II Dinamica del punto materiale e dei sistemi: Analisi qualitativa dei moti unidimensionali conservativi.

1. Problema matematico, teorema di esistenza e unicita' per i sistemi di equazioni differenziali in forma normale. Esempi (pag. 18-20 del libro di testo).

2. Quantita' di moto, momento della quantita' di moto, energia cinetica, lavoro di una forza, forze conservative, conservazione dell'energia meccanica, integrali primi (pag. 44-50).

Esercizio: Calcolare l'energia potenziale dei seguenti campi di forze:
$\mathbf{f}_1 = m\mathbf{g}$, $\mathbf{f}_2 = -kOP$, $\mathbf{f}_3 = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, $\mathbf{f}_4 = f(\rho)\mathbf{u}$, $\rho = ||OP||$, $\mathbf{u} = versOP$, $\mathbf{f}_5 = (x + 2xy)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

Esercizio: Studiare il moto di un punto materiale P di massa m soggetto alla forza $\mathbf{f} = \mathbf{H} \wedge \mathbf{v}$, dove $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ con condizioni iniziali $\mathbf{x_0} = (0, 0, 0), \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{0} = (0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$

Esercizio: Determinare la traiettoria e l'orbita di un grave (punto materiale soggetto alla sola forza peso) date le condizioni iniziali $\mathbf{x_0} = (0, 0, 0), \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{0} = (\dot{x}_0, 0, \dot{z}_0)$

Esercizio: Studiare il moto di un punto materiale P soggetto alla forza $\mathbf{f} = -k||OP||^4 OP$, $k > 0$, con condizioni iniziali $\mathbf{x_0} = (x_0, 0, 0), \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{0} = (0, \dot{y}_0, 0)$

Esercizio: Studiare il moto di un punto materiale P soggetto alla forza $\mathbf{f} = -kOP$, $k > 0$, con condizioni iniziali $\mathbf{x_0} = (x_0, 0, 0), \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{0} = (\dot{x}_0, 0, \dot{z}_0)$ determinando traiettoria e orbita.

Esercizio: Studiare il moto di un oscillatore armonico smorzato descritto dall'equazione

$$m\ddot{x} + kx + 2h\dot{x} = 0, \qquad k, h > 0$$

al variare delle costanti h, k.

3. Vincoli e reazioni vincolari. Vincoli olonomi e anolonomi, bilateri e unilateri, fissi e mobili, lisci e scabri. Grado di liberta'. Comportamento delle reazioni vincolari, leggi di Coulomb-Morin, , (pag 83-93).

4. Equilibrio e stabilita' (pag 37 e seguenti del libro di testo).

Esercizio: Pendolo matematico

Esercizio: Pendolo cicloidale. In un piano verticale (O, x, y) un punto materiale P di massa m e' vincolato senza attrito a scorrere su una cicloide di equazioni parametriche

$$x = R(\theta + sen\theta), \quad y = R(1 - cos\theta), \quad \theta \in (-\pi, \pi)$$

Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa curvilinea, dimostrare che il moto di P e' un moto armonico. Determinare, inoltre, la reazione vincolare in funzione del tempo.

Esercizio: In un piano orizzontale $(O, x, y,)$ un punto materiale P di massa m e' vincolato a scorrere senza attrito sull'asse Oy. Sul punto agisce una forza di tipo coulombiana $\underline{F}_C = h\frac{versOP}{||OP||^2}$ ed una forza elastica $-kQP$, essendo Q un punto dell'asse x posto a distanza a da O. (h, k, a costanti positive).

Determinare le posizioni di equilibrio e l'equazione di moto.
Inoltre, utilizzando l'integrale primo dell'energia, determinare la massima velocita' (in valore assoluto) raggiunta da P sapendo che inizialmente $y_0 = 2(h/k)^{1/3}$, $\dot{y}_0 = 0$

Esercizio: Studiare il moto di un punto materiale pesante vincolato senza attrito ad appartenere alla superficie di un cilindro di raggio R ad asse verticale. Il punto e' soggetto ad una forza elastica ideale $-kOP$, $k > 0$,

essendo O l'origine del sistema di assi cartesiani coincidente con il punto di mezzo dell'asse verticale del cilindro.
Assegnate le condizioni iniziali di posizione e velocita', determinare la traiettoria e la reazione vincolare.
(Usare coordinate cilindriche)

