SOLUZIONI COMPITO del 13/02/2019
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Ponendo $z = a + ib$, da cui $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ed osservando che $e^{i\pi/2} = i$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$a^2 - b^2 + 2iab + i\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} = 4i\,.$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie, si arriva al sistema reale

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0\,, \\ 2ab + \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} = 4\,, \end{cases} \implies \begin{cases} a = b\,, \\ 2b^2 + \sqrt{2}\sqrt{2b^2} = 4\,, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a = -b\,, \\ -2b^2 + \sqrt{2}\sqrt{2b^2} = 4\,. \end{cases}$$

La seconda equazione del primo sistema si può riscrivere nella forma $|b|^2 + |b| - 2 = 0$, da cui $|b| = -2; 1$, ovvero $b = \pm 1$, poiché $|b| = -2$ è impossibile. La seconda equazione del secondo sistema, invece, si può riscrivere nella forma $|b|^2 - |b| + 2 = 0$, che risulta impossibile. Pertanto, sostituendo i valori di b nella prima equazione del primo sistema otteniamo $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ e $z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{5i\pi/4}$.

Esercizio 2

La funzione proposta è data dal rapporto di un polinomio non decomponibile al denominatore per una funzione integrale di integranda continua su tutto $\mathbb{R}$, composta con una potenza; pertanto, risulta essere una funzione continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo anche che F è una funzione pari. Ponendo

$$G(x) = \int_1^{x^2} \frac{\arctan t + \pi}{4 + e^{-2|t|}(1 + \sin t)}\, dt\,,$$

si ricava che

$$\lim_{x\to\pm\infty} G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t + \pi}{4 + e^{-2|t|}(1 + \sin t)}\, dt = +\infty\,,$$

in quanto

$$f(t) := \frac{\arctan t + \pi}{4 + e^{-2|t|}(1 + \sin t)} \sim \frac{\pi/2 + \pi}{4} \qquad \text{per } t \to +\infty,$$

e quindi l'integrale improprio risulta essere divergente. Utilizzando il Teorema di de l'Hospital, il Teorema di Torricelli e il Teorema di derivazione della funzione composta, otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} F(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{G(x)}{2x^2 + 1} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{G'(x)}{4x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{\arctan x^2 + \pi}{4 + e^{-2x^2}(1 + \sin x^2)}\, 2x}{4x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pi/2 + \pi}{8} = \frac{3\pi}{16}\,.\end{aligned}$$

Pertanto, la retta $y = \frac{3\pi}{16}$ è asintoto orizzontale per F a $\pm\infty$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Ponendo $f(x) = (\tan x)^3(\cos x)^3$ e $g(y) = (y^3 - \lambda)/y^2$, si ricava che $f \in \mathcal{C}^0(-\pi/2, \pi/2)$ e $g \in \mathcal{C}^1\big((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\big)$; quindi, per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, esiste un'unica soluzione locale di classe $\mathcal{C}^1$ del problema proposto. Osserviamo che l'equazione ammette una soluzione singolare data da $y(x) = \sqrt[3]{\lambda}$; pertanto, per $\sqrt[3]{\lambda} = 2$, cioè $\lambda = 8$, essa sarà la soluzione del problema di Cauchy. Invece, per $\lambda \neq 0; 8$ e $y \neq \sqrt[3]{\lambda}$, procediamo con la separazione delle variabili. Si ricava

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\log|y^3 - \lambda| &= \frac{1}{3}\int \frac{3y^2}{y^3 - \lambda}\, dy = \int (\tan x)^3(\cos x)^3\, dx \\ &= \int (\sin x)^3\, dx = \int [1 - (\cos x)^2]\sin x\, dx = -\cos x + \frac{(\cos x)^3}{3} + C\,,\end{aligned}$$

da cui

$$|y^3(x) - \lambda| = \exp[-3\cos x + (\cos x)^3 + 3C] \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt[3]{K e^{-3\cos x + (\cos x)^3} + \lambda}\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, otteniamo

$$2 = y(0) = \sqrt[3]{K e^{-2} + \lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad K = (8-\lambda)e^2\,.$$

Quindi, la soluzione cercata sarà $y(x) = \sqrt[3]{(8-\lambda)e^{2-3\cos x + (\cos x)^3} + \lambda}$. Per concludere osserviamo che, per $\lambda = 8$, si riottiene la soluzione singolare $y(x) \equiv 2$.

