III Sistemi rigidi

1. Grado di liberta' di un sistema rigido libero

Dare la posizione di un sistema rigido rispetto ad una terna T e' equivalente a dare la posizione di una terna T' rispetto a T. Infatti dati tre punti non allineati di S, P_1, P_2, P_3 si puo' costruire una terna T' che ha come origine il punto P_1, P_1P_2 come asse x, la perpendicolare a tale asse passante per P_1 nel piano dei tre punti come asse y orientata in modo tale che P_3 abbia ordinata positiva e la perpendicolare al piano passante per P_1 come asse z orientata in modo tale che la terna sia levogira.

L'identificazione di terne cartesiane ortogonali T' con sistemi rigidi ci riporta allo studio che abbiamo fatto nella prima parte delle lezioni: abbiamo visto che per individuare la posizione dei punti solidali alla terna T' rispetto ad una fissa T sono necessarie 3 coordinate cartesiane di un punto solidale, per es. le coordinate dell'origine di T' e 3 parametri che individuano l'orientamento degli assi di T' rispetto a T (dei 9 elementi della matrice A solo 3 sono indipendenti, vedi parte **I** degli appunti).

E sei e' appunto il grado di liberta' di un sistema rigido libero S. Di questo fatto ci si puo' rendere conto calcolando il numero di vincoli olonomi bilateri indipendenti dovuti alla rigidita' del sistema. Consideriamo P_1, P_2, P_3 tre punti non allineati di S. Le relazioni dovute ai vincoli di rigidita' sono 3 e sono del tipo:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = l_{ij}^2 \qquad (1)$$

Siano P_h e P_k due degli $N-3$ punti di S. Per ognuno dei due punti scriveremo 3 relazioni del tipo (1) in modo che siano a distanza costante dai primi tre. Ne segue che P_h e P_k hanno automaticamente distanza costante tra loro. Le relazioni indipendenti del tipo (1) sono dunque $3 + 3(N-3)$ e il grado di liberta' e' $n = 3N - (3 + 3(N-3)) = 6$ qualunque sia il numero di punti $N \geq 3$.

Se il sistema rigido e' formato da punti allineati, il grado di liberta' e' $n = 5$. Infatti se i punti P_1, P_2 individuano la retta su cui giace il sistema rigido, per ognuno degli altri $N-2$ punti scriveremo 2 relazioni di appartenenza alla retta e $N-1$ sono le relazioni di rigidita' del tipo (1) in modo che ogni punto sia a distanza costante da quello che segue. Dunque $2(N-2)+N-1$ sono le relazioni indipendenti e $n = 3N-(3N-5) = 5$ qualunque sia il numero di punti $N \geq 2$.

Il problema che si pone e' quello di scegliere sei coordinate lagrangiane necessarie e sufficienti ad individuare la posizione di S rispetto ad una terna fissa. Tre parametri corrispondono alle tre coordinate cartesiane di un punto solidale ad S e tre individuano l'orientamento di S. Questi ultimi sono gli **angoli di Eulero** (vedi testo pag 195 e seguenti e appunti sugli angoli di Eulero in rete).

2. Cinematica di un sistema rigido

Abbiamo visto che dare la posizione di un sistema rigido rispetto ad una terna T e' equivalente a dare la posizione di una terna T' rispetto a T.
Ne segue che lo studio della cinematica di un sistema rigido si riduce allo studio del "moto di una terna rispetto ad un'altra", studio che e' stato fatto (vedi parte **I** degli appunti e appunti sulla cinematica in rete).
La formula

$$\underline{v}_P = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \wedge O'P$$

prende il nome di **formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi**.
Essa fornisce la distribuzione istantanea delle velocita' di un sistema rigido (atto di moto). L'atto di moto di un sistema rigido e' individuato da due vettori (6 quantita' scalari), $\underline{v}_{O'}, \underline{\omega}$, la velocita' di un qualunque punto solidale a S e la velocita' angolare. Nella formula precedente O' e P sono due punti qualunque solidali con S.

