SOLUZIONI COMPITO del 13/01/2020
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z(z^4-16)=0$, da cui si ricava $z=0$ e $z^4=16$, pertanto

$$z=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{16\,\mathrm{e}^{i0}}=\begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{i0/4}=2\,, \\ 2\,\mathrm{e}^{i(0+2\pi)/4}=2\,\mathrm{e}^{i\pi/2}=2i\,, \\ 2\,\mathrm{e}^{i(0+4\pi)/4}=2\,\mathrm{e}^{i\pi}=-2\,, \\ 2\,\mathrm{e}^{i(0+6\pi)/4}=2\,\mathrm{e}^{i3\pi/2}=-2i\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Chiaramente per $\alpha=0$ la serie proposta si riscrive nella forma $-\sum\left(\frac{4(2n-\sqrt{n}+4)}{n^2}\right)$, il cui termine generale $a_n\sim 8/n$. Quindi, per confronto asintotico con la serie armonica, essa diverge. Pertanto, studiamo in dettaglio il caso $\alpha>0$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t\mapsto\log(1+t)$, con $t=5\alpha/n$, si ottiene

$$\log^2\left(1+\frac{5\alpha}{n}\right)=\left[\frac{5\alpha}{n}-\frac{25\alpha^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2=\frac{25\alpha^2}{n^2}-\frac{125\alpha^3}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\,.$$

Quindi possiamo riscrivere

$$a_n:=(2n-\sqrt{n}+4)\left[\log^2\left(1+\frac{5\alpha}{n}\right)-\frac{4}{n^2}\right]\sim 2n\left[\frac{25\alpha^2}{n^2}-\frac{125\alpha^3}{n^3}-\frac{4}{n^2}\right]=\frac{2(25\alpha^2-4)}{n}-\frac{250\alpha^3}{n^2}\,.$$

In definitiva, se $\alpha\neq 2/5$, si ottiene $a_n\sim\frac{2(25\alpha^2-4)}{n}$ e, quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie diverge, mentre se $\alpha=2/5$, si ottiene $a_n\sim-\frac{16}{n^2}$ e quindi, sempre per il criterio del confronto asintotico, la serie converge.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che, riscritta nella forma $y'(x)=-y^4(x)(4\mathrm{e}^{4x}+1)$, risulta essere a variabili separabili e dotata di un unico integrale singolare $y(x)\equiv 0$, che non soddisfa la condizione iniziale. Separando le variabili ed integrando, otteniamo

$$\frac{1}{3y^3(x)}=-\int\frac{dy}{y^4}=\int(4\mathrm{e}^{4x}+1)\,dx=\mathrm{e}^{4x}+x+C \qquad\Longrightarrow\qquad y(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{3\mathrm{e}^{4x}+3x+K}}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=y(0)=\frac{1}{\sqrt[3]{3+K}}$, che porta a $K=0$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x)=(3\mathrm{e}^{4x}+3x)^{-1/3}$.

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda è definita, non negativa e continua in $(0,1]$, per stabilire se l'integrale improprio esiste finito è sufficiente studiare il comportamento di f per $x\to 0^+$. Tenendo conto che, per $x\to 0^+$, $\sinh x\sim x$, $\sqrt[3]{x^2+x^3}\sim\sqrt[3]{x^2}$ e $\log(1+x)\sim x$, da cui $\sqrt{\log(1+x)}\sim\sqrt{x}$, otteniamo

$$f(x)\sim\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x}}=\frac{x}{x^{7/6}}=\frac{1}{x^{1/6}}\,,\qquad \text{per } x\to 0^+.$$

Pertanto, f risulta essere impropriamente integrabile in un intorno dell'origine, per confronto asintotico con l'iperbole di esponente $1/6<1$.

Esercizio 5

1. Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.

2. Poiché $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, possiamo scrivere $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$. Inoltre, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, da cui si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 3\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 - 3x + \frac{3x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + [f'(0) - 3]x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{(f'''(0)+3)}{6}x^3}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + [f'(0) - 3]x + \frac{f''(0)}{2}x^2}{x^3} + \frac{(f'''(0) + 3)}{6}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = -2$; ovvero lo sviluppo di Mc Laurin richiesto è

$$f(x) = 3x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\,, \qquad \text{per} \ \ x \to 0\,.$$

