**Sistemi rigidi vincolati**.

1.**Vincolo di punto fisso**.

Un punto solidale a $S$ e' fisso durante il moto. Sia $O$ tale punto che assumiamo essere l'origine di una terna solidale e principale di inerzia e coincidente con l'origine di una terna fissa.
Si ha che $x_O = y_O = z_O = 0$ e $\underline{v}_O = 0$. Ne segue che **il grado di liberta' del sistema e' tre** e le incognite lagrangiane sono gli angoli di Eulero. Inoltre l'atto di moto di $S$ e' un **atto di moto rotatorio** attorno ad un asse passante per $O$.
Il dispositivo tipico con cui realizzare tale vincolo e' una cerniera sferica: entro una cavita' sferica $\sum$ solidale alla terna fissa di riferimento e' alloggiata una sfera, $\sum'$, di raggio uguale o appena inferiore, solidale con $S$. Il centro delle due sfere e' il punto fisso $O$ di $S$. In sostanza la cerniera sferica non e' altro che un vincolo di appoggio tra $S$ e $\sum$.
**In assenza di attrito**, le reazioni vincolari che si manifestano in ciascuno dei punti di contatto sono puramente normali al piano tangente a $\sum$ e orientate verso il centro $O$ della sfera. Di conseguenza risultano nulli i momenti rispetto ad $O$ di tutte le reazioni, cosi' come il momento risultante delle sollecitazioni vincolari

$$\underline{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

relazione che caratterizza il vincolo di punto fisso liscio. Essendo nullo il trinomio invariante, $\underline{M}_0^v \cdot \underline{R}^v$, con $\underline{R}^v$ generalmente diverso da zero, ne segue che le reazioni vincolari sono equivalenti ad un' unica forza, il risultante, $\underline{R}^v$ applicato ad $O$ e comunque orientato.
In conseguenza della (1), se si prende come polo di riduzione dei momenti nella seconda equazione cardinale il punto fisso $O$, si ottiene un'equazione vettoriale pura

$$\underline{\dot{J}}_O^{rot} = \underline{M}_O^{e,a}$$

che proiettata lungo gli assi della terna principale di inerzia con origine in $O$ da luogo alle equazioni di Eulero

$$A\dot{p} + (C-B)qr = M_x^{e,a}, \quad B\dot{q} + (A-C)pr = M_y^{e,a}, \quad C\dot{r} + (B-A)pq = M_z^{e.a} \qquad (2)$$

A secondo membro compare il momento risultante delle forze esterne attive che dipende dalla posizione dei punti di $S$, cioe' da $\theta, \psi, \phi$, dall'atto di moto di $S$, cioe' dal vettore velocita' angolare ed eventualmente dal tempo. Con un ragionamento analogo a quello fatto nel punto (3.6) degli appunti precedenti, si riconosce che le equazioni (2) sono equivalenti ad un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine di forma normale nelle incognite $\theta(t), \psi(t), \phi(t)$: corredato con le condizioni iniziali, tale sistema individua unicamente il moto di $S$.
Sempre in conseguenza della (1) le incognite ausiliarie dovute alle reazioni vincolari sono le tre componenti di $\underline{R}^{e,v}$ che, una volta individuato il moto, si ricavavano dalla prima equazione cardinale:

$$\underline{\dot{Q}} = \underline{R}^{e,a} + \underline{R}^{e,v}$$

Il lavoro elementare compiuto dalle reazioni vincolari e' dato da

$$dL^v = (\underline{R}^v \cdot \underline{v}_0 + \underline{M}_0^v \cdot \omega)dt \qquad (3)$$

e tale espressione e' nulla per un vincolo di punto fisso liscio. Ne segue che, se le forze attive sono conservative, si conserva durante il moto l'energia meccanica $T + V = E$, dove $T$ ha la seguente espressione

$$T = T^{rot} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

con $A, B, C$ momenti principali di inerzia rispetto agli assi della terna principale con origine in $O$.

Per quanto riguarda la statica di un corpo rigido vincolato ad avere un punto fisso liscio, sono posizioni di equilibrio tutte e sole le posizioni $\bar{S}$ nelle quali, in corrispondenza ad un atto di moto nullo e per ogni $t$, si ha

$$\underline{M}_0^{e,a}(\bar{S}, 0, t) = 0$$

Una volta individuate le posizioni di equilibrio dalla prima equazione cardinale si ricavano le reazioni vincolari $\underline{R}^{e,a} = -\underline{R}^{e,v}$.