- Moti traslatori: $\underline{\omega} = 0$ e $\underline{v}_P = \underline{v}_{O'}$ dove O' e P sono due qualunque punti solidali ad S. Ne segue

$$\frac{dO'P}{dt} = \underline{v}_P - \underline{v}_{O'} = 0$$

e il vettore solidale $O'P$ e' costante anche in orientamento. Un moto rigido che preserva l'orientamento si dice traslatorio.

- Moti rotatori: esiste una retta solidale a S, che resta fissa durante il moto, sia $\underline{u} = \alpha \underline{i}' + \beta \underline{j}' + \gamma \underline{k}'$. Usando le formule di Eulero segue che

$$0 = \frac{d\underline{u}}{dt} = \alpha \frac{d\underline{i}'}{dt} + \beta \frac{d\underline{j}'}{dt} + \gamma \frac{d\underline{k}'}{dt} = \underline{\omega} \wedge \underline{u}$$

la velocita angolare e' diretta come l'asse fisso che prende il nome di asse di rotazione e come abbiamo visto, (proprieta' c) della parte **I** degli appunti) $\underline{\omega} = \dot{\phi}\underline{u}$ dove ϕ e' l'angolo che un semipiano fisso forma con uno solidale a S.
Inoltre dalla formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi si ha $\underline{v}_P = \dot{\phi}\underline{u} \wedge P^*P$ dove P^* e' la proiezione di P sull'asse di rotazione , cioe' ogni punto solidale ad S descrive una circonferenza posta sul piano ortogonale a $\underline{u}$ di centro P^* e raggio $||P^*P||$ con $\underline{v}_P$ tangente alla circonferenza.

- Atto di moto rotatorio: esiste un punto C solidale ad S che rimane fisso durante il moto ($\underline{v}_C = 0$). La formula fondamentale da in tal caso

$$\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge CP$$

Il vettore $\underline{\omega}$ non ha una direzione fissa e l'asse a cui $\underline{\omega}$ e' istante per istante parallelo prende il nome di istantanea rotazione.

- Atto di moto rototraslatorio: un atto di moto rigido generico puo' essere visto come la composizione di un atto di moto traslatorio e di un atto di moto rotatorio. Si puo' dimostrare il teorema del Mozzi (vedi pag 116 e 117 del libro di testo).

- Moti rigidi piani: vedi libro di testo pag. 118-119 e appunti sulla cinematica in rete.

3. **Dinamica e statica di un sistema rigido libero**

Le equazioni cardinali

$$\dot{\underline{Q}} = \underline{R}^e, \qquad \dot{\underline{J}}_O + \underline{v}_O \wedge \underline{Q} = \underline{M}^e_O \tag{2}$$

necessarie per la dinamica di un qualunque sistema di punti materiali, diventano, per sistemi rigidi, anche sufficienti come dimostreremo piu' avanti. Che cosi' debba essere ci si puo' rendere conto con un ragionamento di massima basato sul confronto tra numero di equazioni scalari, sei, e sei e' il numero di incognite.

Anche nel caso statico si dimostra che condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema rigido libero in una posizione $\bar{S}$, che si suppone occupata inizialmente con atto di moto nullo, e' che in corrispondenza a detta posizione e all'atto di moto nullo e al generico istante $t > t_0$, si abbia

$$\underline{R}^e = 0, \qquad \underline{M}^e_O = 0 \tag{3}$$

Infatti supponiamo che siano verificate le equazioni (3) in corrispondenza di una posizione $S = \bar{S}$ e atto di moto nullo e per ogni $t > t_0$. Consideriamo le equazioni cardinali (2) con condizioni iniziali $S = \bar{S}$ e atto di moto nullo. Come specificheremo piu' avanti le equazioni (2) completate dalle condizioni iniziali individuano univocamente lo stato di moto del sistema ed e' facile verificare che la soluzione statica $S(t) = \bar{S}$ e' l'unica soluzione. Infatti essa soddisfa i dati iniziali e le equazioni (2) risultando in corrispondenza ad essa zero il primo membro e zero il secondo membro per ipotesi.

