APPUNTI DI FISICA MATEMATICA   A.A. 2015/16

PARTE PRIMA: SISTEMI MECCANICI

I Introduzione e richiami di cinematica

In questa prima parte del corso si applicano metodi matematici rigorosi nell'ambito di modelli che descrivono fenomeni di movimento basandosi sulle leggi fondamentali della Meccanica Classica (leggi di Newton).

Lo scopo che ci si prefigge sviluppando le teorie matematiche nello studio di tali modelli e' duplice: da una parte l'utilizzazione di definizioni esatte e di proposizioni matematiche permette una comprensione piu' profonda dei fenomeni naturali studiati, dall'altra, l'uso dei metodi matematici permette di portare a termine lo schema predittivo della meccanica e cioe': date le cause del moto (forze) e lo stato iniziale del sistema meccanico (posizione e velocita'), prevederne l'evoluzione futura.
Costruiamo il modello piu' semplice che si utilizza nello studio di fenomeni di movimento che e' il **modello di punto materiale** cioe' uno schema limite in cui un corpo viene assimilato ad un punto geometrico a cui e' associato uno scalare positivo m detto massa del punto.
Abbiamo bisogno di definire il tempo e lo spazio in cui il punto si muove.

1. Tempo: continuo unidimensionale omogeneo, $t \in R$. Le trasformazioni ammesse sono del tipo $t' = at + b$ con a, b costanti (cambiamento di unita' di misura e dell'origine dei tempi).

2. Spazio: continuo tridimensionale dotato di una struttura matematica che e' quella di spazio vettoriale euclideo.
Ad ogni coppia di punti P, Q e' associato il vettore $\underline{x} = PQ$ tale che:
e' definita la somma di due vettori $\underline{x} + \underline{y}$ che gode delle seguenti proprieta':
$\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$, $\underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z}$, esiste l'elemento neutro $\underline{0}$: $\underline{x} + \underline{0} = \underline{x}$ ed esiste l'opposto $-\underline{x}$ tale che $\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0}$.
Inoltre comunque siano dati $a, b \in R$ e' definito nello spazio il vettore $a\underline{x}$ tale che $a(b\underline{x}) = (ab)\underline{x}$, $1\underline{x} = \underline{x}$
$(a + b)\underline{x} = a\underline{x} + b\underline{x}$, $a(\underline{x} + \underline{y}) = a\underline{x} + a\underline{y}$.

R^3, l'insieme delle terne ordinate (x_1, x_2, x_3) di numeri reali e' uno spazio vettoriale: si definisce la somma di due vettori come $\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in R^3$ e la moltiplicazione di un vettore per uno scalare come $a\underline{x} = (ax_1, ax_2, ax_3) \in R^3$

Nello spazio vogliamo poter misurare la distanza tra due punti e quindi definire una **norma** (lunghezza di un vettore).
Per fare cio' definiamo il **prodotto scalare** tra due vettori: $\underline{x} \cdot \underline{y} : R^3 \times R^3 \to R$ e' un numero reale tale che
$\underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{y} \cdot \underline{x}$, $(\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{z} = \underline{x} \cdot \underline{z} + \underline{y} \cdot \underline{z}$, $a\underline{x} \cdot \underline{y} = a(\underline{x} \cdot \underline{y}) = \underline{x} \cdot a\underline{y}$, $\underline{x} \cdot \underline{x} \geq 0$, $= 0 \iff \underline{x} = 0$, $\forall\ \underline{x},\ \underline{y},\ \underline{z} \in R^3,\ a \in R$.

Uno spazio vettoriale dotato del prodotto scalare sopra definito si chiama spazio vettoriale euclideo.

L'introduzione del prodotto scalare permette di calcolare la **norma** (lunghezza del vettore $\underline{x}$) data da

$$||\underline{x}|| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}}, \qquad ||\underline{x}|| : R^3 \to R^+$$

e l'angolo θ tra due vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$

$$cos\theta = \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{||\underline{x}||||\underline{y}||}$$

ben definito (cioe' $|cos\theta| \leq 1$) per la disuguaglianza di Cauchy Bouniakowsky $(|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq ||\underline{x}|| \; ||\underline{y}||)$.
Se $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$ ne segue $\theta = \pi/2$ cioe' $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono ortogonali.