Sia dato un sistema di N punti materiali soggetto a vincoli olonomi bilateri e fissi ad un grado di liberta'. Sia q la variabile lagrangiana. Ne segue che

$$\underline{x}_i = \underline{x}_i(q), \qquad \dot{\underline{x}}_i = \frac{d\underline{x}_i}{dq}\dot{q}, \quad i = 1, ...N$$

e l'energia cinetica del sistema e' data da

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2$$

dove

$$a(q) = \sum_i m_i \frac{d\underline{x}_i}{dq} \cdot \frac{d\underline{x}_i}{dq} > 0$$

Per tali sistemi, supponendo che le forze agenti siano sostanzialmete conservative di energia potenziale $V(\underline{x}_1, ..., \underline{x}_N) = V(q)$, si conserva l'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + V(q) = E$$

5. Studio qualitativo delle orbite di sistemi non lineari ad un grado di liberta' conservativi.

Abbiamo visto che, in generale, non si riescono ad ottenere soluzioni analitiche di equazioni differenziali non lineari; metodi che danno soluzioni approssimate o informazioni qualitative sulle soluzioni, sono quindi di grande importanza.
Ci occuperemo dello studio delle proprieta' generali (qualitative) delle soluzioni senza dover calcolare esplicitamente la soluzione associata ad ogni dato iniziale. Per ovvi motivi fisici, si e' interessati a quelle proprieta' che non vengono modificate da piccole variazioni dei dati iniziali (stabilita'), alla biforcazione dei punti di equilibrio, al comportamento asintotico delle soluzioni, all'esistenza di orbite periodiche.

(pag.21-43 libro di testo e pag. 18-26 delle dispense del prof. Benettin, in rete).

Esercizio: Studiare le orbite nel piano delle fasi per il "Pendolo Matematico"

Esercizio: In un piano verticale un punto materiale P di massa m e' vincolato senza attrito a muoversi su una circonferenza di centro O e raggio R. Sia $(0, x, z)$ un riferimento cartesiano ortogonale nel piano (asse z orientato positivamente verso il basso) Il punto e' soggetto ad una forza elastica $-kP^*P$, $k > 0$ dove P^* e' la proiezione di P sull'asse z. Sia θ l'angolo che l'asse z forma con OP.
Calcolare le posizioni di equilibrio e la stabilita', scrivere l'equazione di moto, calcolare la rezione vincolare nel generico istante di moto, studiare qualitativamente il moto e le orbite nel piano delle fasi al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{kR}$.

Esercizio: Determinare, al variare di $\alpha \in R$, l'esistenza di orbite periodiche per il sistema la cui energia potenziale e' $V(x) = (1 - \alpha)x^2 + \alpha x^4$.

Esercizio: Dato un sistema conservativo unidimensionale la cui energia potenziale e'

$$V(x) = 1/2 \ \alpha x^2 + 1/4(x^2 - 1)^2, \quad \alpha \in R$$

determinare
a) i punti di equilibrio al variare del parametro α,
b) la stabilita' e la biforcazione.
c) nel caso in cui $\alpha = 1/2$, dire per quali valori dell'energia si hanno moti periodici e orbite omocline.
d) disegnare il ritratto di fase delle orbite.

Risposte
a) $x = 0$ e per $\alpha < 1$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{(1-\alpha)}$. Se $\alpha = 1$ le 3 posizioni coincidono
b) $x = 0$ stabile se non esistono x_1, x_2, altrimenti instabile. x_1, x_2 stabili quando esistono. La posizione di equilibrio $x = 0$ biforca per un valore del parametro $\alpha = 1$.
c) Si hanno moti periodici per $E > V_{min}$ purche' diverso da $\frac{1}{4}$. Si hanno due orbite omocline per $E = \frac{1}{4}$ e $x_0 \in [-1, 0) \cup (0, 1]$

Esercizio : Supponendo che le condizioni iniziali del moto retto dall'equazione

$$\ddot{x} = -x^4 + x^2$$

siano $x(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$, determinare l'insieme di valori di $\dot{x}_0$ per i quali il moto risulti periodico

Esercizio : Determinare le orbite nel piano delle fasi del sistema

$$\ddot{x} = x^2 - x$$

Esercizio : Dato un sistema meccanico unidimensionale con energia potenziale data da

$$V(x) = (x^2 - 1)(x + 2)^2$$

si discutano qualitativamente i moti al variare dell'energia meccanica e si determini l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche.