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che, per $x \to 0^+$, la funzione $x \mapsto (\cos x)^{1/2x}$ risulta essere un caso di indecisione della forma 1^∞. Riscrivendo tale espressione come $\exp[\log\big((\cos x)^{1/2x}\big)] = \exp[\frac{1}{2x}\log(\cos x)]$, e ricordando che, per $x \to 0^+$, $\log(1+t) \sim t$, con $t = \cos x - 1$, $\cos x - 1 \sim -x^2/2$, si ottiene

$$\frac{1}{2x}\log(\cos x) = \frac{1}{2x}\log[1 + (\cos x - 1)] \sim \frac{\cos x - 1}{2x} \sim -\frac{x^2/2}{2x} = -\frac{x}{4} \to 0\,.$$

Pertanto, per il limite proposto si ricava

$$\frac{(\cos x)^{1/2x} - 1}{x^{1/3} - \sin(\sqrt[3]{x})} = \frac{\exp[\frac{1}{2x}\log(\cos x)] - 1}{x^{1/3} - \sin(\sqrt[3]{x})} \sim \frac{\frac{1}{2x}\log(\cos x)}{x^{1/3} - x^{1/3} + x/6} \sim -\frac{x/4}{x/6} = -\frac{3}{2}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $x \to 0^+$, $e^t - 1 \sim t$, con $t = \frac{1}{2x}\log(\cos x) \to 0$, ed abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine, della funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \sqrt[3]{x}$.

Esercizio 5

i) Per la definizione e il significato geometrico della derivata si veda il libro di testo.

ii) La prima affermazione è errata, basta considerare la funzione $f(x) = |x|$, che è continua ma non derivabile in $x_0 = 0$. La seconda affermazione è corretta e per la dimostrazione si veda il libro di testo.

iii) Tenendo conto che $\log(1 + x^7) \sim x^7$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al settimo ordine per le funzioni $x \mapsto \sin x$ e $x \mapsto e^x$, possiamo riscrivere

$$5 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sin x - e^x}{\log(1+x^7)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{3}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{7} \frac{x^k}{k!}}{x^7}\,.$$

Pertanto, otteniamo

$$f(x) - \sum_{k=0}^{3}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{k!} \sim 5x^7\,,$$

ovvero

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{k!} + 5x^7 + o(x^7) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{2x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + 5x^7 + o(x^7)\,.$$

TEMA B

Esercizio 1

Ponendo $z = a + ib$, da cui $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, ed osservando che $\mathrm{e}^{3i\pi/2} = -i$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$a^2 - b^2 + 2iab - \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2} = -i\,.$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie, si arriva al sistema reale

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0\,, \\ 2ab - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2} = -1\,, \end{cases} \implies \begin{cases} a = b\,, \\ 2b^2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2b^2} = -1\,, \end{cases} \text{oppure} \quad \begin{cases} a = -b\,, \\ -2b^2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2b^2} = -1\,. \end{cases}$$

La seconda equazione del secondo sistema si può riscrivere nella forma $2|b|^2 + |b| - 1 = 0$, da cui $|b| = -1; 1/2$, ovvero $b = \pm 1/2$, poiché $|b| = -1$ è impossibile. La seconda equazione del primo sistema, invece, si può riscrivere nella forma $2|b|^2 - |b| + 1 = 0$, che risulta impossibile. Pertanto, sostituendo i valori di b nella prima equazione del secondo sistema otteniamo $z_1 = -1/2 + i/2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3i\pi/4}$ e $z_2 = 1/2 - i/2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{7i\pi/4}$.