Esercizio: verificare che la norma euclidea $||\underline{x}|| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}}$ soddisfa le proprieta' seguenti:

$$||\underline{x}|| \geq 0, \quad = 0 \iff \underline{x} = 0, \quad ||a\underline{x}|| = |a| \; ||\underline{x}||, \; a \in R, \quad ||\underline{x} + \underline{y}|| \leq ||\underline{x}|| + ||\underline{y}||, \quad \underline{x}, \; \underline{y} \in R^3$$

Comunque dati tre vettori fra loro ortogonali in R^3, essi sono anche linearmente indipendenti cioe' formano una base: indichiamo i versori di tale base con $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ $(\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{i} = 0, \quad \underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1)$.
Consideriamo nello spazio vettoriale euclideo R^3 un riferimento cartesiano ortogonale costituito da un origine O e una base $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$. Ne segue che il vettore $OP = \underline{x}$ si puo' scrivere nella forma

$$\underline{x} = x_1\underline{i} + x_2\underline{j} + x_3\underline{k}$$

dove $x_1, x_2, x_3 \in R$ sono le componenti del vettore $\underline{x}$ rispetto al riferimento $(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$
$(\; x_1 = \underline{x} \cdot \underline{i}, \; x_2 = \underline{x} \cdot \underline{j}, \; x_3 = \underline{x} \cdot \underline{k})$.
Ne segue che

$$||\underline{x}|| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

e

$$d(\underline{x}, \; \underline{y}) = ||PQ|| = ||\underline{x} - \underline{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)}$$

e' la distanza euclidea tra due punti $P(x_1, x_2, x_3)$ e $Q(y_1, y_2, y_3)$.

Ricordiamo un'altra operazione algebrica tra vettori che e' il **prodotto vettoriale**. Dati due vettori $\underline{x}, \underline{y} \in R^3$, si definisce prodotto vettoriale $\underline{x} \wedge \underline{y}$: $R^3 \times R^3 \to R^3$ l'operazione che a $\underline{x}$ e $\underline{y}$ associa un vettore $\underline{z}$ ottenuto come segue:
data la matrice i cui elementi sono i versori di R^3 e le componenti di $\underline{x}$ e $\underline{y}$,

$$\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix},$$

$$\underline{z} = \underline{x} \wedge \underline{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\underline{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\underline{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\underline{k}$$

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprieta':

$\underline{x} \wedge \underline{x} = \underline{0}$, $\underline{x} \wedge \underline{y} = -\underline{y} \wedge \underline{x}$, $(\underline{x} \wedge \underline{y}) \cdot \underline{y} = 0$ e $(\underline{x} \wedge \underline{y}) \cdot \underline{x} = 0$, cioe' il vettore $\underline{x} \wedge \underline{y}$ e' perpendicolare sia a $\underline{x}$ che a $\underline{y}$. Inoltre $\underline{x} \wedge (\underline{y} + \underline{z}) = \underline{x} \wedge \underline{y} + x \wedge \underline{z}$.

Esercizio: dimostrare le precedenti proprieta' a partire dalla definizione di prodotto vettoriale.

Capitera' di usare questa operazione nella definizione di varie quantita' meccaniche come il momento di una forza o il momento della quantita' di moto.

3. Nel caso dello spazio il cambiamento di coordinate e' piu' generale di quello temporale. Consideriamo due terne cartesiane ortogonali $T(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ e $T'(O', \underline{i}', \underline{j}', \underline{k}')$.
Siano x_1, x_2, x_3 le componenti del vettore OP (che indicheremo con il vettore colonna X) rispetto a T e x_1', x_2', x_3' le componenti del vettore $O'P$ (che indicheremo con X') rispetto a T'. Siano y_1, y_2, y_3 le componenti del vettore OO' rispetto a T. Si ha

$$X = AX' + Y \tag{1}$$

A e' una matrice 3×3 i cui elementi sono i coseni direttori degli assi $(\underline{i}', \underline{j}', \underline{k}')$ rispetto agli assi $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ e Y e' il vettore colonna i cui elementi sono y_1, y_2, y_3. La trasformazione di coordinate (1) e' una trasformazione ortogonale: la condizione di ortogonalita' si esprime con la relazione $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$.

