

Probabilità e Statistica

DOCENTE: Mirko D'Ovidio

ESAME SCRITTO: 17-01-2023

NOME E COGNOME : _____ MATRICOLA : _____

Esercizio A In una scatola ci sono 11 palline (5 rosse e 6 bianche). Le palline bianche, una volta estratte, cambiano colore in maniera indipendente tra di loro con probabilità $p \in (0, 1)$ e diventano rosse. Estraggo $n = 2$ palline in blocco dalla scatola. Quante palline bianche posso avere? Inoltre, calcolare la probabilità degli eventi: $E =$ "ho solo palline bianche"; $F =$ "ho solo palline rosse".

Svolgimento (traccia) Posso avere un numero di palline bianche pari a 0, 1, 2 visto che estraggo $n = 2$ palline. Inoltre,

$$P(E) = P(\text{dopo aver estratto 2 palline bianche, dopo nessun cambio di colore, ho 2 palline bianche})$$

$$P(F) = P(\text{dopo aver estratto, dopo gli eventuali cambi di colore, ho 2 palline rosse})$$

Posso considerare tutti gli eventi possibili (ho 0, 1, 2 palline bianche):

$$P(\text{Estraggo } k \text{ bianche}) = \frac{\binom{5}{2-k} \binom{6}{k}}{\binom{11}{2}}, \quad k = 0, 1, 2$$

quindi

$$P(\text{Ho 2 bianche}) = P(\text{Estraggo 2 bianche, nessun cambio di colore}) = P(\text{Estraggo 2 bianche})(1-p)^2$$

$$\begin{aligned} P(\text{Ho 1 bianca}) &= P(\text{Estraggo 1 bianca, nessun cambio di colore}) + P(\text{Estraggo 2 bianche, un cambio di colore}) \\ &= P(\text{Estraggo 1 bianca})(1-p) + P(\text{Estraggo 2 bianche})p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Ho 0 bianche}) &= P(\text{Estraggo 0 bianche}) \\ &\quad + P(\text{Estraggo 1 bianca, un cambio di colore}) \\ &\quad + P(\text{Estraggo 2 bianche, due cambi di colore}) \\ &= P(\text{Estraggo 0 bianche}) \\ &\quad + P(\text{Estraggo 1 bianca})p \\ &\quad + P(\text{Estraggo 2 bianche})p^2 \end{aligned}$$

Ottengo

$$P(E) = \frac{\binom{5}{0} \binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} (1-p)^2$$

$$P(F) = \frac{\binom{5}{2} \binom{6}{0}}{\binom{11}{2}} + \frac{\binom{5}{1} \binom{6}{1}}{\binom{11}{2}} p + \frac{\binom{5}{0} \binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} p^2$$

Esercizio B Sia $X \sim Unif(-1, 1)$. Calcolare la densità della trasformazione $Y = |X| + 1$.

Svolgimento (traccia) Calcolo

$$P(Y \leq y) = P(|X| \leq y - 1) = \frac{1}{2} \int_{1-y}^{y-1} dx = y - 1, \quad y \in (1, 2)$$

Quindi (dopo aver scritto $F_Y(y)$ per $y \in \mathbb{R}$ e verificato la continuità), calcoliamo $f_Y = F'_Y$

Domande di teoria :

Sia $\mathcal{P} \sim Pois(\lambda)$, $\lambda > 0$, la popolazione oggetto di studio. Determinare lo stimatore di MV per il parametro λ e la stima di λ dato il campione osservato $x = (1, 3, 2, 3, 2, 4, 1)$. Dire se lo stimatore è corretto. Dire se lo stimatore è consistente.

Svolgimento (traccia) $\hat{\lambda}_{MV} = \bar{x}$; calcolo \bar{x} dal campione osservato; considero la v.a. stimatore $\bar{X} = n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k$ dove $X_k \sim Pois(\lambda)$ e traggio le conclusioni su correttezza (Si!) e consistenza (Si!)