SOLUZIONI APPELLO STRAORDINARIO del 12/11/2012
ANALISI MATEMATICA - 5 CFU
INGEGNERIA ENERGETICA

Esercizio 1

Innanzitutto, osserviamo che la serie proposta è a termini positivi. Utilizzando il limite notevole $\sin\varepsilon_n \sim \varepsilon_n$, per $\varepsilon_n \to 0$ con $\varepsilon_n = \mathrm{e}^{-n}$, le proprietà dei logaritmi e la gerarchia degli infiniti, otteniamo

$$\frac{[\sin(\mathrm{e}^{-n})]^\alpha}{\log(n^2) + 2\log n} \sim \frac{(\mathrm{e}^{-n})^\alpha}{4\log n} = \frac{1}{4\mathrm{e}^{\alpha n}\log n} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \geq 0; \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Pertanto, se $\alpha < 0$, il termine generale non soddisfa la condizione necessaria e quindi la serie non converge. Se, invece, $\alpha = 0$,

$$\frac{[\sin(\mathrm{e}^{-n})]^\alpha}{\log(n^2) + 2\log n} = \frac{1}{4\log n},$$

che non converge, in quanto si tratta della serie di Abel con esponenti $p = 0$ e $q = 1$, che è divergente. Infine, se $\alpha > 0$, si ha

$$0 \leq \frac{[\sin(\mathrm{e}^{-n})]^\alpha}{\log(n^2) + 2\log n} \leq \frac{C}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^\alpha}\right)^n,$$

per un'opportuna costante $C > 0$ e, quindi, la serie proposta converge per il criterio del confronto con la serie geometrica di ragione $1/\mathrm{e}^\alpha < 1$.

Esercizio 2

Osserviamo che l'integranda è una funzione continua sull'intervallo $(0, 1]$, quindi l'integrale proposto va studiato solo per $x \to 0$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \mathrm{e}^x - 1$, e per la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$, per $x \to 0$ si ottiene

$$\frac{\sin(\mathrm{e}^x - 1)}{3x^{7/6} + 2x^4} \sim \frac{\mathrm{e}^x - 1}{3x^{7/6}} \sim \frac{x}{3x^{7/6}} = \frac{1}{3x^{1/6}}.$$

Poiché la funzione $f(x) = \frac{1}{x^{1/6}}$ è integrabile in senso improprio in un intorno di 0^+, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale proposto converge.

Esercizio 3

Osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è $3\lambda^2 - 9 = 0$, cha ha per soluzioni $\lambda = \pm\sqrt{3}$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x}$. Inoltre, per il metodo di sovrapposizione, la soluzione particolare $y_p(x)$ si può ottenere come somma di due funzioni $y_{1p}(x) + y_{2p}(x)$, di cui la seconda non dipende da α ed è costituita dalla funzione costante $y_{2p}(x) = -5/9$. La prima funzione, invece, dipende da α.
Per $\alpha = 0$, anch'essa risulta essere costante e sarà data da $y_{1p}(x) = -2/9$.
Per $\alpha \neq \pm\sqrt{3}$, la soluzione particolare sarà della forma $y_{1p}(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x}$, da cui $y'_{1p}(x) = \alpha A\mathrm{e}^{\alpha x}$ e $y''_{1p}(x) = \alpha^2 A\mathrm{e}^{\alpha x}$; introducendo quanto trovato nell'equazione completa, otteniamo

$$3\alpha^2 A\mathrm{e}^{\alpha x} - 9A\mathrm{e}^{\alpha x} = 2\mathrm{e}^{\alpha x},$$

da cui $(3\alpha^2 - 9)A = 2$, ovvero $A = 2(3\alpha^2 - 9)^{-1}$.
Per $\alpha = \sqrt{3}$, la soluzione particolare sarà della forma $y_{1p}(x) = Ax\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}$, da cui $y'_{1p}(x) = A\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} + \sqrt{3}Ax\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}$ e $y''_{1p}(x) = 2\sqrt{3}A\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} + 3Ax\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}$; introducendo quanto trovato nell'equazione completa, otteniamo

$$6\sqrt{3}A\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} + 9Ax\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} - 9Ax\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} = 2\mathrm{e}^{\sqrt{3}x},$$

da cui $6\sqrt{3}A = 2$, ovvero $A = (3\sqrt{3})^{-1}$.

Per $\alpha = -\sqrt{3}$, prendendo la soluzione particolare della forma $y_{1p}(x) = Axe^{-\sqrt{3}x}$ e ripetendo i medesimi calcoli appena effettuati, otteniamo $A = -(3\sqrt{3})^{-1}$.
Concludendo, si ricava

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} - 7/9 & \text{se } \alpha = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + \frac{2}{3\alpha^2 - 9}\, e^{\alpha x} - 5/9 & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{3}, \\ C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\, x e^{\sqrt{3}x} - 5/9 & \text{se } \alpha = \sqrt{3}, \\ C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\, x e^{-\sqrt{3}x} - 5/9 & \text{se } \alpha = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Esercizio 4

Effettuando una sostituzione in coordinate polari piane centrate nell'origine, l'insieme E si riscrive nella forma

$$\widetilde{E} = \{(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \ : \ \sqrt{\pi} \leq r \leq \sqrt{3\pi/2}\,, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

e l'integrale proposto diviene

$$\iint_E x \, \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx\, dy = \iint_{\widetilde{E}} \frac{r \cos\theta \sin(r^2)}{r} \, r\, dr\, d\theta = \left(\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{3\pi/2}} r \sin(r^2) \, dr \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \right)$$

$$= \left(- \frac{\cos(r^2)}{2} \Big|_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{3\pi/2}} \right) \left(\sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = \left(\frac{-\cos(3\pi/2) + \cos\pi}{2} \right) [\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)] = -\frac{1}{2}\, 2 = -1\,.$$

Esercizio 5

L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, $a_n = \sqrt{\log n} \to +\infty$, $b_n = 1$, che è limitata, e $c_n = 1/(n\sqrt{\log n}) = o(1/n)$. In tal caso otteniamo

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n c_n}{a_n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 \cdot 1/(n\sqrt{\log n})}{\sqrt{\log n}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$

che diverge, in quanto è la serie di Abel di esponenti $p = 1$ e $q = 1$.