2. **Vincolo di asse fisso liscio**, (pag. 141-144).

Un asse $u$ solidale ad $S$ resta fisso durante il moto. Sia $O$ un punto solidale ad $S$, $O \in u$. Ne segue $\underline{v}_O = 0$ e il vettore velocita' angolare $\underline{\omega} = \dot{\phi}\underline{u}$, dove $\phi$ e' un angolo che un semipiano fisso, limitato dall'asse $u$ e solidale al riferimento fisso forma con un semipiano formato dallo stesso asse $u$ e solidale ad $S$ e $\underline{u}$ e' il versore dell'asse $u$.
**Il grado di liberta' e' uno** e l' incognita lagrangiana e' data dal parametro $\phi$. Inoltre il moto di $S$ e' **rotatorio** attorno all'asse $u$.

Il vincolo si puo' realizzare tramite una cerniera cilindrica: un' appendice cilindrica solidale ad $S$ e' alloggiata in una cavita' cilindrica di diametro appena superiore, praticata in un altro corpo rigido solidale alla terna fissa di riferimento; l'appendice o la cavita' e' dotata di risalti in modo da impedire lo scorrimento mutuo delle due superfici cilindriche. In sostanza la cerniera cilindrica non e' altro che un vincolo d'appoggio.
**In assenza di attrito** le reazioni vincolari sono incidenti l'asse fisso o parallele (nei risalti) con esso. In entrambi i casi risultano nulli i momenti assiali delle singole reazioni ed e' quindi nullo il momento assiale risultante delle reazioni vincolari

$$M_u^v = 0 \qquad (4)$$

**relazione che caratterizza il vincolo di asse fisso liscio**.
In conseguenza della (4), se si prende come polo di riduzione dei momenti nella seconda equazione cardinale il punto fisso $O \in u$ e si proietta tale equazione su $u$, ottiene un'equazione scalare pura:

$$\dot{J}_u = \dot{\underline{J}}_O \cdot \underline{u} = M_u^{e,a} \qquad (5)$$

Calcoliamo $J_u$. Siano $\alpha, \beta, \gamma$ i coseni direttori dell'asse $\underline{u}$ rispetto agli assi di una terna principale di inerzia con origine in $O$. Le componenti della velocita' angolare rispetto a questi assi sono: $p = \dot{\phi}\alpha,\ q = \dot{\phi}\beta,\ r = \dot{\phi}\gamma$

$$J_u = \underline{J}_O \cdot \underline{u} = Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma = \dot{\phi}(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) = I_u\dot{\phi}$$

dove $I_u$ e' il momento di inerzia di $S$ rispetto all'asse fisso $u$. L'equazione (5) diviene:

$$I_u\ddot{\phi} = M_u^{e,a} \qquad (6)$$

Il secondo membro e' una funzione della posizione dei punti di $S$, cioe' di $\phi$, delle velocita', cioe' di $\dot{\phi}$ ed eventualmente del tempo. Ne segue che l'equazione (6) e' un'equazione differenziale scalare del secondo ordine in $\phi$ di forma normale e pura che, sotto opportune ipotesi di regolarita' sulle forze agenti, individua unicamente il moto di $S$ una volta assegnate le condizioni iniziali, cioe' $\phi_O$ e $\dot{\phi}_O$. Resta da calcolare le 5 incognite ausiliarie, tre componenti di $\underline{R}^v$ e due componenti di $\underline{M}_O^v$ e cinque sono le equazioni a disposizioni: le tre equazioni scalari che si ottengono proiettando la $1^a$ equazione cardinale sui tre assi di un riferimento fisso e le due equazioni scalari che si ottengono proiettando sugli altri due assi della terna principale la $2^a$ equazione cardinale.

Il lavoro elementare compiuto dalle reazioni vincolari e' dato da

$$dL = (\underline{R}^v \cdot \underline{v}_O + \underline{M}_O^v \cdot \omega)dt = M_u^v d\phi = 0 \qquad (7)$$

Ne segue che, se le forze attive sono conservative, si conserva durante il moto l'energia meccanica $T + V = E$, dove $T$ ha la seguente espressione

$$T = T^{rot} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) = \frac{1}{2}I_u\dot{\phi}^2$$

Essendo il sistema ad un grado di liberta', l'equazione di moto si puo' ricavare anche dalla conservazione dell'energia meccanica (vedi libro di testo pag.142 e 144).

