SOLUZIONI COMPITO del 12/01/2018
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta è soddisfatta dall'insieme delle soluzioni delle due equazioni $z^4 - i = 0$ e $z^3 - 1 - \sqrt{3}i = 0$. La prima si riduce a $z^4 = i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$, cioè a determinare le 4 radice quarte di i, mentre la seconda si riduce a $z^3 = 1 + \sqrt{3}i = 2\mathrm{e}^{i\pi/3}$, cioè a determinare le 3 radici terze di $1 + \sqrt{3}i$. Pertanto, otteniamo

$$z = \sqrt[4]{\mathrm{e}^{i\pi/2}} = \mathrm{e}^{i(\pi/2+2k\pi)/4} = \begin{cases} \mathrm{e}^{i\pi/8}, \\ \mathrm{e}^{5i\pi/8}, \\ \mathrm{e}^{9i\pi/8}, \\ \mathrm{e}^{13i\pi/8}; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad z = \sqrt[3]{2\mathrm{e}^{i\pi/3}} = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{i(\pi/3+2k\pi)/3} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{i\pi/9}, \\ \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{7i\pi/9}, \\ \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{13i\pi/9}. \end{cases}$$

Esercizio 2

Ricordando che $\mathrm{e}^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$, con $x = (\alpha+1)/n^2 \to 0$, si ricava

$$\begin{aligned} a_n := \left[\exp\left(\frac{\alpha+1}{n^2}\right) - 1 - \frac{3}{n^2}\right]\log(2+\mathrm{e}^{2n}) &\sim \left[\frac{\alpha+1}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+1}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - \frac{3}{n^2}\right]\log(\mathrm{e}^{2n}) \\ &= \left[\frac{\alpha-2}{n^2} + \frac{(\alpha+1)^2}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]2n = \frac{2(\alpha-2)}{n} + \frac{(\alpha+1)^2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\sim \begin{cases} \dfrac{2(\alpha-2)}{n} & \text{se } \alpha \neq 2, \text{ quindi la serie diverge, per confronto con la serie armonica;} \\ \dfrac{9}{n^3} & \text{se } \alpha = 2, \text{ quindi la serie converge per confronto con la serie armonica} \\ & \text{generalizzata di esponente } 3 > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, priva di integrali singolari. Ponendo $f(x) = \sin x \cos(2x)$ e $g(y) = 2y^2 + 3$, si osserva che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, pertanto esiste un intorno U di $\pi/2$ ed un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(U)$ del problema proposto. Separando le variabili e ricordando che $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}y\right) = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}y\right)^2 + 1}\,dy = \int \frac{1}{2y^2+3}\,dy = \int (2\cos^2 x - 1)\sin x\,dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x + \cos x + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = C$, che fornisce

$$y(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{8}{3}}\cos^3 x + \sqrt{6}\cos x\right)\,.$$

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda f è definita e continua in $[0, +\infty)$ e la funzione $x \mapsto x^2$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, anche la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Dal teorema di Torricelli e dalla regola della catena, otteniamo

$$F'(x) = 2x(\mathrm{e}^{2x^2} - 2\mathrm{e}^{x^2})\sqrt[3]{x^2-1} = 2x\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{x^2} - 2)\sqrt[3]{x^2-1}$$
$$\begin{cases} > 0 & \text{per } x \in (-1, -\sqrt{\log 2}) \cup (0, \sqrt{\log 2}) \cup (1, +\infty); \\ = 0 & \text{per } x = \pm 1; 0; \pm\sqrt{\log 2}; \\ < 0 & \text{per } x \in (-\infty, -1) \cup (-\sqrt{\log 2}, 0) \cup (\sqrt{\log 2}, 1); \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che $2x > 0$ per $x > 0$, $\mathrm{e}^{x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x^2} - 2 > 0$ per $x^2 > \log 2$, ovvero per $x < -\sqrt{\log 2}$ o $x > \sqrt{\log 2}$, e $x^2 - 1 > 0$ per $x < -1$ o $x > 1$. Pertanto, $x = \pm 1; 0$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = \pm\sqrt{\log 2}$ sono punti di massimo relativo.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione a) è falsa, infatti basta prendere $a_n = \frac{1}{n^{3/4}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ e $b_n = n^{1/5} \to +\infty$, da cui si ottiene $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^{19/20}}$ che fornisce una serie divergente.
L'affermazione b) è vera, poiché per le ipotesi fatte si ha che $b_n/a_n \to +\infty \neq 0$, cioè non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.
L'affermazione c) è falsa, infatti basta prendere $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[4]{\log n}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ e $b_n = \sqrt[4]{\log n} \to +\infty$, da cui si ottiene $\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1}{n \log n}$ che fornisce una serie divergente.