3.1. Espressione del momento risultante delle quantita' di moto $\underline{J}_O$ per sistemi rigidi (consultare anche pag. 187-189 del libro di testo).

$$\underline{J}_O = \sum_i OP_i \wedge m_i \underline{v}_i = \sum_i OP_i \wedge m_i(\underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge OP_i) = MOG \wedge \underline{v}_O + \underline{J}_O^{rot}$$

Nell'espressione precedente abbiamo usato come polo di riduzione del momento il punto O solidale ad S che appare nella formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi. Tale scelta non e' riduttiva, perche', dovendo calcolare il momento rispetto ad un altro polo O', sappiamo che il momento varia al variare del polo secondo la legge

$$\underline{J}_{O'} = \underline{J}_O + OO' \wedge \underline{Q}$$

Calcoliamo il contributo a $\underline{J}_O$ dovuto all'atto di moto rotatorio:

$$\underline{J}_O^{rot} = \sum_i OP_i \wedge m_i(\underline{\omega} \wedge OP_i) = \sum_i m_i ||OP_i||^2 \underline{\omega} - \sum_i m_i (OP_i \cdot \underline{\omega}) OP_i$$

Nella formula precedente abbiamo usato l'identita': $\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$

Sia O l'origine di una terna solidale ad S, siano $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ i versori degli assi di tale terna, e siano x_i, y_i, z_i le coordinate di P_i, e p, q, r le componenti del vettore velocita' angolare rispetto alla terna solidale.Calcolando i prodotti scalari e riordinando i termini, ne segue che

$$\underline{J}_O^{rot} = Ap\underline{i} + Bq\underline{j} + Cr\underline{k} + Dq\underline{i} + Er\underline{i} + Dp\underline{j} + Fr\underline{j} + Ep\underline{k} + Fq\underline{k}$$

dove

$$A = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad B = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad C = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

sono quantita' costanti che dipendono dalla distribuzione delle masse detti momenti di inerzia rispetto agli assi x, y, z della terna solidale con S e

$$D = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad E = -\sum_i m_i x_i z_i, \quad F = -\sum_i m_i y_i z_i$$

sono quantita' costanti detti prodotti di inerzia.

Introducendo la matrice simmetrica 3×3 detta matrice di inerzia

$$I_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$$

le componenti di $\underline{J}_O^{rot}$ rispetto agli assi della terna solidale si possono scrivere come

$$J_\alpha^{rot} = \sum_\beta I_{\alpha,\beta} \Omega_\beta \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

dove Ω_β e' il vettore colonna i cui elementi sono le componenti p, q, r del vettore velocita' angolare.

3.2. Espressione dell'energia cinetica T per sistemi rigidi (consultare anche pag. 189-191 del libro di testo).

Tenendo conto della formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi, l'energia cinetica si scrive come

$$T = \frac{1}{2} M \underline{v}_O \cdot \underline{v}_O + \underline{v}_O \cdot (\underline{\omega} \wedge MOG) + T^{rot}$$

dove T^{rot} e' il contributo all'energia cinetica dovuto all'atto di moto rotatorio di S.
Notiamo che se il punto $O \equiv G$, otteniamo il teorema di Konig per sistemi rigidi (pag 136-137 del libro di testo)

$$T = \frac{1}{2} M \underline{v}_G \cdot \underline{v}_G + T^{rot}$$

dove T^{rot} e' l'energia cinetica relativa ad una terna baricentrale.
Considerando una terna solidale al sistema rigido con origine in G, l'espressione di T^{rot} e' la seguente

$$T^{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\underline{\omega} \wedge OP_i) \cdot (\underline{\omega} \wedge OP_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \underline{\omega} \cdot (OP_i \wedge (\underline{\omega} \wedge OP_i)) = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{J}_O^{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} I_{\alpha,\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta$$

cioe' l'energia cinetica di rotazione e' una forma quadratica nelle componenti della velocita' angolare. Poiche' T^{rot} e' positiva, nulla se e solo se $\underline{\omega} = 0$, ne segue che la matrice di inerzia e' simmetrica e definita positiva.
Nella formula precedente abbiamo usato l'identita' $\underline{a} \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c}) = \underline{b} \cdot \underline{c} \wedge a$