Esercizio: Determinare le posizioni di equilibrio e discutere la stabilita' per un punto soggetto ad un'energia potenziale

$$V(x) = -ax^2 + bx^4, \quad a, b > 0$$

Esercizio : Si consideri il repulsore lineare descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = \gamma x, \quad \gamma > 0$$

e si dimostri che le orbite nel piano delle fasi sono iperboli per $E > 0$ e per $E < 0$ e rette per $E = 0$.

Esercizio : Dato un sistema meccanico unidimensionale con energia potenziale data da

$$V(x) = \exp(-x^2)(x^2 - 1)$$

si discutano qualitativamente i moti al variare dell'energia meccanica, si determini l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche e i dati iniziali che generano orbite eterocline. Scrivere le equazioni delle rette separatrici.

Esercizio : Dato un sistema meccanico unidimensionale con energia potenziale data da

$$V(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad x \in R/\{0\}$$

si discutano qualitativamente i moti al variare dell'energia meccanica.

6. Generalita' sui sistemi di punti materiali. Forze interne, risultante e momento risultante delle forze interne. Equazioni cardinali della meccanica.

7. Baricentro, proprieta', discussione del teorema del moto del baricentro.

8. Proprieta' del momento risultante di un sistema di forze. Asse centrale di un sistema di forze.

9. Lavoro delle forze interne, conservazione dell'energia meccanica .

Per i punti 5-9 fare riferimento al libro di testo.

Esercizio: sia dato un sistema di N punti soggetto a vincoli olonomi bilateri e fissi ad n di liberta'. Siano $(q_1, ..., q_n)$ le n variabili lagrangiane. Dimostrare che l'energia cinetica e' data da

$$T(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) = \frac{1}{2}\Sigma_{h,k} a_{hk}(q_1, ..., q_n)\dot{q}_h\dot{q}_k$$

dove

$$a_{hk}(q_1, ..., q_n) = \sum_i m_i \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial q_k} > 0$$

Per analizzare la stabilita' di una posizione di equilibrio dimostriamo il seguente teorema di Dirichlet-Lagrange che e' un caso particolare di un metodo piu' generale, detto 2^0 metodo di Liapunov su cui ci soffermeremo in seguito.

Teorema di Dirichlet-Lagrange
Sia dato un sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi, bilateri fissi e lisci ad n gradi di liberta' e siano $\underline{q} = (q_1, q_2, ...q_n)$ le n coordinate lagrangiane che descrivono la posizione del sistema. Supponiamo inoltre che le forze attive siano conservative e sia $V(\underline{q})$ di classe C^∞ l'energia potenziale del sistema. Una posizione di equilibrio $\underline{\tilde{q}} = (\tilde{q}_1, ..., \tilde{q}_n)$ e' stabile se $\underline{\tilde{q}}$ corrisponde a un minimo isolato per l'energia potenziale.