Esercizio 2

La funzione proposta è data dal rapporto di un polinomio non decomponibile al denominatore per una funzione integrale di integranda continua su tutto $\mathbb{R}$, composta con una potenza; pertanto, risulta essere una funzione continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo anche che F è una funzione pari. Ponendo

$$G(x) = \int_2^{x^4} \frac{3 - \mathrm{e}^{-t^2}(\cos t + 1)}{2\arctan t + 3\pi}\,dt\,,$$

si ricava che

$$\lim_{x\to\pm\infty} G(x) = \int_2^{+\infty} \frac{3 - \mathrm{e}^{-t^2}(\cos t + 1)}{2\arctan t + 3\pi}\,dt = +\infty\,,$$

in quanto

$$f(t) := \frac{3 - \mathrm{e}^{-t^2}(\cos t + 1)}{2\arctan t + 3\pi} \sim \frac{3}{2\pi/2 + 3\pi} \qquad \text{per } t \to +\infty,$$

e quindi l'integrale improprio risulta essere divergente. Utilizzando il Teorema di de l'Hospital, il Teorema di Torricelli e il Teorema di derivazione della funzione composta, otteniamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{G(x)}{x^4+5} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{G'(x)}{4x^3}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3-\mathrm{e}^{-x^8}(\cos x^4+1)}{2\arctan x^4 + 3\pi}4x^3}{4x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{2\pi/2 + 3\pi} = \frac{3}{4\pi}\,.$$

Pertanto, la retta $y = \frac{3}{4\pi}$ è asintoto orizzontale per F a $\pm\infty$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Ponendo $f(x) = (\operatorname{cotan} x)^3(\sin x)^3$ e $g(y) = (y^5 + \lambda)/y^4$, si ricava che $f \in \mathcal{C}^0(0,\pi)$ e $g \in \mathcal{C}^1\big((-\infty,0) \cup (0,+\infty)\big)$; quindi, per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, esiste un'unica soluzione locale di classe $\mathcal{C}^1$ del problema proposto. Osserviamo che l'equazione ammette una soluzione singolare data da $y(x) = -\sqrt[5]{\lambda}$; pertanto, per $-\sqrt[5]{\lambda} = -1/2$, cioè $\lambda = 1/32$, essa sarà la soluzione del problema di Cauchy. Invece, per $\lambda \neq 0; 1/32$ e $y \neq -\sqrt[5]{\lambda}$, procediamo con la separazione delle variabili. Si ricava

$$\frac{1}{5}\log|y^5+\lambda| = \frac{1}{5}\int \frac{5y^4}{y^5+\lambda}\,dy = \int (\operatorname{cotan} x)^3(\sin x)^3\,dx$$
$$= \int (\cos x)^3\,dx = \int [1 - (\sin x)^2]\cos x\,dx = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3} + C\,,$$

da cui

$$|y^5(x)+\lambda| = \exp[5\sin x - \frac{5(\sin x)^3}{3} + 5C] \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt[5]{K\mathrm{e}^{5\sin x - 5(\sin x)^3/3} - \lambda}\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, otteniamo

$$-1/2 = y(\pi/2) = \sqrt[5]{K\mathrm{e}^{10/3} - \lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad K = (\lambda - 1/32)\mathrm{e}^{-10/3}\,.$$

Quindi, la soluzione cercata sarà $y(x) = \sqrt[5]{(\lambda - 1/32)\mathrm{e}^{5\sin x - 5(\sin x)^3/3 - 10/3} - \lambda}$. Per concludere osserviamo che, per $\lambda = 1/32$, si riottiene la soluzione singolare $y(x) \equiv -1/2$.