Esercizio: dimostrare la (1) proiettando $OP = OO' + O'P = y_1\underline{i} + y_2\underline{j} + y_3\underline{k} + x'_1\underline{i}' + x'_2\underline{j}' + x'_3\underline{k}'$ sui tre assi di versori $(\underline{i},\underline{j},\underline{k})$. Scrivere la matrice A e dimostrare che l'ortogonalita' della trasformazione implica le sei relazioni tra i nove coefficienti $a_{i,j}$ della matrice: $\Sigma_i a_{i,j}a_{i,k} = \delta_{j,k}$. Dimostrare inoltre che nel caso di una trasformazione ortogonale nel piano le precedenti relazioni si riducono a tre.

Esercizio: date le due terne cartesiane ortogonali $T(O,\underline{i},\underline{j},\underline{k})$ e $T'(O,\underline{i}',\underline{j}',\underline{k}')$, dove

$$\underline{i}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j}, \quad \underline{j}' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j}, \quad \underline{k}' = \underline{k}$$

calcolare le componenti dei vettori $\underline{u} = \underline{i} + \underline{j}, \quad \underline{v} = 2\underline{k}$ rispetto alla terna T' e scrivere la matrice A della trasformazione di coordinate. Verificare la condizione di ortogonalita'.

4. Definiamo linea del moto o **traiettoria** la funzione vettoriale di classe C^2 $\quad \underline{x}(t) : R \to R^3$ che ad ogni t associa $\underline{x}(t) \in R^3$ e **orbita** la curva luogo di punti occupati dal punto mobile in R^3. Ad esempio $x = rcos\omega t,\ y = rsen\omega t,\ z = 0$ sono le equazioni cartesiane della traiettoria (elica cilindrica) percorsa dal punto in R $\times R^2$, mentre l'orbita e' la circonferenza

$$x^2 + y^2 = r^2$$

del piano.

5. Si definisce velocita' del punto il vettore $\underline{v} = \frac{d}{dt}\underline{x}(t)$ e accelerazione $\underline{a} = \frac{d^2}{dt^2}\underline{x}(t)$. La derivata di una funzione vettoriale si definisce in un modo simile a quella di derivata di una funzione scalare

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \underline{x}}{\Delta t}, \quad \Delta\underline{x} = \Delta\underline{x}(t+\Delta t) - \underline{x}(t), \qquad \frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt}\underline{i} + \frac{dx_2(t)}{dt}\underline{j} + \frac{dx_3(t)}{dt}\underline{k}$$

Osservazioni:
$$\frac{d}{dt}(\underline{x}(t)+\underline{y}(t)) = \frac{d}{dt}\underline{x}(t)+\frac{d}{dt}\underline{y}(t), \quad \frac{d}{dt}(f(t)\underline{x}(t)) = \frac{df}{dt}\underline{x}(t)+f(t)\frac{d}{dt}\underline{x}(t), \quad \frac{d}{dt}(\underline{x}(t)\cdot\underline{y}(t)) = \frac{d\underline{x}}{dt}\cdot\underline{y}(t)+\underline{x}(t)\cdot\frac{d\underline{y}}{dt}$$

Per costruire il modello di punto materiale dovremo dare il concetto di forza e i postulati che sono alla base della meccanica classica (**leggi di Newton**), (vedi libro di testo).

Prima di affrontare il problema di "predire il moto", abbiamo bisogno di strumenti matematici per descriverlo (**cinematica**).

Richiami di cinematica del punto: proprieta' differenziali di una curva, moti piani, moti centrali, moti circolari, moti armonici. (Vedi libro di testo pag. 13-17, 52-55)

Esercizio 1: data la curva di equazioni parametriche (spirale di Archimede)

$$x = \lambda cos\lambda, \quad y = \lambda sen\lambda, \quad z = 0, \quad \lambda \in [0,\infty)$$

determinare il versore tangente, il raggio di curvatura e il versore della normale principale.

