

Tutoraggio Ingegneria Meccanica e Ingegneria energetica

Quinto foglio di esercizi

(1) Utilizzando la regola di de l'Hôpital calcolare i seguenti limiti

$$\begin{array}{ll}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\log \cos x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \sin x}{\log x} \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right) & \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \tan \left(\frac{\pi}{2} x \right) \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} \right) & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin \sqrt{x^2 - 1}}{\log(x + 3\sqrt{x^2 - 1})} \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctan x)^{\tan x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\log x}{x} \right)^x.
 \end{array}$$

(2) Utilizzando gli sviluppi di Taylor calcolare i seguenti limiti

$$\begin{array}{ll}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x - x^2}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x - x^2}{x^4} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \sqrt{1 + x^2}}{\sin x^4} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin^2 \sqrt{x} - \sin^2 x}{x^2} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.
 \end{array}$$

(3) Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\begin{array}{ll}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{1 - \cos \frac{1}{n}} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} & \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} 2n^3 \left[1 - \cos \frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right) \right] & \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right).
 \end{array}$$

(4) Determinare lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 4 di

$$f(x) = 3 + \log(1 - 9x^2) - 3\sqrt{1 - 6x^2}.$$

- (5) Determinare lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di

$$f(x) = (4 - 3x^2) \sin(3x) - 2x^2 e^{2x} - 12x + 2x^2.$$

- (6) Determinare dominio, asintoti, intervalli di monotonia, massimi e minimi, e disegnare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} \quad f_2(x) = \frac{\log x}{x} \quad f_3(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

- (7) Sia $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}$.

- Disegnare un grafico di f mettendone in evidenza gli zeri, i punti critici, gli intervalli di monotonia e convessità.
- Verificare che f ha un unico punto di flesso e determinare il più grande intervallo contenente questo punto sul quale f risulta invertibile.
- Si calcoli la derivata prima di tale funzione inversa nel punto di flesso.

- (8) Sia $f(x) = \log x - \arctan(x - 1)$.

- Determinare il dominio di f , i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.
- Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremi di f .
- Tracciare un grafico qualitativo di f .

- (9) Sia $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$.

- Determinare il dominio di f , i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.
- Determinare gli intervalli di monotonia, i punti di non derivabilità e gli eventuali estremi di f .
- Tracciare un grafico qualitativo di f .

- (10) Sia $f(x) = \frac{x^2}{1-3x-x|x|}$.

- Determinare il dominio di f , i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.
- Determinare gli intervalli di monotonia, i punti di non derivabilità e gli eventuali estremi di f .
- Tracciare un grafico qualitativo di f .