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che, per $x \to 0^+$, la funzione $x \mapsto [\cos(2x)]^{1/x}$ risulta essere un caso di indecisione della forma 1^∞. Riscrivendo tale espressione come $\exp[\log\left[(\cos(2x))^{1/x}\right]] = \exp[\frac{1}{x}\log(\cos(2x))]$, e ricordando che, per $x \to 0^+$, $\log(1+t) \sim t$, con $t = \cos(2x) - 1$, $\cos(2x) - 1 \sim -(2x)^2/2$, si ottiene

$$\frac{1}{x}\log[\cos(2x)] = \frac{1}{x}\log[1 + (\cos(2x) - 1)] \sim \frac{\cos(2x) - 1}{x} \sim \frac{-4\,x^2/2}{x} = -2x \to 0\,.$$

Pertanto, per il limite proposto si ricava

$$\frac{\sqrt[3]{x - \sinh x}}{1 - [\cos(2x)]^{1/x}} = \frac{\sqrt[3]{x - \sinh x}}{1 - \exp[\frac{1}{x}\log(\cos(2x))]} \sim \frac{\sqrt[3]{x - x - x^3/6}}{-\frac{1}{x}\log(\cos(2x))} \sim \frac{-x/\sqrt[3]{6}}{2x} = -\frac{1}{2\sqrt[3]{6}}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $x \to 0^+$, $\mathrm{e}^t - 1 \sim t$, con $t = \frac{1}{x}\log(\cos(2x)) \to 0$, ed abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine, della funzione $x \mapsto \sinh x$.

Esercizio 5

i) Per la definizione e il significato geometrico della derivata si veda il libro di testo.

ii) La prima affermazione è errata, basta considerare la funzione $f(x) = |x|$, che è continua ma non derivabile in $x_0 = 0$. La seconda affermazione è corretta e per la dimostrazione si veda il libro di testo.

iii) Tenendo conto che $(\sin x)^7 \sim x^7$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al settimo ordine per le funzioni $x \mapsto \cos x$ e $x \mapsto \mathrm{e}^x$, possiamo riscrivere

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + \mathrm{e}^x - f(x)}{(\sin x)^7} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{k!} - f(x)}{x^7}\,.$$

Pertanto, otteniamo

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{k!} - f(x) \sim x^7\,,$$

ovvero

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{k!} - x^7 + o(x^7) = 2 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - x^7 + o(x^7)\,.$$

TEMA C

Esercizio 1

Ponendo $z = a + ib$, da cui $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ed osservando che $e^{-i\pi/2} = -i$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\sqrt{2}a^2 - \sqrt{2}b^2 + 2\sqrt{2}iab + i\sqrt{a^2 + b^2} = -i6\sqrt{2}\,.$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie, si arriva al sistema reale

$$\begin{cases} \sqrt{2}a^2 - \sqrt{2}b^2 = 0\,, \\ 2\sqrt{2}ab + \sqrt{a^2 + b^2} = -6\sqrt{2}\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = b\,, \\ 2\sqrt{2}b^2 + \sqrt{2b^2} = -6\sqrt{2}\,, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a = -b\,, \\ -2\sqrt{2}b^2 + \sqrt{2b^2} = -6\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

La seconda equazione del secondo sistema si può riscrivere nella forma $2|b|^2 - |b| - 6 = 0$, da cui $|b| = -3/2; 2$, ovvero $b = \pm 2$, poiché $|b| = -3/2$ è impossibile. La seconda equazione del primo sistema, invece, si può riscrivere nella forma $2|b|^2 + |b| + 6 = 0$, che risulta impossibile. Pertanto, sostituendo i valori di b nella prima equazione del secondo sistema otteniamo $z_1 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ e $z_2 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{7i\pi/4}$.

Esercizio 2

La funzione proposta è data dal rapporto di un polinomio non decomponibile al denominatore per una funzione integrale di integranda continua su tutto $\mathbb{R}$, composta con una potenza; pertanto, risulta essere una funzione continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo anche che F è una funzione pari. Ponendo

$$G(x) = \int_2^{x^4} \frac{2 + e^{-t^2} \cos t}{3\pi - 2 \arctan t}\, dt\,,$$

si ricava che

$$\lim_{x \to \pm\infty} G(x) = \int_2^{+\infty} \frac{2 + e^{-t^2} \cos t}{3\pi - 2 \arctan t}\, dt = +\infty\,,$$