Hint: per risolvere l'esercizio senza tanti conti definire il vettore $\mathbf{h}(\lambda) = (cos\lambda, sen\lambda)$. Ne segue che $\mathbf{h}'(\lambda) = (-sen\lambda, cos\lambda)$ e $\mathbf{h}''(\lambda) = (-cos\lambda, -sen\lambda) = -\mathbf{h}(\lambda)$ e notare che $\quad \mathbf{h}(\lambda)\cdot\mathbf{h}'(\lambda) = 0, \quad ||\mathbf{h}(\lambda)|| = ||\mathbf{h}'(\lambda)|| = 1$. Ne segue che il versore tangente ha componenti

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(\mathbf{h} + \lambda\mathbf{h}'), ...$$

Esercizio 2: data la curva di equazioni parametriche (spirale logaritmica)

$$x = Re^{-\lambda} cos\lambda, \quad y = Re^{-\lambda} sen\lambda, \quad z = 0, \quad \lambda \in [0, \infty)$$

determinare il versore tangente, il raggio di curvatura e il versore della normale principale.

Esercizio 3: Data la curva di equazioni parametriche (parabola)

$$x = \lambda, \quad y = \lambda^2, \quad z = 0, \quad \lambda \in (-\infty, \infty)$$

determinare il versore tangente, il raggio di curvatura e il versore della normale principale. Verificare che il raggio di curvatura e' minimo in corrispondenza di $\lambda = 0$, (vertice della parabola).

Esercizio 4: un punto P si muove con accelerazione $\underline{a} = -\omega^2 R\, \underline{u}$, essendo $\underline{u} = versOP$ il versore radiale e R costante positiva.
Determinare l'orbita e la traiettoria sapendo che le condizioni iniziali sono $x(0) = x_0,\ y(0) = z(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0,\ \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$

Esercizio 5: un punto P si muove nel piano (O, x, y) ed il suo moto e' rappresentato dalle equazioni cartesiane

$$x = ae^{-kt}, \quad y = ae^{kt}, \quad a, k > 0$$

Determinare l'orbita, calcolare la norma del vettore velocita' e accelerazione, dire se il moto e' centrale rispetto ad O e calcolare la velocita' areolare, calcolare in funzione del tempo le componenti tangenziale e normale della accelerazione e il raggio di curvatura (si supponga $a = 1$).

Esercizio 6: un punto si muove con accelerazione radiale $\underline{a} = k\sqrt{\rho}\ \rho\ \underline{u}$ con k costante positiva e condizioni iniziali $\underline{x}(0) = (l, 0, 0)$, $\underline{\dot{x}}(0) = (a, 0, b)$. Dimostrare che il punto si muove su un piano fisso, determinare l'equazione del piano e calcolare la velocita' areolare.

Moto di una terna rispetto ad un'altra. Questo studio si applichera', come vedremo in seguito, alla cinematica dei sistemi rigidi.

Supponiamo che la terna T' si muova rispetto alla terna T. Sia P un punto fisso in T'. Studiamo il moto della terna T' studiando come sono distribuite le velocita' dei punti solidali (fissi) a T'. Per fare questo deriviamo rispetto al tempo la formula (1), tenendo presente che gli elementi della matrice A dipendono dal tempo, cosi come le coordinate di P e O' rispetto a T.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \dot{A}X' + \dot{Y} = \dot{A}A^{-1}(X - Y) + \dot{Y} = \Omega(X - Y) + \dot{Y} \qquad (2)$$

dove abbiamo usato la formula (1) nel 2^0 passaggio e dove abbiamo posto $\Omega = \dot{A}A^{-1} = \dot{A}A^{\mathrm{T}}$.
La matrice Ω e' antisimmetrica. Per dimostrarlo basta far vedere che $\Omega + \Omega^T = 0$, cioe'

$$\dot{A}A^{\mathrm{T}} + (\dot{A}A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \dot{A}A^{\mathrm{T}} + (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\dot{A}^{\mathrm{T}} = \dot{A}A^{\mathrm{T}} + A\dot{A}^{\mathrm{T}}$$

Abbiamo usato il fatto che $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ e $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

Ricordando che $\frac{d}{dt}A^{\mathrm{T}} = (\frac{d}{dt}A)^{\mathrm{T}}$, si ha

$$\Omega + \Omega^T = \frac{d}{dt}(AA^{\mathrm{T}}) = \frac{d}{dt}(AA^{-1}) = \frac{d}{dt}I = 0$$

Ne segue che, detti ω_{ij} gli elementi della matrice Ω, si ha: $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$ e $\omega_{12} = -\omega_{21}$, $\omega_{31} = -\omega_{13}$, $\omega_{23} = -\omega_{32}$.

