Calcolo delle Probabilità (A-L) – Parte A

DOCENTE: Francesco Iafrate SCRITTO: 17 gennaio 2023

NOME E COGNOME :______________________________ MATRICOLA :______________________

Esercizio A. Si vuole completare una raccolta di 10 figurine. Il collezionista ne ha raccolte già $f, 1 \leq f \leq 9$. Ogni bustina di figurine ne contiene 5, non necessariamente distinte (con ripetizione).

1. Qual è la probabilità che il prossimo pacchetto di figurine acquistato dal collezionista ne contenga *almeno una* che non possiede?
2. Supponiamo che $f = 9$ (al collezionista manca solo una figurina). Sia Y la v.a. che conta il numero di ulteriori pacchetti da acquistare per completare la collezione. Qual è la probabilità che sia necessario acquistare più di 10 pacchetti per completare la collezione?
3. Ogni pacchetto di figurine costa 5 euro. Al collezionista manca solo una figurina (come sopra). Quanto ci si aspetta che si dovrà ancora spendere per completare la collezione?

Svolgimento (traccia):
1. Sia E l'evento di interesse. Allora E^c ="tutte le figurine del pacchetto sono già possedute", quindi sono estratte tra le f già trovate. Trattandosi di uno schema *con reimmissione* si ha

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \left(\frac{f}{10}\right)^5$$

2. La v.a. Y rappresenta l'attesa del primo successo in uno schema di prove ripetute quindi segue una distribuzione Geometrica. La probabilità di successo corrisponde alla probabilità di acquistare un pacchetto che contenga l'ultima figurina mancante, calcolata al punto precedente con $f = 9$. Perciò $Y \sim Geom(p = 1 - (9/10)^5)$ e la probabilità richiesta è

$$P(Y > 10) = (1 - p)^{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^{50}$$

Oss. Si poteva giungere a questo risultato equivalentemente pensando che nei primi 10 pacchetti (50 figurine totali) tutte devono essere scelte tra le 9 già possedute.

3. Il numero atteso di pacchetti da acquistare è

$$\mathbb{E}Y = \frac{1}{p} = \frac{1}{1 - (9/10)^5}$$

di conseguenza il costo atteso da sostenere è $5 \cdot \mathbb{E}Y \approx 12.21$ euro.

Domanda Teorica A.

1. Fornire un'interpretazione probabilistica della seguente quantità

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

   e dedurne il valore di S (senza fare calcoli).

2. *Bonus*: calcolare esplicitamente il valore di S giustificando i passaggi. (N.B. eventuali punti bonus verranno assegnati solo se la richiesta precedente viene svolta correttamente.)

Svolgimento (traccia):
Si tratta del valore atteso di una v.a. geometrica di parametro 1/2. Nello specifico sia $Y \sim Geom(p = 1/2)$, allora

$$\mathbb{E}Y = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Dai risultati noti sulla distribuzione Geometrica si ha $S = \mathbb{E}Y = 1/p = 2$.

2. Per i dettagli del calcolo del valore atteso di una v.a. Geometrica si consulti il materiale didattico.

Calcolo delle Probabilità (A-L) – Parte B

DOCENTE: Mirko D'Ovidio SCRITTO: 17 gennaio 2023

NOME E COGNOME :______________________________ MATRICOLA :______________________

Esercizio B.

1. Calcolare la funzione di ripartizione di $W = \sqrt{1+|V|}$ dove $V \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$.
2. Dire se W e V definite sopra sono indipendenti ed identicamente distribuite.

Svolgimento (traccia):
1.

$$\mathbf{P}(W \leq w) = \mathbf{P}(|V| \leq w^2 - 1) = \mathbf{P}(V \leq w^2 - 1) = \int_0^{w^2-1} f_V(v)dv, \quad w \geq 1$$

da cui

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w \leq 1 \\ 1 - e^{-\lambda(w^2-1)}, & w > 1 \end{cases}$$

dopo aver verificato la continuità.
2.

$$f_W(w) = \frac{d}{dw} F_W(w)$$

è diversa da f_V e quindi W e V non possiedono la stessa densità. Inoltre, $W = g(V)$, cioè W non è indipendente da V .

Domanda Teorica B. Sia $X_k \sim Geo(1/2)$ con $k \in \mathbb{N}$ una successione di v.a. indipendenti. Discutere la convergenza della v.a. $Z_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n Y_k$ per $n \to \infty$ dove $Y_k = 1 + \sqrt{X_k}$, $k \in \mathbb{N}$.
Svolgimento (traccia):
Si deve considerare la legge debole dei grandi numeri e discutere le ipotesi (necessarie) legate alla successione Y_k. In definitiva, si ottiene $Z_n \to Z \sim Deg(a)$ dove

$$\mathbf{E}[1 + \sqrt{X_k}] = 1 + \sum_{k \geq 1} \sqrt{k}(1 - \frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^k} = 1 + c = a$$