3.3. Diagonalizzazione della matrice di inerzia (pag. 190, 191).

3.4. Assi principali e centrali di inerzia. Proprieta' di simmetria (pag. 191-194).

3.5. Momenti di inerzia e proprieta'.

3.6. Sufficienza delle equazioni cardinali.

Scegliendo una terna solidale che sia pricipale di inerzia, l'espressione di $\underline{J}_O^{rot}$ si riduce a

$$\underline{J}_O^{rot} = Ap\underline{i} + Bq\underline{j} + Cr\underline{k} \tag{4}$$

Notiamo che si sono usati gli stessi simboli per i momenti di inerzia, le componenti di $\underline{\omega}$ e i versori, ma nella (4) A, B, C sono momenti principali cosi' come i versori sono versori di una terna principale e le componenti di $\underline{\omega}$ sono riferite a tali assi. Possiamo calcolare il primo membro della seconda equazione cardinale prendendo come polo il baricentro o, se esiste, un punto O solidale con S fisso. Si ha che $J_G = J_G^{rot}$ e

$$\underline{\dot{J}}_G = A\dot{p}\underline{i} + B\dot{q}\underline{j} + C\dot{r}\underline{k} + \underline{\omega} \wedge J_G^{rot} =$$

$$= (A\dot{p} + (C-B)qr)\underline{i} + (B\dot{q} + (A-C)rp)\underline{j} + (C\dot{r} + (B-A)pq)\underline{k} \tag{5}$$

Possiamo ora scrivere le sei equazioni differenziali scalari proiezioni delle equazioni cardinali. Proiettiamo la prima equazione sugli assi X, Y, Z della terna inerziale e la seconda su una terna solidale e centrale di inerzia (o principale di inerzia avente come origine un eventuale punto fisso solidale con S)

$$M\ddot{X}_G = R_X^e, \quad M\ddot{Y}_G = R_Y^e, \quad M\ddot{Z}_G = R_Z^e \tag{6}$$

$$A\dot{p} + (C-B)qr = M_x^e, \quad B\dot{q} + (A-C)pr = M_y^e, \quad C\dot{r} + (B-A)pq = M_z^e \tag{7}$$

Le equazioni (7) sono le **equazioni di Eulero** .

Ricordiamo che p, q, r sono funzioni degli angoli di Eulero θ, ϕ, ψ e delle loro derivate prime e che il risultante e il momento risultante delle forze dipendono dalla posizione, dalla velocita' dei punti ed eventualmente dal tempo e cioe' dalle sei variabili lagrangiane scelte X_G, Y_G, Z_G, dagli angoli di Eulero e dalle loro derivate prime. Ne segue che il sistema (6) e (7) costituisce un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in $X_G, Y_G, Z_G, \theta, \phi, \psi$. Si puo' dimostrare che tali equazioni si possono mettere in forma normale e sotto opportune ipotesi di regolarita' sui secondi membri delle (6-7) vale il teorema di esistenza locale e unicita'; quindi, noti i valori iniziali di $X_G, Y_G, Z_G, \theta, \phi, \psi$ e delle loro derivate prime, cioe' posizione e atto di moto iniziali, il moto e' completamente determinato.

3.7. Espressione del lavoro elementare compiuto da forze agenti sui punti di un sistema rigido

$$dL = \sum_i \underline{f}_i \cdot \underline{v}_i dt = \sum_i \underline{f}_i \cdot (\underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge OP_i)dt = (\underline{R} \cdot \underline{v}_O + \underline{M}_O \cdot \omega)dt \qquad (8)$$

In particolare se tale lavoro e' riferito alle forze interne, si ha che in un sistema rigido le forze interne non compiono lavoro essendo $\underline{R}^i = 0$ e $\underline{M}_O^i = 0$.