Per quanto riguarda la statica di un corpo rigido vincolato ad avere un asse fisso liscio, sono posizioni di equilibrio tutte e sole le posizioni $\bar{\phi}$ nelle quali, in corrispondenza ad un atto di moto nullo si ha

$$M^{e,a}_{\underline{u}}(\bar{\phi}, 0, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$$

Una volta individuate le posizioni di equilibrio, dalla prima equazione cardinale si ricava il risultante delle reazioni vincolari $\underline{R}^{e,a}(\bar{\phi}, 0, t) = -\underline{R}^{e,v}$ e le due componenti di $\underline{M}^v_0$ proiettando l'equazione vettoriale $\underline{M}^{e,a}_0(\bar{\phi}, 0, t) = -\underline{M}^{e,v}_0$ sugli altri due assi principali d'inerzia.

Esercizio: una lamina omogenea $OABC$ ha la forma di un rettangolo di lati $OA = a$ e $OC = b$. Essa e' vincolata, senza attrito, ad avere un asse fisso, e sia il lato $OC$ che coincide con l'asse $OZ$ di un riferimento cartesiano fisso. Sia $\psi$ l'angolo che il piano fisso $XZ$ forma con il piano contenente la lamina. Inizialmente $\psi(0) = 0$ e $\dot{\psi}(0) = \omega_0$. Si determini il moto della lamina e, in funzione del tempo la risultante delle reazioni vincolari e il momento risultante delle reazioni vincolari.

3. **Vincolo di puro rotolamento**.

Supponiamo che il corpo rigido $S$ si muova su una superficie $\sigma$. In assenza di attrito $S$ slitta su $\sigma$, ma se e' presente l'attrito e il contatto avviene lungo una linea o in un punto, c'e' la possibilita' di rotolamento del corpo rigido sulla superficie. Il caso di "scabrezza ideale" si verifica quando $S$ **rotola senza strisciare** su $\sigma$: in tal caso la reazione vincolare nei punti di contatto deve verificare le leggi di Coulomb-Morin valide nel caso statico in quanto il punto di $S$ a contatto con $\sigma$ e' fermo rispetto a $\sigma$: la velocita' dei due punti a contatto deve essere uguale $\underline{\mathbf{v}}^{\mathbf{S}}_{\mathbf{\Omega}} = \underline{\mathbf{v}}^{\sigma}_{\mathbf{\Omega}}$ se $\Omega$ e' il punto di contatto. In particolare se $\sigma$ e' ferma $\underline{v}^{\sigma}_{\Omega} = 0$ e $\underline{v}^{S}_{\Omega} = 0$. Ne segue che ogni punto solidale ad $S$ ha velocita' $\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge \Omega P$.
Si tratta di un vincolo sulle velocita' dei punti quindi anolonomo. Qualche volta tale vincolo e' integrabile, cioe' da una relazione sulle coordinate di velocita' si deduce una relazione tra le coordinate di posizione come succede nel caso di un disco che rotola su una guida prestabilita, per es. l'asse $Ox$ di un riferimento cartesiano o una circonferenza fissa. (vedi testo pag.125-127).
Abbiamo detto che il moto di puro rotolamento si puo' avere in **presenza di attrito**. La reazione vincolare non e' normale al piano tangente alla superficie $\sigma$ ed e' completamente indeterminata. Cio' nonostante, se $S$ rotola senza strisciare su una superficie fissa il lavoro elementare compiuto dalla reazione vincolare $dL^v = (\underline{R}^v \cdot \underline{v}_\Omega + \underline{M}^v_\Omega \cdot \omega)dt = 0$ perche' $\underline{v}^S_\Omega = \underline{v}^\sigma_\Omega = 0$. Diverso e' il caso in cui $S$ rotola su una superficie mobile.

Se si hanno due corpi rigidi $S$ e $S'$ che rotolano senza strisciare uno sull'altro, la reazione vincolare e' una forza interna e il lavoro elementare compiuto dalle due forze interne, tenuto conto del vincolo di puro rotolamento $\underline{v}^S_\Omega = \underline{v}^{S'}_\Omega$ e' nullo.

Esercizio: mostrare che il vincolo di puro rotolamento di un disco che rotola senza strisciare su un piano senza essere vincolato ad una linea prefissata, e' un vincolo anolonomo. Viceversa se il disco rotola senza strisciare sull'asse $Ox$ ( p. es.), mantenendosi sempre in un piano, il vincolo e' integrabile e quindi olonomo.