Dimostrazione
Scegliamo la costante additiva dell'energia potenziale in modo che $V(\underline{\tilde{q}}) = 0$. Per l'ipotesi di minimo, $V(\underline{q})$ sara' positiva in un intorno di $\underline{\tilde{q}}$ e l'energia meccanica $E(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = T + V > 0 \ \forall \ (\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ appartenenti ad un intorno di raggio ρ del punto di equilibrio ($\underline{\tilde{q}}$, $\underline{\dot{q}} = 0$) con $E(\underline{\tilde{q}}, \underline{\dot{q}} = 0) = 0$.
Indichiamo con $B_\rho(\underline{\tilde{q}}, 0)$ questo intorno sferico.
Sia $\epsilon > 0$ arbitrario purche' $\epsilon < \rho$ e sia $E^* > 0$ il minimo della funzione $T + V$ sulla frontiera di $B_\epsilon(\underline{\tilde{q}}, 0)$. Questo minimo esiste perche' $T + V$ e' continua e la frontiera di B_ϵ e' un insieme chiuso e limitato.
Abbiamo detto che $E(\underline{\tilde{q}}, \underline{\dot{q}} = 0) = 0$. Ne segue che per continuita' $\exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0, \ \ \delta < \epsilon$, tale che prendendo i dati iniziali $(\underline{q}_0, \underline{\dot{q}}_0)$ in $B_\delta(\underline{\tilde{q}}, 0)$ si ha che $E_0 = E(\underline{q}_0, \underline{\dot{q}}_0) < E^*$. Ma per la conservazione dell'energia $E(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) = E_0$ lungo il moto. Ne segue che il moto $(\underline{q}(t), \ \underline{\dot{q}}(t))$ con dati iniziali in $B_\delta(\underline{\tilde{q}}, 0)$ non puo' raggiungere la frontiera della sfera di raggio ϵ su cui l'energia e' maggiore di E^*.

Esercizio. Tra due punti P_1 e P_2 agisce una forza interna elastica: calcolare l'energia potenziale.

$$dL = -kP_1P_2 \cdot \underline{v_2}dt - kP_2P_1 \cdot \underline{v_1}dt = -kP_1P_2 \cdot (\underline{v_2} - \underline{v_1})dt = -kP_1P_2 \cdot dP_1P_2$$

Ne segue che esiste una funzione energia potenziale tale che $dL = -dV$ con

$$V = \frac{1}{2}k||P_1P_2||^2 + c$$

Esercizio: In un piano orizzontale due punti materiali P e Q di ugual massa sono vincolati a scorrere senza attrito lungo due corconferenze concentriche di centro il punto O, origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali nel piano, e raggi r e R rispettivamente, $(R > r)$. Tra i due punti agisce una forza elastica ideale di costante $k > 0$.
Verificare che il sistema ha due gradi di liberta' e scegliere come coordinate lagrangiane gli angoli θ e ϕ che l'asse x forma rispettivamente con i raggi vettori OQ e OP. Determinare le equazioni di moto, le reazioni vincolari e gli integrali primi.

Esercizio: In un piano verticale due punti materiali P e Q di ugual massa sono vincolati senza attrito nel modo seguente. Il punto P scorre sull'asse delle x di un sistema di assi cartesiani ortogonali nel piano, (O, x, z), e il punto Q e' vincolato a mantenersi a distanza costante da P. Sul punto P agisce una forza elastica ideale $-kOP$, $k > 0$. Scelte come coordinate lagrangiane l'ascissa x di P e l'angolo θ che la verticale forma con PQ, determinare le equazioni di moto e le reazioni vincolari.

Esercizio: In un piano orizzontale due punti materiali P e Q di ugual massa sono vincolati a scorrere senza attrito nel modo seguente: il punto P e' vincolato all'asse Ox di un riferimento nel piano e il punto Q e' vincolato ad una circonferenza di raggio R e centro $C = (0, h)$ posto sull'asse Oy. Tra i due punti agisce una forza elastica ideale di costante $k > 0$.
Verificare che il sistema ha due gradi di liberta' e scegliere come coordinate lagrangiane l'ascissa x di P e l'angolo θ che la verticale forma con OQ. Determinare le equazioni di moto, le posizioni di equilibrio e il loro carattere al variare del parametro $\lambda = h/R$ e le reazioni vincolari.

Esercizio: Determinare il baricentro di un arco omogeneo di circonferenza di raggio R e semiapertura α.

Esercizio: Determinare il baricentro di un settore circolare omogeneo di raggio R e semiapertura α.

Esercizio: Determinare il baricentro del sistema rigido costituito dai tre punti materiali $(P_1; m), (P_2; 2m), (P_3; 2m)$ con P_1, P_2 e P_3 formanti un triangolo equilatero di lato l.

Risposta: $x_G = 3/5l, y_G = \sqrt{3}/5l$

Esercizio: Determinare il baricentro di un disco omogeneo di raggio R con un "buco" circolare di raggio $R/2$ con i due centri a distanza $R/2$. Risposta: $x_G = -R/6$.