3.8. Teorema delle forze vive.

Possiamo chiederci se il teorema delle forze vive $dT = dL$ contiene, nel caso di sistemi rigidi, informazioni in piu' rispetto alle equazioni cardinali, cosa che accade nel caso di sistemi qualunque di punti materiali. Ci aspettiamo una risposta negativa, visto che le equazioni cardinali, per sistemi rigidi, sono anche sufficienti a determinarne il moto. Infatti consideriamo

$$T = \frac{1}{2} M \underline{v}_G \cdot \underline{v}_G + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

$$dT = (M\underline{v}_G \cdot \underline{a}_G)dt + (Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r})dt = (M\underline{v}_G \cdot \underline{a}_G + \underline{\omega} \cdot \dot{\underline{J}}_G)dt$$

Il teorema delle forze vive afferma che durante il moto di un sistema di punti il differenziale dell'energia cinetica e' uguale al lavoro elementare compiuto da tutte le forze agenti sul sistema. Il lavoro compiuto dalle forze interne e' nullo per sistemi rigidi, quindi $dT = dL^e$, cioe'

$$(M\underline{v}_G \cdot \underline{a}_G + \underline{\omega} \cdot \dot{\underline{J}}_G)dt = (\underline{R}^e \cdot \underline{v}_G + \underline{M}_G^e \cdot \omega)dt$$

avendo preso nell'espressione (8) del lavoro il baricentro come punto solidale ad S. E' chiaro che il teorema delle forze vive non dice nulla di nuovo rispetto alle equazioni cardinali, ma rappresenta una loro conseguenza al contrario di quanto accade per sistemi deformabili per i quali non e' nullo il lavoro delle forze interne.

Esercizio: Calcolare i momenti di inerzia centrali e principali di una sbarretta omogenea di lunghezza l e massa m.

Esercizio: Calcolare i momenti di inerzia centrali e principali di un disco omogeneo di raggio R e massa m.

Esercizio: Calcolare i momenti di inerzia di una lamina rettangolare $OABC$ omogenea di lati $||OA|| = a$, $||OC|| = b$ rispetto agli assi di una terna $Oxyz$ di versori $\underline{i} = versOA$, $\underline{j} = versOC$, $\underline{k}$ ortogonale al piano contenente la lamina

$$A = \mu \int_0^a \int_0^b y^2 dx dy = Mb^2/3, \quad B = Ma^2/3, \quad C = M(a^2 + b^2)/3, \quad M = \mu ab$$

I prodotti di inerzia

$$D = -\mu \int_0^a \int_0^b xydxdy = -Mab/4, \quad E = F = 0$$

Questa terna non e' principale di inerzia.

Abbiamo dimostrato che ogni terna che ha origine su uno degli assi centrali e assi paralleli a quelli centrali e' principale. Se prendiamo l'origine della terna in O' dove O' e' tale che $||OO'|| = b/2$ e assi paralleli a x, y, z, questa terna e' principale e infatti

$$D = -\mu \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} xydxdy = 0$$

Esercizio: Determinare i momenti centrali di inerzia per un parallelepipedo omogeneo di lati a, b, c

$(A = \frac{m}{12}(b^2 + c^2),\ B = \frac{m}{12}(a^2 + c^2),\ C = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)\ )$

Esercizio: Determinare i momenti centrali di inerzia per una sfera omogenea di raggio R.

$(A = B = C = \frac{2m}{5}R^2)$

Esercizio: Determinare la matrice d'inerzia per una lamina a forma di triangolo rettangolo OAB di lati $||OA|| = a$, $||OB|| = b$ rispetto agli assi di una terna $Oxyz$ di versori $\underline{i} = versOB$, $\underline{j} = versOA$ e $\underline{k}$ ortogonale al piano contenente la lamina. Verificare che

$$I = \begin{pmatrix} \frac{m}{6}a^2 & -\frac{m}{12}ab & 0 \\ -\frac{m}{12}ab & \frac{m}{6}b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{6}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

Esercizio: Calcolare il baricentro G di una sbarretta OA non omogenea di densita' $\mu(x) = k(l+x)$ e lunghezza l e il suo momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrale ortogonale alla sbarretta.
(il baricentro e' posto sulla sbarra ad una distanza pari a $\frac{5}{9}l$ dall'estremo O e il momento di inerzia si determinana usando il teorema di Huygens $I_G = \frac{13}{162}Ml^2$)