L'azione di una matrice antisimmetrica su un vettore colonna qualunque, nello spazio euclideo tridimensionale orientato, puo' essere rappresentata mediante il prodotto vettoriale

$$\Omega X = \underline{\omega} \wedge \underline{x} \tag{3}$$

dove $\underline{\omega}$ e' un vettore di componenti $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega_{32}, \omega_{13}, \omega_{21})$ e $\underline{x}$ e' il vettore di posizione di componenti (x_1, x_2, x_3).

Esercizio: dimostrare la (3) calcolando il vettore colonna ΩX e le componenti del vettore $\underline{\omega} \wedge \underline{x}$.

La formula (2) si puo' scrivere

$$\underline{v}_P = \underline{v}_{0'} + \underline{\omega} \wedge O'P \tag{4}$$

Proprieta' del vettore $\underline{\omega}$:

a) Il vettore $\underline{\omega}$ e' indipendente dal sistema di riferimento scelto, cosi' come i vettori velocita' $\underline{v}_P$ e $\underline{v}_{O'}$
b) Valgono le seguenti formule di Poisson

$$\underline{\omega} \wedge \underline{i}' = \frac{d}{dt}\underline{i}', \quad \underline{\omega} \wedge \underline{j}' = \frac{d}{dt}\underline{j}', \quad \underline{\omega} \wedge \underline{k}' = \frac{d}{dt}\underline{k}'$$

c) Se esiste una direzione $\underline{u}$ solidale alla terna T' che resta fissa durante il moto, $\underline{\omega}$ e' diretto come l'asse fisso $\underline{u}$. Inoltre ogni punto P solidale a T' descrive una circonferenza su un piano perpendicolare ad $\underline{u}$ di centro la proiezione P^* di P sull'asse fisso $\underline{u}$ e raggio $||PP^*||$.
d) Se $\underline{\omega} = 0$ il moto di T' rispetto alla terna T e' traslatorio.
Dimostriamo qualcuna delle proprieta' a)...d).

a), b) (vedi libro di testo pag. 117)

c) Supponiamio per semplicita' che l'asse $\underline{u}$ fisso sia $\underline{k}' = \underline{k}$ e $O = O'$. Dalla terza formula di Poisson ne segue che $\frac{d}{dt}\underline{k}' = 0$ e $\underline{\omega}$ e' parallelo a $\underline{k}'$, cioe' $\underline{\omega}$ e' diretto come l'asse fisso. Inoltre, detta P^* la proiezione di P sull'asse z, si ha

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge O'P = \omega\underline{k}' \wedge O'P = \omega\underline{k}' \wedge (O'P^* + P^*P) = \omega\underline{k}' \wedge P^*P$$

Cioe' ogni punto solidale a T' descrive una circonferenza di centro $P^* \in \underline{k}'$ su un piano perpendicolare a $\underline{k}'$ con $\underline{v}_P$ tangente alla circonferenza in P. Calcoliamo la grandezza di $\underline{\omega}$.
Sia ϕ l'angolo tra i versori $\underline{i}$ e $\underline{i}'$, $\underline{i} \cdot \underline{i}' = cos\phi$. Derivando quest'ultima uguaglianza e utilizzando le formule di Poisson, si ha:

$$\underline{i} \cdot (\underline{\omega} \wedge \underline{i}') = -sen\phi\dot{\phi}$$

e per la proprieta' del prodotto misto tra vettori $\underline{a} \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \wedge \underline{a})$ si ha

$$-\underline{\omega} \cdot \underline{k} sen\phi = -sen\phi\dot{\phi}$$

cioe' $\omega = \dot{\phi}$.

d) Se $\underline{\omega} = 0$, ne segue che $\underline{v}_P = \underline{v}_{O'}$ cioe' $\frac{d}{dt}O'P = 0$ con O' e P due qualunque punti solidali alla terna mobile. Questo vuol dire che il vettore $O'P$ e' costante in direzione (oltre che in grandezza, cosa che gia' sappiamo) e il moto e' traslatorio.