4. In molti problemi che tratteremo considereremo **moti rigidi piani**. In questo caso, se $S$ e' libero, il grado di liberta' del sistema rigido e' 3 e le coordinate lagrangiane sono due coordinate di un punto solidale e un angolo che una direzione fissa forma con una solidale al corpo.

- Il vincolo di **cerniera cilindrica piana** fissa un punto di $S$ (e quindi le sue 2 coordinate) e non permette rotazioni al di fuori di quella attorno ad un asse passante per il punto fisso e ortogonale al piano. Il grado di liberta' e' uno e il moto e' rotatorio attorno ad un asse che passa per il punto fisso e ortogonale al piano. In assenza di attrito la reazione vincolare ha due componenti incognite nel piano e momento nullo rispetto al punto fisso.

- Mediante un **carrello** un punto $O$ di $S$ viene vincolato a scorrere su una retta $r$ del piano, lasciando libero il corpo rigido di ruotare attorno ad un asse ortogonale al piano. Il grado di liberta' e' due e le reazioni vincolari sono equivalenti ad un'unica forza applicata in $O$ e ortogonale ad $r$ (in assenza di attrito).

- Mediante **un pattino**, $S$ viene vincolato a scorrere su una retta $r$ del piano, impedendo le rotazioni. Il grado di liberta' e' uno e il moto e' traslatorio. In assenza di attrito le reazioni vincolari sono equivalenti ad un'unica forza applicata, ortogonale a $r$ se il corpo rigido e' bidimensionale; le reazioni sono equivalenti ad una forza ortogonale ad $r$ e ad una coppia di momento non nullo e ortogonale al piano, se il corpo e' ad una dimensione (per es un'asta).

Esercizio: In un piano verticale un disco omogeneo di massa $M$ e raggio $R$, rotola senza strisciare sull'asse $Ox$ di un riferimento cartesiano nel piano. Sul centro $C$ del disco agisce una forza elastica $-kOC$, $k > 0$. Determinare la velocita' angolare del disco, il suo moto e la reazione vincolare.

Esercizio: In un piano verticale una sbarra omogenea pesante $AB$ di lunghezza $l$ e massa $m$ ha l'estremo $A$ vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida $Ox$ orizzontale del piano, mentre l'estremo $B$ e' collegato all'asse $Ox$ con una molla attrattiva ideale di costante elastica $k > 0$ che si mantiene ad ogni istante verticale. Scelti come parametri lagrangiani l'ascissa $x$ di $A$ e l'angolo che la verticale forma con $AB$, si chiede di determinare le equazioni di moto, la reazione vincolare e gli eventuali integrali primi.

Esercizio: In un piano verticale una sbarra omogenea pesante $AB$ di lunghezza $l$ e massa $m$ ha l'estremo $A$ vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida $Oz$ verticale del piano, mentre l'estremo $B$ e' collegato al punto $O$, origine di un sistema di assi cartesiani nel piano, con una molla attrattiva ideale di costante elastica $k > 0$. Scelti come parametri lagrangiani l'ordinata $z$ di $A$ e l'angolo che la verticale forma con $AB$, si chiede di determinare le equazioni di moto, la reazione vincolare, le posizioni di equilibrio e il loro carattere.

Esercizio: In un piano verticale $\pi$, un'asta omogenea $AB$ di massa $m$ e lunghezza $2l$ puo' ruotare, senza attrito, attorno ad un asse ortogonale al piano passante per il suo baricentro $O$. Sia $Oxz$ un riferimento cartesiano ortogonale su tale piano. Sull'estremo $A$ dell'asta agisce una forza elastica $-kQA$, $k > 0$, essendo $Q$ un punto sull'asse $z$ posto a distanza $h$ dall'origine degli assi. Sull'estremo $B$ agisce una forza elastica di ugual costante $-kB^*B$, essendo $B^*$ la proiezione di $B$ sull'asse $z$.
Assunta come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta$ che l'asse $z$ forma con la sbarra, si chiede di scrivere l'equazione del moto usando la 2 equazione cardinale e ritrovarla dalla conservazione dell'energia meccanica. Determinare le posizioni di equilibrio e il loro carattere al variare del parametro $h/l$.