in quanto

$$f(t) := \frac{2 + e^{-t^2} \cos t}{3\pi - 2 \arctan t} \sim \frac{2}{3\pi - 2\pi/2} \qquad \text{per } t \to +\infty,$$

e quindi l'integrale improprio risulta essere divergente. Utilizzando il Teorema di de l'Hospital, il Teorema di Torricelli e il Teorema di derivazione della funzione composta, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} F(x) &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{G(x)}{2x^4 + 3} \overset{H}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{G'(x)}{8x^3} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2 + e^{-x^8} \cos x^4}{3\pi - 2 \arctan x^4}\, 4x^3}{8x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2}{3\pi - 2\pi/2}}{2} = \frac{1}{2\pi}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, la retta $y = \frac{1}{2\pi}$ è asintoto orizzontale per F a $\pm\infty$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Ponendo $f(x) = (\text{cotan}\, x)^3 (\sin x)^3$ e $g(y) = (y^5 - \lambda)/y^4$, si ricava che $f \in \mathcal{C}^0(0, \pi)$ e $g \in \mathcal{C}^1\big((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\big)$; quindi, per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, esiste un'unica soluzione locale di classe $\mathcal{C}^1$ del problema proposto. Osserviamo che l'equazione ammette una soluzione singolare data da $y(x) = \sqrt[5]{\lambda}$; pertanto, per $\sqrt[5]{\lambda} = 1/2$, cioè $\lambda = 1/32$, essa sarà la soluzione del problema di Cauchy. Invece, per $\lambda \neq 0; 1/32$ e $y \neq \sqrt[5]{\lambda}$, procediamo con la separazione delle variabili. Si ricava

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \log |y^5 - \lambda| &= \frac{1}{5} \int \frac{5y^4}{y^5 - \lambda}\, dy = \int (\text{cotan}\, x)^3 (\sin x)^3\, dx \\ &= \int (\cos x)^3\, dx = \int [1 - (\sin x)^2] \cos x\, dx = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3} + C\,, \end{aligned}$$

da cui

$$|y^5(x)-\lambda| = \exp[5\sin x - \frac{5(\sin x)^3}{3} + 5C] \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt[5]{K e^{5\sin x - 5(\sin x)^3/3} + \lambda}\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, otteniamo

$$1/2 = y(\pi/2) = \sqrt[5]{K e^{10/3} + \lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad K = (1/32-\lambda)e^{-10/3}\,.$$

Quindi, la soluzione cercata sarà $y(x) = \sqrt[5]{(1/32-\lambda)e^{5\sin x - 5(\sin x)^3/3 - 10/3} + \lambda}$. Per concludere osserviamo che, per $\lambda = 1/32$, si riottiene la soluzione singolare $y(x) \equiv 1/2$.

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che, per $x \to 0^+$, la funzione $x \mapsto [\cosh(x/2)]^{1/x}$ risulta essere un caso di indecisione della forma 1^∞. Riscrivendo tale espressione come $\exp[\log\left[(\cosh(x/2))^{1/x}\right]] = \exp[\frac{1}{x}\log(\cosh(x/2))]$, e ricordando che, per $x \to 0^+$, $\log(1+t) \sim t$, con $t = \cosh(x/2) - 1$, $\cos(x/2) - 1 \sim (x/2)^2/2$, si ottiene

$$\frac{1}{x}\log[\cosh(x/2)] = \frac{1}{x}\log[1 + (\cosh(x/2)-1)] \sim \frac{\cosh(x/2)-1}{x} \sim \frac{x^2/8}{x} = \frac{x}{8} \to 0\,.$$

Pertanto, per il limite proposto si ricava

$$\frac{\sqrt[3]{\sin x - x}}{1-[\cosh(x/2)]^{1/x}} = -\frac{\sqrt[3]{\sin x - x}}{\exp[\frac{1}{x}\log(\cosh(x/2))]-1} \sim -\frac{\sqrt[3]{x - x^3/6 - x}}{\frac{1}{x}\log(\cosh(x/2))} \sim -\frac{-x/\sqrt[3]{6}}{x/8} = \frac{8}{\sqrt[3]{6}}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $x \to 0^+$, $e^t - 1 \sim t$, con $t = \frac{1}{x}\log(\cosh(x/2)) \to 0$, ed abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine, della funzione $x \mapsto \sin x$.