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z(z^4 - 81i) = 0$, da cui si ricava $z = 0$ e $z^4 = 81i$, pertanto

$$z = \sqrt[4]{81i} = \sqrt[4]{81\,\mathrm{e}^{i\pi/2}} = \begin{cases} 3\,\mathrm{e}^{i\pi/8}\,, \\ \\ 3\,\mathrm{e}^{i(\pi/2+2\pi)/4} = 3\,\mathrm{e}^{i5\pi/8}\,, \\ \\ 3\,\mathrm{e}^{i(\pi/2+4\pi)/4} = 3\,\mathrm{e}^{i9\pi/8}\,, \\ \\ 3\,\mathrm{e}^{i(\pi/2+6\pi)/4} = 3\,\mathrm{e}^{i13\pi/8}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Chiaramente per $\alpha = 0$ la serie proposta si riscrive nella forma $-\sum\left(\frac{4(3n-2\sqrt{n}-5)}{n^2}\right)$, il cui termine generale $a_n \sim 12/n$. Quindi, per confronto asintotico con la serie armonica, essa diverge. Pertanto, studiamo in dettaglio il caso $\alpha \neq 0$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 5\alpha/n$, si ottiene

$$\sin^2\left(\frac{5\alpha}{n}\right) = \left[\frac{5\alpha}{n} - \frac{125\alpha^3}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]^2 = \frac{25\alpha^2}{n^2} - \frac{625\alpha^4}{3n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\,.$$

Quindi possiamo riscrivere

$$a_n := (3n - 2\sqrt{n} - 5)\left[\sin^2\left(\frac{5\alpha}{n}\right) - \frac{4}{n^2}\right] \sim 3n\left[\frac{25\alpha^2}{n^2} - \frac{625\alpha^4}{3n^4} - \frac{4}{n^2}\right] = \frac{3(25\alpha^2-4)}{n} - \frac{625\alpha^4}{n^3}\,.$$

In definitiva, se $\alpha \neq \pm 2/5$, si ottiene $a_n \sim \frac{3(25\alpha^2-4)}{n}$ e, quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie diverge, mentre se $\alpha = \pm 2/5$, si ottiene $a_n \sim -\frac{16}{n^3}$ e quindi, sempre per il criterio del confronto asintotico, la serie converge.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che, riscritta nella forma $y'(x) = -y^6(x)\left(\frac{4}{x^5}+1\right)$, risulta essere a variabili separabili e dotata di un unico integrale singolare $y(x) \equiv 0$, che non soddisfa la condizione iniziale. Separando le variabili ed integrando, otteniamo

$$\frac{1}{5y^5(x)} = -\int \frac{dy}{y^6} = \int\left(\frac{4}{x^5}+1\right)dx = -\frac{1}{x^4} + x + C = \frac{-1 + x^5 + Cx^4}{x^4} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \sqrt[5]{\frac{x^4}{-5+5x^5+Kx^4}}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $1 = y(1) = \frac{1}{\sqrt[5]{K}}$, che porta a $K = 1$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x) = \sqrt[5]{\frac{x^4}{-5+5x^5+x^4}}$.

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda è definita, non negativa e continua in $(0, 1]$, per stabilire se l'integrale improprio esiste finito è sufficiente studiare il comportamento di f per $x \to 0^+$. Tenendo conto che, per $x \to 0^+$, $\tanh x \sim x$, da cui $(\tanh x)^2 \sim x^2$, $\sqrt[3]{x + x^3} \sim \sqrt[3]{x}$ e $\log(1 + \sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x}}{x^2} = \frac{x^{5/6}}{x^2} = \frac{1}{x^{7/6}}\,, \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Pertanto, f risulta non essere impropriamente integrabile in un intorno dell'origine, per confronto asintotico con l'iperbole di esponente $7/6 > 1$.

Esercizio 5

1. Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.

2. Poiché $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, possiamo scrivere $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$. Inoltre, $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, da cui si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2\log(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 - 2x + x^2 - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + [f'(0) - 2]x + \frac{(f''(0)+2)}{2}x^2 + \frac{(f'''(0)-4)}{6}x^3}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + [f'(0) - 2]x + \frac{(f''(0)+2)}{2}x^2}{x^3} + \frac{(f'''(0) - 4)}{6}\,.\end{aligned}$$

Pertanto, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = -2$ e $f'''(0) = 5$; ovvero lo sviluppo di Mc Laurin richiesto è

$$f(x) = 2x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)\,, \qquad \text{per} \;\; x \to 0\,.$$