Esercizio ( d'esame). In un piano verticale $\pi$, un' asta omogenea $AB$ di massa $m$ e lunghezza $l$ ha gli estremi vincolati senza attrito a scorrere su una circonferenza fissa del piano di centro $O$ e raggio $R = \frac{l}{\sqrt{2}}$. Il baricentro $G$ dell'asta e' soggetto ad una forza elastica $-kG^*G$, $k > 0$, essendo $G^*$ la proiezione di $G$ sull'asse orizzontale $Ox$ di $\pi$, $k > 0$.
Assunta come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta$ che l'asse verticale forma con $OG$,
si chiede:

1) Calcolare le posizioni di equilibrio del sistema e determinarne il carattere.
2) Studiare qualitativamente il moto nel caso in cui $\frac{mg}{kl} = \frac{1}{4}$. Studiare le orbite nel piano delle fasi per $\theta \in (-\pi, \pi)$ e in particolare dire per quali valori delle condizioni iniziali si hanno orbite omocline, eterocline e periodiche.
3) Scrivere l'equazione di moto del sistema e calcolare la risultante delle reazioni vincolari nell'istante $\bar{t}$ in cui e' $\theta = \pi/2, \dot{\theta} = 0$

Soluzione:
Il sistema e' soggetto a 2 vincoli olonomi bilateri fissi, quindi $n = 1$. Il lavoro delle reazioni vincolari e' nullo

e il sistema e' conservativo

$$V(\theta) = \frac{1}{2}kG^*G^2 - mgz_G = \frac{1}{4}k\frac{l^2}{4}cos^2\theta - mg\frac{l}{2}cos\theta$$

essendo $||OG|| = \frac{l}{2}$. Le posizioni di equilibrio sono:

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi, \quad \theta_3 = arcos\lambda, \quad \theta_4 = -arcos\lambda$$

$\theta_3$ e $\theta_4$ esistono solo se $\lambda = \frac{2mg}{kl} < 1$.
$\theta_1$ e' stabile se $\frac{2mg}{kl} > 1$, cioe' se non esistono $\theta_3$ e $\theta_4$, queste ultime sono stabili quando esistono e $\theta_2$ e' sempre instabile.
Nel caso in cui $\frac{mg}{kl} = \frac{1}{4}$, esistono quattro posizioni di equilibrio, $\theta_3 = \pi/3$ e $\theta_4 = -\pi/3$. Il grafico della funzione $V(\theta)$ mostra che si hanno orbite periodiche per valori dell'energia meccanica $E$ tali che
$V(\pi/3) < E < V(\pi)$, $E \neq 0$; si hanno due orbite omocline per $E = 0$ con $\theta_0 \in [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$ e un' orbita eteroclina per $E = V(\pi)$.
Il moto e' rotatorio attorno ad un asse per $O$ perpendicolare al piano e l'energia cinetica e' data da ( applicando il teor. di Huygens oppure il teor. di Koening) $T = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2$.
Proiettando la seconda equazione cardinale con polo in $O$ sull'asse $Oy$ perpendicolare al piano si ottiene l'equazione pura di moto

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} = -mg\frac{l}{2}sen\theta + k\frac{l^2}{4}cos\theta sen\theta, \qquad \ddot{\theta}(\bar{t}) = -\frac{3}{2}\frac{g}{l}$$

e il valore di $\ddot{\theta}$ nell'istante $\bar{t}$.
Proiettando la prima equazione cardinale

$$m\underline{a}_G = m\underline{g} - kG^*G + \underline{R}^v$$

sugli assi del piano e calcolando i vari termini nell'istante $\bar{t}$, si ottengono le due componenti di $\underline{R}^v(\bar{t})$

$$R^v_x(\bar{t}) = 0, \quad R^v_z(\bar{t}) = -mg/4$$

Esercizio: In un piano verticale, un punto materiale di massa $m$, e' vincolato a scorrere senza attrito lungo l'ipotenusa $BC$ di una lamina $ABC$ omogenea di massa $M$, avente la forma di un triangolo rettangolo. La lamina puo' scorrere senza attrito su una guida orizzontale $Ox$ del piano secondo il cateto $AC$.
Sia $i = B\hat{C}A$ e $h = ||AB||$. si scelgano come parametri lagrangiani l'ascissa $x$ di $A$ e la distanza $s$ del punto da $B$.
Scrivere le equazioni di moto, determinare le reazioni vincolari agenti sul punto e sulla lamina e gli eventuali integrali primi.
Il sistema precedente non e' rigido, ma e' formato da una parte rigida ( la lamina) e da un punto materiale.