt{3}$ e $t(4) = \sqrt{12}$, si ricava

$$\int_3^4 \frac{(8x-10)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2x^2-5x}}}{\sqrt{2x^2-5x}}\,dx = 4\int_3^4 \frac{(4x-5)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2x^2-5x}}}{2\sqrt{2x^2-5x}}\,dx = 4\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}} \mathrm{e}^{-t}\,dt = -4\mathrm{e}^{-t}\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}} = 4(\mathrm{e}^{-\sqrt{3}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{12}})\,.$$

Esercizio 5

Tenendo conto che $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ possiamo scrivere che, per $x \to 0$, $f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + o(x^2)$. Quindi, per $x \neq 0$ e $x \to 0$, avremo

$$F(x) = \frac{f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + o(x^2) + 4x}{x^2} = \frac{f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)+4}{x} + \frac{f''(0)}{2} + o(1)\,.$$

Ricordando che, per ipotesi, F è continua nell'origine, cioè $F(x) \to F(0)$ per $x \to 0$, si ricava innanzitutto che $f(0) = f'(0) + 4 = 0$, altrimenti F sarebbe divergente. Pertanto, per $x \neq 0$ e $x \to 0$, possiamo riscrivere $F(0) \leftarrow F(x) = \frac{f''(0)}{2} + o(1) \to \frac{f''(0)}{2}$. Tenendo conto, infine, che $F(0) = 1$, otteniamo anche $\frac{f''(0)}{2} = 1$ e, quindi, lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per f sarà dato da $f(x) = -4x + x^2 + o(x^2)$, per $x \to 0$.

TEMA D

Esercizio 1
Osservando che $\log\left(\frac{n+5}{n+4}\right) = \log\left(\frac{n+4+1}{n+4}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n+4}\right) \sim \frac{1}{n+4} \sim \frac{1}{n}$ e che $\sin\left(\frac{1}{3n}\right) \sim \frac{1}{3n}$, otteniamo

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n}\left[\log\left(\frac{n+5}{n+4}\right)\right]^\alpha}{\sin\left(\frac{1}{3n}\right)} \sim \frac{3n^{1/3}n}{n^\alpha} = 3\frac{1}{n^{\alpha-4/3}}\,.$$

Pertanto, si ricava che il termine generale è definitivamente positivo e, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie proposta converge se e solo se $\alpha - 4/3 > 1$, ovvero per $\alpha > 7/3$.

Esercizio 2
Poiché $D = (1,3) \cup (3,+\infty)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2+\log(x-1)}{-2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x-1)}{-2} = +\infty\,,\\
&\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \lim_{x\to 3^\pm} \frac{18+\log 2}{x-3} = \pm\infty\,,\\
&\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x-3} = \lim_{x\to +\infty} 2x = +\infty\,,\\
&\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{(x-3)x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x^2-3x} = 2\,,\\
&\lim_{x\to +\infty} [f(x)-2x] = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+\log(x-1)-2x^2+6x}{x-3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{6x}{x-3} = 6\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, le rette $x = 1$ e $x = 3$ sono asintoti verticali, mentre la retta $y = 2x + 6$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $3\lambda^2 + 27 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 3i$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$, da cui $y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$ e $y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$-3A\cos x - 3B\sin x + 27A\cos x + 27B\sin x = 4\sin x \qquad \Longrightarrow \qquad A = 0\,,\ B = 1/6\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) + \frac{1}{6}\sin x$.
Imponendo ora le condizioni richieste otteniamo

$$\begin{cases} C_1 = -C_1 + \sqrt{3}/12\,,\\ 3C_2 + 1/6 = -3C_2 + 1/12\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = \sqrt{3}/24\,,\\ C_2 = -1/72\,. \end{cases}$$

Pertanto, esiste un'unica soluzione del problema proposto, data da $y(x) = \frac{\sqrt{3}}{24}\cos(3x) - \frac{1}{72}\sin(3x) + \frac{1}{6}\sin x$.

Esercizio 4
Effettuando la sostituzione $t = \sqrt{3x^2 - 2x}$, da cui $dt = \frac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x}}\,dx$, $t(1) = 1$ e $t(2) = \sqrt{8}$, si ricava

$$\int_1^2 \frac{(3x-1)\,\mathrm{e}^{\sqrt{3x^2-2x}}}{\sqrt{3x^2-2x}}\,dx = \int_1^2 \frac{(6x-2)\,\mathrm{e}^{\sqrt{3x^2-2x}}}{2\sqrt{3x^2-2x}}\,dx = \int_1^{\sqrt{8}} \mathrm{e}^t\,dt = \mathrm{e}^t\Big|_1^{\sqrt{8}} = \mathrm{e}^{\sqrt{8}} - \mathrm{e}\,.$$

Esercizio 5

Tenendo conto che $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ possiamo scrivere che, per $x \to 0$, $f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + o(x^2)$. Quindi, per $x \neq 0$ e $x \to 0$, avremo

$$F(x) = \frac{f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + o(x^2) + 1 - 3x}{x^2} = \frac{f(0)+1}{x^2} + \frac{f'(0)-3}{x} + \frac{f''(0)}{2} + o(1)\,.$$

Ricordando che, per ipotesi, F è continua nell'origine, cioè $F(x) \to F(0)$ per $x \to 0$, si ricava innanzitutto che $f(0) + 1 = f'(0) - 3 = 0$, altrimenti F sarebbe divergente. Pertanto, per $x \neq 0$ e $x \to 0$, possiamo riscrivere $F(0) \leftarrow F(x) = \frac{f''(0)}{2} + o(1) \to \frac{f''(0)}{2}$. Tenendo conto, infine, che $F(0) = 0$, otteniamo anche $\frac{f''(0)}{2} = 0$ e, quindi, lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per f sarà dato da $f(x) = -1 + 3x + o(x^2)$, per $x \to 0$.