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z(z^4+81i)=0$, da cui si ricava $z=0$ e $z^4=-81i$, pertanto

$$z=\sqrt[4]{-81i}=\sqrt[4]{81\,\mathrm{e}^{i3\pi/2}}=\begin{cases}3\,\mathrm{e}^{i(3\pi/2)/4}=3\,\mathrm{e}^{i3\pi/8}\,,\\[2ex] 3\,\mathrm{e}^{i(3\pi/2+2\pi)/4}=3\,\mathrm{e}^{i7\pi/8}\,,\\[2ex] 3\,\mathrm{e}^{i(3\pi/2+4\pi)/4}=3\,\mathrm{e}^{i11\pi/8}\,,\\[2ex] 3\,\mathrm{e}^{i(3\pi/2+6\pi)/4}=3\,\mathrm{e}^{i15\pi/8}\,.\end{cases}$$

Esercizio 2

Chiaramente per $\alpha=0$ la serie proposta si riscrive nella forma $-\sum\left(\frac{5(3n-2\sqrt{n}-5)}{n^2}\right)$, il cui termine generale $a_n\sim 15/n$. Quindi, per confronto asintotico con la serie armonica, essa diverge. Pertanto, studiamo in dettaglio il caso $\alpha\neq 0$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t\mapsto\sin t$, con $t=4\alpha/n$, si ottiene

$$\sin^2\left(\frac{4\alpha}{n}\right)=\left[\frac{4\alpha}{n}-\frac{64\alpha^3}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]^2=\frac{16\alpha^2}{n^2}-\frac{256\alpha^4}{3n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\,.$$

Quindi possiamo riscrivere

$$a_n:=(3n-2\sqrt{n}-5)\left[\sin^2\left(\frac{4\alpha}{n}\right)-\frac{5}{n^2}\right]\sim 3n\left[\frac{16\alpha^2}{n^2}-\frac{256\alpha^4}{3n^4}-\frac{5}{n^2}\right]=\frac{3(16\alpha^2-5)}{n}-\frac{256\alpha^4}{n^3}\,.$$

In definitiva, se $\alpha\neq\pm\sqrt{5}/4$, si ottiene $a_n\sim\frac{3(16\alpha^2-5)}{n}$ e, quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie diverge, mentre se $\alpha=\pm\sqrt{5}/4$, si ottiene $a_n\sim-\frac{25}{n^3}$ e quindi, sempre per il criterio del confronto asintotico, la serie converge.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che, riscritta nella forma $y'(x)=y^6(x)\left(\frac{3}{x^4}+1\right)$, risulta essere a variabili separabili e dotata di un unico integrale singolare $y(x)\equiv 0$, che non soddisfa la condizione iniziale. Separando le variabili ed integrando, otteniamo

$$-\frac{1}{5y^5(x)}=\int\frac{dy}{y^6}=\int\left(\frac{3}{x^4}+1\right)dx=-\frac{1}{x^3}+x+C=\frac{-1+x^4+Cx^3}{x^3}\qquad\Longrightarrow\qquad y(x)=\sqrt[5]{\frac{x^3}{5-5x^4+Kx^3}}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $-1=y(1)=\frac{1}{\sqrt[5]{K}}$, che porta a $K=-1$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x)=\sqrt[5]{\frac{x^3}{5-5x^4-x^3}}$.

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda è definita, non negativa e continua in $(0,1]$, per stabilire se l'integrale improprio esiste finito è sufficiente studiare il comportamento di f per $x\to 0^+$. Tenendo conto che, per $x\to 0^+$, $\tanh(x^3)\sim x^3$, da cui $\sqrt{\tanh(x^3)}\sim\sqrt{x^3}$, $\sqrt[4]{x^3+x^4}\sim\sqrt[4]{x^3}$ e $\log(1+\sqrt[3]{x})\sim\sqrt[3]{x}$, otteniamo

$$f(x)\sim\frac{\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3}}=\frac{x^{13/12}}{x^{3/2}}=\frac{1}{x^{5/12}}\,,\qquad\text{per } x\to 0^+.$$

Pertanto, f risulta essere impropriamente integrabile in un intorno dell'origine, per confronto asintotico con l'iperbole di esponente $5/12<1$.

Esercizio 5

1. Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.