TEMA B

Esercizio 1
Osserviamo che l'equazione proposta è soddisfatta dall'insieme delle soluzioni delle due equazioni $z^3+i=0$ e $z^4+1+\sqrt{3}i=0$. La prima si riduce a $z^3=-i=\mathrm{e}^{-i\pi/2}$, cioè a determinare le 3 radice terze di $-i$, mentre la seconda si riduce a $z^4=-1-\sqrt{3}i=2\mathrm{e}^{4i\pi/3}$, cioè a determinare le 4 radici quarte di $-1-\sqrt{3}i$. Pertanto, otteniamo

$$z=\sqrt[3]{\mathrm{e}^{-i\pi/2}}=\mathrm{e}^{i(-\pi/2+2k\pi)/3}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-i\pi/6}\,,\\ \mathrm{e}^{3i\pi/6}=i\,,\\ \mathrm{e}^{7i\pi/6}\,;\end{cases}\qquad \text{e}\qquad z=\sqrt[4]{2\mathrm{e}^{4i\pi/3}}=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{i(4\pi/3+2k\pi)/4}=\begin{cases}\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{i\pi/3}\,,\\ \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{5i\pi/6}\,,\\ \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{4i\pi/3}\,,\\ \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{11i\pi/6}\,.\end{cases}$$

Esercizio 2
Ricordando che $\cos x=1-x^2/2+x^4/4!+o(x^4)$, con $x=2/\sqrt[4]{n}\to 0$, si ricava

$$\begin{aligned}a_n:=\frac{\left[\cos\left(\frac{2}{\sqrt[4]{n}}\right)-1+\frac{3\alpha+1}{\sqrt{n}}\right]}{\log(3+\mathrm{e}^{\sqrt{n}})}&\sim\frac{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt[4]{n}}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{2}{\sqrt[4]{n}}\right)^4+o\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{(3\alpha+1)}{\sqrt{n}}\right]}{\log(\mathrm{e}^{\sqrt{n}})}\\
&=\frac{\left[\frac{3\alpha-1}{\sqrt{n}}+\frac{2}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}{\sqrt{n}}=\frac{3\alpha-1}{n}+\frac{2}{3n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\\
&\sim\begin{cases}\dfrac{3\alpha-1}{n} & \text{se } \alpha\neq 1/3\text{, quindi la serie diverge, per confronto con la serie armonica;}\\ \dfrac{2}{3n^{3/2}} & \text{se } \alpha=1/3\text{, quindi la serie converge per confronto con la serie armonica}\\ & \text{generalizzata di esponente } 3/2>1.\end{cases}\end{aligned}$$

Esercizio 3
Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, priva di integrali singolari. Ponendo $f(x)=\sin x\sin(2x)$ e $g(y)=4y^2+5$, si osserva che $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, pertanto esiste un intorno U di 0 ed un'unica soluzione $y\in\mathcal{C}^1(U)$ del problema proposto. Separando le variabili e ricordando che $\sin(2x)=2\sin x\cos x$, si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{20}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y\right)=\frac{1}{5}\int\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y\right)^2+1}\,dy=\int\frac{1}{4y^2+5}\,dy=\int 2\sin^2 x\cos x\,dx=\frac{2}{3}\sin^3 x+C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{1}{\sqrt{20}}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{20}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{5}{12}}\right)=C$, che fornisce

$$y(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\sqrt{5}}{3}\sin^3 x\right)\,.$$