Il vettore $\underline{\omega}$ cosi' introdotto rappresenta il vettore **velocita' angolare** della terna T' rispetto a T. La formula (4) individua " il moto" di T' rispetto a T. Le velocita' dei punti solidali a T' rispetto a T, e quindi il moto di T', sono individuate da due vettori cinematici: la velocita' di un qualunque punto O' solidale a T' e la velocita' angolare ω di T' rispetto a T.

Riprendiamo la formula (4) $\quad \underline{v}_P = \underline{v}_{0'} + \underline{\omega} \wedge O'P \quad$ e studiamo dei casi particolari.

1. Moto rotatorio di T' rispetto a T: esiste una retta solidale a T', che per semplicita' abbiamo scelto essere coincidente con l' asse $\underline{k}' = \underline{k}$, fissa durante il moto detta asse di rotazione.
Come abbiamo visto, (proprieta' c)) $\underline{\omega} = \dot{\phi}\underline{k}$ dove ϕ e' l'angolo che un semipiano fisso (xz) forma con uno solidale a T' (x', z). Proiettando la formula $\underline{v}_P = \dot{\phi}\underline{k}' \wedge P^*P$ sugli assi di T, si ha

$$\dot{x} = -\dot{\phi}y, \quad \dot{y} = \dot{\phi}x, \quad \dot{z} = 0$$

da cui segue, moltiplicando ambo i membri della prima equazione per x, la seconda per y e sommando, $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = R^2$ e $||\underline{v}_P|| = \dot{\phi}R$ con $\underline{v}_P$ tangente alla circonferenza posta sul piano ortogonale a $\underline{k}$ di centro P^* e raggio R.

2. Moto con asse invariabile: esiste una retta solidale a T che si mantiene sovrapposta ad una retta fissa ($\underline{k}' = \underline{k}$).
Proiettando la formula $\underline{v}_P = \underline{v}'_O + \dot{\phi}\underline{k}' \wedge P^*P$ sugli assi di T, si ha

$$\dot{x} = -\dot{\phi}y, \quad \dot{y} = \dot{\phi}x, \quad \dot{z} = \dot{z}'_0$$

Ogni punto di T' descrive un'orbita appartenente ad un cilindro circolare di raggio R. La tangente dell'angolo che $\underline{v}_P$ forma con $\underline{k}$ e' $tg\theta = \frac{\dot{\phi}R}{\dot{z}'_0}$. Se il tapporto $\frac{\dot{\phi}R}{\dot{z}'_0}$ e' costante, il moto e' detto elicoidale e se $\dot{\phi}$, e $\dot{z}'_0$ sono costanti, il moto elicoidale e' uniforme.

3. Atto di moto rotatorio: un punto solidale (sia O') a T' resta fisso durante il moto. La formula (1) diviene:

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge O'P$$

Il vettore $\underline{\omega}$ non e' piu' costante in direzione e anche l'asse di rotazione (asse di istantanea rotazione) varia con il tempo.

3. Atto di moto rototraslatorio: (vedi testo pag.116)

4. Moto piano: la terna T' e' dotata di un moto tale che una sua qualunque sezione parallela ad un piano fisso π si mantiene durante il moto sovrapposto al piano fisso e le velocita' dei punti appartenenti ad una retta ortogonale al piano π coincidono. Ne segue che tali punti descrivono orbite piane parallele con la stessa legge oraria. Tale moto puo' essere completamente descritto dal moto di un piano mobile p rispetto al piano fisso π. (vedi libro di testo pag. 118).

Esercizio: una terna T' si muove rispetto a T in modo tale che $O' = O$ e la matrice $A(t)$ e' data da

$$A = \begin{pmatrix} cos\phi & sen\phi & 0 \\ -sen\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare la velocita' angolare di T' rispetto a T. Di che moto si tratta?
(Si suggerisce di calcolare la matrice $\Omega = \dot{A}A^T$ e applicare la formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi)

Torneremo su questo argomento quando studieremo i sistemi rigidi.