2. Poiché $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, possiamo scrivere $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$. Inoltre, $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, da cui si ottiene

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{6} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2\log(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 - 2x + x^2 - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + [f'(0) - 2]x + \frac{(f''(0)+2)}{2}x^2 + \frac{(f'''(0)-4)}{6}x^3}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + [f'(0) - 2]x + \frac{(f''(0)+2)}{2}x^2}{x^3} + \frac{(f'''(0) - 4)}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = -2$ e $f'''(0) = 5$; ovvero lo sviluppo di Mc Laurin richiesto è

$$
f(x) = 2x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)\,, \qquad \text{per} \;\; x \to 0\,.
$$

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z(z^4+16)=0$, da cui si ricava $z=0$ e $z^4=-16$, pertanto

$$z=\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16\,\mathrm{e}^{i\pi}}=\begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{i\pi/4}=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2}\,, \\[2ex] 2\,\mathrm{e}^{i(\pi+2\pi)/4}=2\,\mathrm{e}^{i3\pi/4}=2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\,, \\[2ex] 2\,\mathrm{e}^{i(\pi+4\pi)/4}=2\,\mathrm{e}^{i5\pi/4}=2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\,, \\[2ex] 2\,\mathrm{e}^{i(\pi+6\pi)/4}=2\,\mathrm{e}^{i7\pi/4}=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Chiaramente per $\alpha=0$ la serie proposta si riscrive nella forma $-\sum\left(\frac{5(2n-\sqrt{n}+4)}{n^2}\right)$, il cui termine generale $a_n\sim 10/n$. Quindi, per confronto asintotico con la serie armonica, essa diverge. Pertanto, studiamo in dettaglio il caso $\alpha>0$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin per la funzione $t\mapsto\log(1+t)$, con $t=4\alpha/n$, si ottiene

$$\log^2\left(1+\frac{4\alpha}{n}\right)=\left[\frac{4\alpha}{n}-\frac{16\alpha^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2=\left(\frac{4\alpha}{n}\right)^2-\frac{64\alpha^3}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Quindi possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} a_n:&=(2n-\sqrt{n}+4)\left[\log^2\left(1+\frac{4\alpha}{n}\right)-\frac{5}{n^2}\right]\sim 2n\left[\frac{16\alpha^2}{n^2}-\frac{64\alpha^3}{n^3}-\frac{5}{n^2}\right] \\ &=2n\left[\frac{(16\alpha^2-5)}{n^2}-\frac{64\alpha^3}{n^3}\right]=\frac{2(16\alpha^2-5)}{n}-\frac{128\alpha^3}{n^2}\,. \end{aligned}$$

In definitiva, se $\alpha\neq\sqrt{5}/4$, si ottiene $a_n\sim\frac{2(16\alpha^2-5)}{n}$ e, quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie diverge, mentre se $\alpha=\sqrt{5}/4$, si ottiene $a_n\sim-\frac{5\sqrt{5}}{n^2}$ e quindi, sempre per il criterio del confronto asintotico, la serie converge.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che, riscritta nella forma $y'(x)=y^4(x)(3\mathrm{e}^{3x}+1)$, risulta essere a variabili separabili e dotata di un unico integrale singolare $y(x)\equiv 0$, che non soddisfa la condizione iniziale. Separando le variabili ed integrando, otteniamo

$$-\frac{1}{3y^3(x)}=\int\frac{dy}{y^4}=\int(3\mathrm{e}^{3x}+1)\,dx=\mathrm{e}^{3x}+x+C\qquad\Longrightarrow\qquad y(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{-3\mathrm{e}^{3x}-3x+K}}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=y(0)=\frac{1}{\sqrt[3]{-3+K}}$, che porta a $K=0$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x)=-(3\mathrm{e}^{3x}+3x)^{-1/3}$.

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda è definita, non negativa e continua in $(0,1]$, per stabilire se l'integrale improprio esiste finito è sufficiente studiare il comportamento di f per $x \to 0^+$. Tenendo conto che, per $x \to 0^+$, $\sinh x \sim x$, da cui $\sqrt{\sinh x} \sim \sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x^2+x} \sim \sqrt[4]{x}$ e $\log(1+x^2) \sim x^2$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} \cdot x^2} = \frac{x^{1/2}}{x^{9/4}} = \frac{1}{x^{7/4}}\,, \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Pertanto, f risulta non essere impropriamente integrabile in un intorno dell'origine, per confronto asintotico con l'iperbole di esponente $7/4 > 1$.

Esercizio 5

1. Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.

2. Poiché $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, possiamo scrivere $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$. Inoltre, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, da cui si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 3\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 - 3x + \frac{3x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + [f'(0)-3]x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{(f'''(0)+3)}{6}x^3}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f(0) + [f'(0)-3]x + \frac{f''(0)}{2}x^2}{x^3} + \frac{(f'''(0)+3)}{6}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = -2$; ovvero lo sviluppo di Mc Laurin richiesto è

$$f(x) = 3x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\,, \qquad \text{per } \ x \to 0\,.$$