Esercizio 4
Poiché la funzione integranda f è definita e continua in $[0,+\infty)$ e la funzione $x\mapsto x^4$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, anche la funzione integrale $F\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Dal teorema di Torricelli e dalla regola della catena, otteniamo

$$F'(x)=4x^3(\mathrm{e}^{3x^2}-4\mathrm{e}^{2x^2})(9x^2-1)^3=4x^3\mathrm{e}^{2x^2}(\mathrm{e}^{x^2}-4)(9x^2-1)^3$$
$$\begin{cases}>0 & \text{per } x\in(-\sqrt{\log 4},-1/3)\cup(0,1/3)\cup(\sqrt{\log 4},+\infty);\\ =0 & \text{per } x=\pm 1/3;0;\pm\sqrt{\log 4};\\ <0 & \text{per } x\in(-\infty,-\sqrt{\log 4})\cup(-1/3,0)\cup(1/3,\sqrt{\log 4});\end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che $4x^3>0$ per $x>0$, $\mathrm{e}^{2x^2}>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x^2}-4>0$ per $x^2>\log 4$, ovvero per $x<-\sqrt{\log 4}$ o $x>\sqrt{\log 4}$, e $9x^2-1>0$ per $x<-1/3$ o $x>1/3$. Pertanto, $x=\pm 1/3$ sono punti di massimo relativo, mentre $x=\pm\sqrt{\log 4};0$ sono punti di minimo relativo.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione a) è falsa, infatti basta prendere $a_n = \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ e $b_n = n^2 \to +\infty$, da cui si ottiene $a_n^2\sqrt{b_n} = \frac{1}{n^2}\,n = \frac{1}{n}$ che fornisce una serie divergente.

L'affermazione b) è falsa, infatti basta prendere $a_n = \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ e $b_n = \sqrt{n} \to +\infty$, da cui si ottiene $\frac{\sqrt{a_n}}{b_n} = \frac{1}{n}$ che fornisce una serie divergente.

L'affermazione c) è vera, poiché per le ipotesi fatte, almeno definitivamente, si ha che $a_n^3/b_n \leq a_n^3 \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, che fornisce una serie convergente. Quindi per il criterio del confronto anche la serie proposta è convergente.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta è soddisfatta dall'insieme delle soluzioni delle due equazioni $z^3 - i = 0$ e $z^4 - 1 + \sqrt{3}i = 0$. La prima si riduce a $z^3 = i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$, cioè a determinare le 3 radice terze di i, mentre la seconda si riduce a $z^4 = 1 - \sqrt{3}i = 2\mathrm{e}^{-i\pi/3}$, cioè a determinare le 4 radici quarte di $1 - \sqrt{3}i$. Pertanto, otteniamo

$$z = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{i\pi/2}} = \mathrm{e}^{i(\pi/2+2k\pi)/3} = \begin{cases} \mathrm{e}^{i\pi/6}\,, \\ \mathrm{e}^{5i\pi/6}\,, \\ \mathrm{e}^{9i\pi/6} = -i\,; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad z = \sqrt[4]{2\mathrm{e}^{-i\pi/3}} = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{i(-\pi/3+2k\pi)/4} = \begin{cases} \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-i\pi/12}\,, \\ \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{5i\pi/12}\,, \\ \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{11i\pi/12}\,, \\ \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{17i\pi/12}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Ricordando che $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^4)$, con $x = 1/\sqrt[4]{n} \to 0$, si ricava