Esercizio 5

i) Per la definizione e il significato geometrico della derivata si veda il libro di testo.

ii) La prima affermazione è errata, basta considerare la funzione $f(x) = |x|$, che è continua ma non derivabile in $x_0 = 0$. La seconda affermazione è corretta e per la dimostrazione si veda il libro di testo.

iii) Tenendo conto che $(\sin x)^7 \sim x^7$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al settimo ordine per le funzioni $x \mapsto \cos x$ e $x \mapsto e^x$, possiamo riscrivere

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + e^x - f(x)}{(\sin x)^7} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{k!} - f(x)}{x^7}\,.$$

Pertanto, otteniamo

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{k!} - f(x) \sim x^7\,,$$

ovvero

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{k!} - x^7 + o(x^7) = 2 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - x^7 + o(x^7)\,.$$

TEMA D

Esercizio 1

Ponendo $z = a + ib$, da cui $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ed osservando che $\mathrm{e}^{-3i\pi/2} = i$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$a^2 - b^2 + 2iab - i2\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} = 16i\,.$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie, si arriva al sistema reale

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0\,, \\ 2ab - 2\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} = 16\,, \end{cases} \implies \begin{cases} a = b\,, \\ 2b^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{2b^2} = 16\,, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a = -b\,, \\ -2b^2 - \sqrt{2}\sqrt{2b^2} = 16\,. \end{cases}$$

La seconda equazione del primo sistema si può riscrivere nella forma $|b|^2 - 2|b| - 8 = 0$, da cui $|b| = -2; 4$, ovvero $b = \pm 4$, poiché $|b| = -2$ è impossibile. La seconda equazione del secondo sistema, invece, si può riscrivere nella forma $|b|^2 + 2|b| + 8 = 0$, che risulta impossibile. Pertanto, sostituendo i valori di b nella prima equazione del primo sistema otteniamo $z_1 = 4 + 4i = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$ e $z_2 = -4 - 4i = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{5i\pi/4}$.

Esercizio 2

La funzione proposta è data dal rapporto di un polinomio non decomponibile al denominatore per una funzione integrale di integranda continua su tutto $\mathbb{R}$, composta con una potenza; pertanto, risulta essere una funzione continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo anche che F è una funzione pari. Ponendo

$$G(x) = \int_1^{x^2} \frac{\pi - \arctan t}{5 + \mathrm{e}^{-|t|}(1 + \sin t)}\, dt\,,$$

si ricava che

$$\lim_{x\to\pm\infty} G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\pi - \arctan t}{5 + \mathrm{e}^{-|t|}(1 + \sin t)}\, dt = +\infty\,,$$

in quanto

$$f(t) := \frac{\pi - \arctan t}{5 + \mathrm{e}^{-|t|}(1 + \sin t)} \sim \frac{\pi - \pi/2}{5} \qquad \text{per } t \to +\infty,$$

e quindi l'integrale improprio risulta essere divergente. Utilizzando il Teorema di de l'Hospital, il Teorema di Torricelli e il Teorema di derivazione della funzione composta, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} F(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{G(x)}{x^2 + 2} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{G'(x)}{2x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{\pi - \arctan x^2}{5 + \mathrm{e}^{-x^2}(1 + \sin x^2)}\, 2x}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pi - \pi/2}{5} = \frac{\pi}{10}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, la retta $y = \frac{\pi}{10}$ è asintoto orizzontale per F a $\pm\infty$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Ponendo $f(x) = (\tan x)^3 (\cos x)^3$ e $g(y) = (y^3 + \lambda)/y^2$, si ricava che $f \in \mathcal{C}^0(-\pi/2, \pi/2)$ e $g \in \mathcal{C}^1\big((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\big)$; quindi, per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, esiste un'unica soluzione locale di classe $\mathcal{C}^1$ del problema proposto. Osserviamo che l'equazione ammette una soluzione singolare data da $y(x) = -\sqrt[3]{\lambda}$; pertanto, per $-\sqrt[3]{\lambda} = -2$, cioè $\lambda = 8$, essa sarà la soluzione del problema di Cauchy. Invece, per $\lambda \neq 0; 8$ e $y \neq -\sqrt[3]{\lambda}$, procediamo con la separazione delle variabili. Si ricava

