① Studiare il carattere della serie: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{[\sin(e^{-n})]^{\alpha}}{\log(n^2)+2\log n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

② Calcolare la primitiva della funzione: $f(x)=(3x+1)^2 \sin x$ che in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ vale 9π

Soluz: $\varphi(x) = -(3x+1)^2\cos x + 6(3x+1)\operatorname{sen} x + 18\cos x - 6$

③ Determinare $z \in \mathbb{C}$ tale che soddisfino l'equazione: $z^4 + \frac{1}{\bar{z}} = 0$

Soluz: $z_0 = e^{i\pi/3} = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ $\quad z_1 = e^{i\pi} = -1$ $\quad z_2 = e^{i5\pi/3} = \frac{1}{2} - i\sqrt{3}/2$

④ Teoria: supponiamo di avere $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ con queste proprietà: $a_n \to +\infty$ $\quad \{b_n\}$ limitata $\quad c_n = \theta\left(\frac{1}{n}\right)$

Stabilire, giustificando la risp., se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n c_n}{a_n}$ converge (e, in caso contrario, fornire un controesempio).

Esame Febbraio:

⑤ Determinare al variare di $\alpha = 0$ il carattere della serie:

$$\sum \frac{3^n}{(n+2)^{6\alpha-1}(2\alpha)^n}$$

⑥ Determinare le soluzioni complesse dell'equazione: $\left|e^{\frac{3z}{z-1}}\right| = e^4$ e rappresentarle nel piano complesso.

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 ;\ z \neq 1 \right\}$$

⑦ $$\begin{cases} y'(x) - \dfrac{e^{2\operatorname{arctg}(2x)+1}}{2+8x^2} e^{-y(x)} = 0 \\ y(0) = 1 - \log 8 \end{cases}$$

Soluz: $y(x) = \log\left(\frac{e^{2\operatorname{arctg}(2x)+1}}{8}\right)$

⑧ Determinare il campo di esistenza D della funzione

$$f(x) = \arcsin\left|\frac{1}{e^{2x} - 2e^x}\right|$$

$$CE = [\log(1+\sqrt{2}), +\infty) \cup \{0\}$$

⑨ Teoria: Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(0) = 0$, verificare se:

a) f è continua in $x = 0$ (NO) controes: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

b) se $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Rightarrow$ allora f è continua in $x = 0$ (sì)

c) $f'(0) = 0$ (NO) non continua => non derivabile

d) f non è derivabile in $x_0 = 0$ (NO) controes: $y = x^2$

⑩ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1 + \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{1 - \cos\frac{1}{n}}$$

(11) Stabilire se converge: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(3x)-3x}{(e^x-1)^{\alpha^2}}\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(12) Eq. differenziale: determinare le eventuali soluzioni periodiche.

$y'' - 2y' + 5y = 17\sin(2x)$

Soluz: $y(x) = \sin(2x) + 4\cos(2x)$

(13) Data la funzione $f(x) = 1 - \dfrac{4x}{x^2+3}$ studiare eventuali estremanti relativi e assoluti di $g(x) = |f(x)|$

Soluz: $x = -\sqrt{3}$ p.to max ass. $\quad x = 1$ p.to min. ass.
$x = \sqrt{3}$ p.to max rel. $\quad x = 3$ p.to min. ass.

(14) $f \in C^2(\mathbb{R})$ $\quad x \to 0 \quad f(x) = x^2 + o(x^2)$
Dimostrare che $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} 5 f(t^2)\,dt$ è infinitesimo di ordine 5 per $x \to 0$.

(15) $0 < a_n \sim n^2$ $\quad 0 < b_n \sim \dfrac{1}{n}$ $\quad$ Stabilire quali affermazioni sono corrette (e fornire 1 controesempio per quelle false):

a) $\sum \log\left(1 + \dfrac{b_n}{a_n}\right)$ converge (sì)

b) $\sum \dfrac{1}{1 + a_n b_n}$ converge (NO) controes: $a_n = n^2 \quad b_n = \dfrac{1}{n}$

c) $\sum \dfrac{a_n b_n}{1 + a_n b_n}$ diverge (sì)

d) $\sum \dfrac{a_n b_n^2}{1 + a_n^2 b_n}$ diverge (NO) controes: $a_n = n^2 \quad b_n = \dfrac{1}{n}$