$$\begin{aligned} a_n := \frac{\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1 + \frac{4\alpha-1}{\sqrt{n}}\right]}{\log(3+\mathrm{e}^{\sqrt{n}/2})} &\sim \frac{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)^4 + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{(4\alpha-1)}{\sqrt{n}}\right]}{\log(\mathrm{e}^{\sqrt{n}/2})} \\ &= \frac{\left[\frac{8\alpha-3}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}{\sqrt{n}/2} = \frac{8\alpha-3}{n} + \frac{1}{12n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\ &\sim \begin{cases} \dfrac{8\alpha-3}{n} & \text{se } \alpha \neq 3/8, \text{ quindi la serie diverge, per confronto con la serie armonica;} \\ \dfrac{1}{12n^{3/2}} & \text{se } \alpha = 3/8, \text{ quindi la serie converge per confronto con la serie armonica} \\ & \text{generalizzata di esponente } 3/2 > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, priva di integrali singolari. Ponendo $f(x) = \sin x \sin(2x)$ e $g(y) = 5y^2 + 4$, si osserva che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, pertanto esiste un intorno U di 0 ed un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(U)$ del problema proposto. Separando le variabili e ricordando che $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{20}} \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}y\right) = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}y\right)^2 + 1}\,dy = \int \frac{1}{5y^2+4}\,dy = \int 2\sin^2 x \cos x\,dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{1}{\sqrt{20}}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{20}}\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{2}{\sqrt{15}}\right) = C$, che fornisce

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\sqrt{5}}{3}\sin^3 x\right)\,.$$

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda f è definita e continua in $[0,+\infty)$ e la funzione $x \mapsto x^4$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, anche la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Dal teorema di Torricelli e dalla regola della catena, otteniamo

$$F'(x) = 4x^3(\mathrm{e}^{3x^2} - 5\mathrm{e}^{2x^2})(1-9x^2)^3 = 4x^3\mathrm{e}^{2x^2}(\mathrm{e}^{x^2} - 5)(1-9x^2)^3$$
$$\begin{cases} < 0 & \text{per } x \in (-\sqrt{\log 5}, -1/3) \cup (0, 1/3) \cup (\sqrt{\log 5}, +\infty); \\ = 0 & \text{per } x = \pm 1/3; 0; \pm\sqrt{\log 5}; \\ > 0 & \text{per } x \in (-\infty, -\sqrt{\log 5}) \cup (-1/3, 0) \cup (1/3, \sqrt{\log 5}); \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che $4x^3 > 0$ per $x > 0$, $\mathrm{e}^{2x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x^2} - 5 > 0$ per $x^2 > \log 5$, ovvero per $x < -\sqrt{\log 5}$ o $x > \sqrt{\log 5}$, e $1 - 9x^2 > 0$ per $-1/3 < x < 1/3$. Pertanto, $x = \pm 1/3$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = \pm\sqrt{\log 5}; 0$ sono punti di massimo relativo.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione $a)$ è falsa, infatti basta prendere $a_n = \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ e $b_n = n^2 \to +\infty$, da cui si ottiene $a_n^2 \sqrt{b_n} = \frac{1}{n^2}\, n = \frac{1}{n}$ che fornisce una serie divergente.

L'affermazione $b)$ è falsa, infatti basta prendere $a_n = \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ e $b_n = \sqrt{n} \to +\infty$, da cui si ottiene $\frac{\sqrt{a_n}}{b_n} = \frac{1}{n}$ che fornisce una serie divergente.

L'affermazione $c)$ è vera, poiché per le ipotesi fatte, almeno definitivamente, si ha che $a_n^3/b_n \le a_n^3 \le \frac{1}{n^{3/2}}$, che fornisce una serie convergente. Quindi per il criterio del confronto anche la serie proposta è convergente.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta è soddisfatta dall'insieme delle soluzioni delle due equazioni $z^4 + i = 0$ e $z^3 + 1 - \sqrt{3}i = 0$. La prima si riduce a $z^4 = -i = \mathrm{e}^{-i\pi/2}$, cioè a determinare le 4 radice quarte di $-i$, mentre la seconda si riduce a $z^3 = -1 + \sqrt{3}i = 2\mathrm{e}^{2i\pi/3}$, cioè a determinare le 3 radici terze di $-1 + \sqrt{3}i$. Pertanto, otteniamo

$$z = \sqrt[4]{\mathrm{e}^{-i\pi/2}} = \mathrm{e}^{i(-\pi/2+2k\pi)/4} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-i\pi/8}, \\ \mathrm{e}^{3i\pi/8}, \\ \mathrm{e}^{7i\pi/8}, \\ \mathrm{e}^{11i\pi/8}; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad z = \sqrt[3]{2\mathrm{e}^{2i\pi/3}} = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{i(2\pi/3+2k\pi)/3} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{2i\pi/9}, \\ \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{8i\pi/9}, \\ \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{14i\pi/9}. \end{cases}$$