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \log|y^3 + \lambda| &= \frac{1}{3} \int \frac{3y^2}{y^3 + \lambda}\, dy = \int (\tan x)^3 (\cos x)^3\, dx \\ &= \int (\sin x)^3\, dx = \int [1 - (\cos x)^2] \sin x\, dx = -\cos x + \frac{(\cos x)^3}{3} + C\,, \end{aligned}$$

da cui

$$|y^3(x) + \lambda| = \exp[-3\cos x + (\cos x)^3 + 3C] \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt[3]{K\mathrm{e}^{-3\cos x+(\cos x)^3} - \lambda}\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, otteniamo

$$-2 = y(0) = \sqrt[3]{K\mathrm{e}^{-2} - \lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad K = (\lambda - 8)\mathrm{e}^2\,.$$

Quindi, la soluzione cercata sarà $y(x) = \sqrt[3]{(\lambda-8)\mathrm{e}^{2-3\cos x+(\cos x)^3} - \lambda}$. Per concludere osserviamo che, per $\lambda = 8$, si riottiene la soluzione singolare $y(x) \equiv -2$.

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che, per $x \to 0^+$, la funzione $x \mapsto (\cos x)^{2/x}$ risulta essere un caso di indecisione della forma 1^∞. Riscrivendo tale espressione come $\exp[\log\big((\cos x)^{2/x}\big)] = \exp[\frac{2}{x}\log(\cos x)]$, e ricordando che, per $x \to 0^+$, $\log(1+t) \sim t$, con $t = \cos x - 1$, $\cos x - 1 \sim -x^2/2$, si ottiene

$$\frac{2}{x}\log(\cos x) = \frac{2}{x}\log[1 + (\cos x - 1)] \sim \frac{2(\cos x - 1)}{x} \sim -\frac{2\,x^2/2}{x} = -x \to 0\,.$$

Pertanto, per il limite proposto si ricava

$$\frac{(\cos x)^{2/x} - 1}{\sinh(\sqrt[3]{x}) - x^{1/3}} = \frac{\exp[\frac{2}{x}\log(\cos x)] - 1}{\sinh(\sqrt[3]{x}) - x^{1/3}} \sim \frac{\frac{2}{x}\log(\cos x)}{x^{1/3} + x/6 - x^{1/3}} \sim -\frac{x}{x/6} = -6\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $x \to 0^+$, $\mathrm{e}^t - 1 \sim t$, con $t = \frac{2}{x}\log(\cos x) \to 0$, ed abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine, della funzione $t \mapsto \sinh t$, con $t = \sqrt[3]{x}$.

Esercizio 5

i) Per la definizione e il significato geometrico della derivata si veda il libro di testo.

ii) La prima affermazione è errata, basta considerare la funzione $f(x) = |x|$, che è continua ma non derivabile in $x_0 = 0$. La seconda affermazione è corretta e per la dimostrazione si veda il libro di testo.

iii) Tenendo conto che $\log(1 + x^7) \sim x^7$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al settimo ordine per le funzioni $x \mapsto \sin x$ e $x \mapsto \mathrm{e}^x$, possiamo riscrivere

$$5 = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - \sin x - \mathrm{e}^x}{\log(1+x^7)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{k!}}{x^7}\,.$$

Pertanto, otteniamo

$$f(x) - \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{k!} \sim 5x^7\,,$$

ovvero

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{k!} + 5x^7 + o(x^7) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{2x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + 5x^7 + o(x^7)\,.$$