

Tutoraggio di Analisi Matematica - Ingegneria Energetica
Foglio 4

Esercizio 1

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

1. $y = e^{\frac{x+1}{x-2}}$

2. $y = \log\left(\frac{x^2+1}{2x+3}\right)$

3. $y = (\sin x)^{\cos x}$

4. $y = \sqrt{\arctan(1+x^2)}$

5. $y = \log\left|1 - e^{-2x}\right| + \frac{1}{e^{-2x}+1}$

6. $y = \begin{cases} e^x - 2x \sin x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\log(1+2x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

7. $y = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} - \pi x + e & \text{se } x \neq 0 \\ e & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Esercizio 2

Determinare per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono derivabili su tutto il loro dominio le seguenti funzioni

a. $f(x) \begin{cases} \arctan \frac{1}{x-2} + \arctan(x-2) + \alpha x & \text{se } x < 2 \\ \beta x^2 - \pi & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

b. $f(x) \begin{cases} x^\alpha \log x + 7x + 5 & \text{se } x > 0 \\ \beta e^x - 2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

c. $f(x) \begin{cases} \frac{\sqrt{x}(x^2+\alpha x+\beta)}{x+2} & \text{se } x \geq 0 \\ x \cos(\alpha x) + 2\beta \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Esercizio 3

Data

$$f(x) = (x - 1)e^{x^2} + \arctan(\log x) + 2$$

dimostrare che f è invertibile nel suo dominio e determinarne l'immagine.**Esercizio 4**

Sia

$$f(x) = x \log^2 x$$

- Calcolare $f'(x)$ e dedurre che nell'intervallo $(1, +\infty)$ la funzione f è monotona e quindi invertibile (non si chiede di scrivere la funzione inversa).
- Detta g la funzione inversa di f nell'intervallo detto, calcolare $g'(4e^2)$.

Esercizio 5

Delle seguenti funzioni determinare l'insieme di definizione e quello di derivabilità, calcolare la derivata dove esiste e studiare gli eventuali punti di non derivabilità (classificandoli)

$$1. \quad y = \sqrt[3]{|\log x|} + \left| \log \left(x + \frac{1}{2} \right) \right|$$

$$2. \quad y = \left(e^{\sqrt[3]{x}} - 1 \right)^2 + (x - 1)|x - 1|$$

$$3. \quad y = \arcsin |x + 1|$$

$$4. \quad y = x \sqrt[3]{\log^2 |x|}$$

Esercizio 6

Della funzione

$$f(x) = \arctan \sqrt[3]{x^2 - 2|x| + 1}$$

determinare i punti di massimo e minimo, relativi ed assoluti, nell'intervallo $[-2, 2]$.**Esercizio 7**

Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x + 1}$$

- determinare dominio, limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;
- studiarne gli intervalli di monotonia ed individuarne i punti di massimo e minimo, specificando se sono relativi o assoluti;
- tracciarne un grafico qualitativo;

d. posto

$$g(x) = \begin{cases} f(x + \sqrt{3}) & \text{se } x \geq 0 \\ f(x - \sqrt{3}) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sfruttare i risultati già trovati per disegnare un grafico qualitativo di g e per studiarne la continuità e derivabilità nell'origine.

Esercizio 8

Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 4|} - x$$

- determinare dominio, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti;
- determinare il segno di f ;
- determinare gli intervalli di monotonia ed elencare tutti i punti di estremo di f ;
- determinare eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità di f ;
- tracciare un grafico qualitativo di f .

Esercizio 9

Studiare le seguenti funzioni, senza determinare la derivata seconda, e tracciarne il grafico qualitativo

a. $y = e^{-x} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$

b. $y = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{x-1}$

c. $y = \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2 + 3x - 4}$