Esercizio 2

Ricordando che $\mathrm{e}^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$, con $x = (2\alpha - 1)/n^2 \to 0$, si ricava

$$a_n := \left[\exp\left(\frac{2\alpha-1}{n^2}\right) - 1 - \frac{4}{n^2}\right]\log(2 + \mathrm{e}^{n/2}) \sim \left[\frac{2\alpha-1}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha-1}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - \frac{4}{n^2}\right]\log(\mathrm{e}^{n/2})$$

$$= \left[\frac{2\alpha-5}{n^2} + \frac{(2\alpha-1)^2}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right](n/2) = \frac{2\alpha-5}{2n} + \frac{(2\alpha-1)^2}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{2\alpha-5}{2n} & \text{se } \alpha \neq 5/2, \text{ quindi la serie diverge, per confronto con la serie armonica;} \\ \dfrac{4}{n^3} & \text{se } \alpha = 5/2, \text{ quindi la serie converge per confronto con la serie armonica} \\ & \text{generalizzata di esponente } 3 > 1. \end{cases}$$

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, priva di integrali singolari. Ponendo $f(x) = \sin x \cos(2x)$ e $g(y) = 3y^2 + 2$, si osserva che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, pertanto esiste un intorno U di $\pi/2$ ed un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(U)$ del problema proposto. Separando le variabili e ricordando che $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}y\right) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}y\right)^2 + 1}\,dy = \int \frac{1}{3y^2+2}\,dy = \int (2\cos^2 x - 1)\sin x\,dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x + \cos x + C.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = C$, che fornisce

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{8}{3}}\cos^3 x + \sqrt{6}\cos x\right).$$

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda f è definita e continua in $[0, +\infty)$ e la funzione $x \mapsto x^2$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, anche la funzione integrale $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Dal teorema di Torricelli e dalla regola della catena, otteniamo

$$F'(x) = 2x(2\mathrm{e}^{2x^2} - 3\mathrm{e}^{x^2})\sqrt[3]{1-x^2} = 2x\mathrm{e}^{x^2}(2\mathrm{e}^{x^2} - 3)\sqrt[3]{1-x^2}$$

$$\begin{cases} < 0 & \text{per } x \in (-1, -\sqrt{\log(3/2)}) \cup (0, \sqrt{\log(3/2)}) \cup (1, +\infty); \\ = 0 & \text{per } x = \pm 1; 0; \pm\sqrt{\log(3/2)}; \\ > 0 & \text{per } x \in (-\infty, -1) \cup (-\sqrt{\log(3/2)}, 0) \cup (\sqrt{\log(3/2)}, 1); \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che $2x > 0$ per $x > 0$, $\mathrm{e}^{x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $2\mathrm{e}^{x^2} - 3 > 0$ per $x^2 > \log(3/2)$, ovvero per $x < -\sqrt{\log(3/2)}$ o $x > \sqrt{\log(3/2)}$, e $1 - x^2 > 0$ per $-1 < x < 1$. Pertanto, $x = \pm 1; 0$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = \pm\sqrt{\log(3/2)}$ sono punti di minimo relativo.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) L'affermazione a) è falsa, infatti basta prendere $a_n = \frac{1}{n^{3/4}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ e $b_n = n^{1/5} \to +\infty$, da cui si ottiene $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^{19/20}}$ che fornisce una serie divergente.
L'affermazione b) è vera, poiché per le ipotesi fatte si ha che $b_n/a_n \to +\infty \neq 0$, cioè non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.
L'affermazione C) è falsa, infatti basta prendere $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[4]{\log n}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ e $b_n = \sqrt[4]{\log n} \to +\infty$, da cui si ottiene $\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1}{n \log n}$ che fornisce una serie divergente.