Tutoraggio di Analisi Matematica - Ingegneria Energetica
Foglio 5 - Taylor, studio di funzione

Esercizio 1

Utilizzando gli sviluppi di Taylor calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - xe^x + x^2\cos x}{x^3} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^x \cos x) - \sin(\sin x)}{(e^x - 4^x)^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin^2 x + \log(1 - \sin^2 x)}{\cos x^2 - 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\sin^2 x - \log(\cos x)]\log(1+\sin x)}{x \sin x \sin 2x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\left[\left(\log \frac{x - \arctan x}{x^2}\right)\frac{1}{\log x}\right]} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{\sin x + \cos x}}$$

Esercizio 2

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$, calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{x}{2}} - \cosh\sqrt{x}}{(x + \sqrt[5]{x})^\alpha}$$

Esercizio 3

Determinare, utilizzando gli sviluppi di Taylor, la parte principale dei seguenti infinitesimi

$$f(x) = e^{-x\cos x} + \sin x - \cos x, \qquad x \to 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2(x-2) - \log(x-1)} - \frac{1}{2}, \qquad x \to 2$$

$$f(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}x^2}{\cos x} - \sqrt{1 + 2x^2}, \qquad x \to 0$$

$$f(x) = \sin\left(\arctan x + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}, \qquad x \to -\infty$$

Esercizio 4
Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale delle seguenti funzioni al variare dei parametri

$$f(x) = \frac{(\cosh 2x - \cos x)x^4}{\log(1+3x) - 3\sin x - \alpha x^2}, \qquad x \to 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{\alpha x} - 1 + 2x - 2x^2 - \sin(\beta x), \qquad x \to 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Esercizio 5
Determinare il segno della funzione

$$y = \sinh(\ln(1+4x) - \sinh 4x + 8x^2)$$

in un intorno destro e sinistro di $x_0 = 0$.

Esercizio 6
Data

$$f(x) = (x-1)e^{x^2} + \arctan(\log x) + 2$$

dimostrare che f è invertibile nel suo dominio e determinarne l'immagine.

Esercizio 7
Sia

$$f(x) = x \log^2 x$$

a. Calcolare $f'(x)$ e dedurre che nell'intervallo $(1, +\infty)$ la funzione f è monotona e quindi invertibile (non si chiede di scrivere la funzione inversa).
b. Detta g la funzione inversa di f nell'intervallo detto, calcolare $g'(4e^2)$.

Esercizio 8
Della funzione

$$f(x) = \arctan \sqrt[3]{x^2 - 2|x| + 1}$$

determinare i punti di massimo e minimo, relativi ed assoluti, nell'intervallo $[-2, 2]$.

Esercizio 9
Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x+1}$$

a. determinare dominio, limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;
b. studiarne gli intervalli di monotonia ed individuarne i punti di massimo e minimo, specificando se sono relativi o assoluti;
c. tracciarne un grafico qualitativo;

d. posto
$$g(x) = \begin{cases} f(x+\sqrt{3}) & \text{se}\, x \geq 0 \\ f(x-\sqrt{3}) & \text{se}\, x < 0 \end{cases}$$
sfruttare i risultati già trovati per disegnare un grafico qualitativo di g e per studiarne la continuità e derivabilità nell'origine.

Esercizio 10
Si consideri la funzione
$$f(x) = \sqrt{|x^2-4|} - x$$
a. determinare dominio, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti;
b. determinare il segno di f;
c. determinare gli intervalli di monotonia ed elencare tutti i punti di estremo di f;
d. determinare eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità di f;
e. tracciare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 11
Studiare le seguenti funzioni, senza determinare la derivata seconda, e tracciarne il grafico qualitativo
a. $y = e^{-x}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$

b. $y = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{x-1}$

c. $y = \sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x^2+3x-4}$