Formalismo lagrangiano

Spostamenti e velocita' virtuali; vincoli ideali o perfetti; principio di D'Alembert e principio dei lavori virtuali. Equazioni di Lagrange e stazionarieta' dell'energia potenziale come condizioni necessarie e sufficienti rispettivamente al moto e all'equilibrio di un sistema soggetto a vincoli ideali, bilateri e olonomi e a forze conservative. Espressione analitica dell'energia cinetica.
Integrali primi e loro significato fisico.

I precedenti argomenti sono trattati da pag. 149 a pag. 170 del libro di testo.

Piccole oscillazioni di un sistema ad n gradi di liberta' intorno a configurazioni di equilibrio stabile. (pag. 174-186 testo)

Iniziamo dallo studio piu' semplice delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile di un sistema ad un grado di liberta'.

Sia dato un sistema soggetto a vincoli olonomi bilateri ideali e fissi, ad un grado di liberta' e soggetto a forze conservative e sia q la variabile lagrangiana che descrive la sua posizione. La lagrangiana del sistema e' data da

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - V(q)$$

Sia $\bar{q}$ una posizione di equilibrio stabile e sia $V''(\bar{q}) > 0$. Notiamo che questa ipotesi non e' necessaria per la presenza di un minimo, ma lo e' perche' esistano i piccoli moti intorno a $\bar{q}$.
Poniamo $\eta = q - \bar{q}$ e $\dot{\eta} = \dot{q}$. Per valori di η e $\dot{\eta}$ sufficientemente piccoli, cioe' $q(t) \sim \bar{q}$ e $\dot{q} \sim 0$, il moto e' ben approssimato da quello descritto da una **lagrangiana ridotta** ottenuta dalla precedente sviluppando in serie di Taylor $T(q, \dot{q})$ e $V(q)$ limitando lo sviluppo ai termini del secondo ordine nella coppia $(q, \dot{q})$.
La lagrangiana ridotta e' data da

$$\tilde{L}(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2}a(\bar{q})\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}V''(\bar{q})\eta^2$$

L'equazione linearizzata di moto che si ottiene a partire dalla precedente lagrangiana quadratica nella coppia $(\eta, \dot{\eta})$ e'

$$a(\bar{q})\ddot{\eta} + V''(\bar{q})\eta = 0$$

che e' l'equazione di un moto armonico di periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{a(\bar{q})}{V''(\bar{q})}}$

Esercizio: Scrivere l'equazione delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile del pendolo matematico soggetto ad una forza elastica che richiama il punto verso la sua proiezione P^* sull'asse verticale di un riferimento cartesiano nel piano.

Prima di iniziare lo studio delle piccole oscillazioni di un sistema ad n gradi di liberta', riformuliamo il teorema di Dirichlet-Lagrange

Teorema di Dirichlet-Lagrange. Sia dato un sistema soggetto a vincoli olonomi bilateri ideali e fissi, ad n gradi di liberta' e soggetto a forze conservative di energia potenziale $V(q_1, ...q_n)$ di classe C^∞. Una posizione di equilibrio $\underline{\bar{q}} = (\bar{q}_1, ...\bar{q}_n)$ e' stabile se $\underline{\bar{q}}$ corrisponde ad un minimo isolato per l'energia potenziale.

La dimostrazione e' del tutto analoga a quella data nel caso di un sistema ad un grado di liberta'.

I seguenti argomenti sono trattati da pag 174 a pag 186 del libro di testo.

Ipotesi per la teoria delle piccole oscillazioni; Lagrangiana ridotta; equazioni che reggono i piccoli moti; soluzioni del tipo $\eta_k = A_k sen\omega t, \quad \eta_k = A_k cos\omega t$;
soluzioni del sistema di equazioni algebriche

$$(V - \lambda T)\underline{A} = 0, \quad \lambda = \omega^2$$

dove V e T indicano le matrici $n \times n$ di elementi V_{hk}, T_{hk} e $\underline{A}$ e' un vettore incognito di R^n.

Proposizione 1 (senza dimostrazione). Poiche' la matrice T e' reale, simmetrica e definita positiva e la matrice V e' reale e simmetrica, gli autovalori λ_i, $i = 1, ...n$ soluzioni del polinomio di grado n in λ $det(V - \lambda_i T) = 0$ sono reali.

Proposizione 2 (senza dimostrazione). Poiche' la matrice V e' definita positiva per ipotesi, gli autovalori λ_i, $i = 1, ...n$, sono positivi.

Definizione di "prodotto scalare nella metrica G".
Data una matrice G $n \times n$ definita positiva, si definisce "prodotto scalare nella metrica G" tra due vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ di R^n

$$(\underline{u}, \underline{v})_G = \Sigma_{hk} u_h G_{hk} v_k$$

un'applicazione di $R^n \times R^n$ in R che gode della proprieta' $(\underline{u}, \underline{u})_G \geq 0$, uguale a 0 se e solo se $\underline{u} = 0$.
Ne segue che, dati due vettori non nulli, ortogonali nella metrica G, ($\underline{u}, \underline{v})_G = 0$, essi sono linearmente indipendenti.

Proposizione 3 (senza dimostrazione). In corrispondenza ad ognuno degli autovalori λ_i, $i = 1, ..., n$, (non necessariamente distinti) e' possibile scegliere un autovettore $\underline{A}^{(i)}$ in modo tale che nell'insieme $(\underline{A}^{(1)}, ..., \underline{A}^{(n)})$ ogni coppia sia ortogonale nella metrica T.

$$(\underline{A}^{(i)}, \underline{A}^{(j)})_T = \Sigma_{hk} A_h^{(i)} T_{hk} A_k^{(j)} = 0, \quad i \neq j$$

Allora

$$\eta_k = A_k^{(i)} cos\omega_i t, \quad \eta_k = A_k^{(i)} sen\omega_i t$$

sono soluzioni delle equazioni di Lagrange (1) di cui l'integrale generale e' dato da

$$\eta_k(t) = \Sigma_{i=1}^n (a_i A_k^{(i)} cos\omega_i t + b_i A_k^{(i)} sen\omega_i t)$$

dove $a_i, b_i, i = 1.., n$ sono $2n$ costanti di integrazione.
Possiamo anche scrivere

$$\eta_k(t) = \Sigma_{i=1}^n c_i A_k^{(i)} cos(\omega_i t + \phi_i)$$

con

$$c_i cos\phi_i = a_i, \; -c_i sen\phi_i = b_i$$

$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ sono le pulsazioni proprie.

Modi normali (pag 182-184)

Esercizio: In un piano verticale, (O, x, y), un disco omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare su una sbarra AB omogenea di massa m e lunghezza $l > R$ la quale e' disposta lungo l'asse Ox del piano e trasla senza attrito su di esso. L'estremo A della sbarra e' soggetto ad una forza elastica $-kOA$, $k > 0$, e il centro C del disco ad una forza elastica $-kC^*C$,essendo C^* la proiezione di C sull'asse verticale Oy. Indicate con ξ l'ascissa di C e x l'ascissa di A, scrivere le equazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile e determinarne la soluzione.

Il sistema disco-sbarra ha due gradi di liberta' essendo presenti 4 vincoli olonomi bilateri:
$y_C = R$, $y_A = y_B = 0$, e il vincolo di puro rotolamento (interno) che e' integrabile.

$$\underline{v}_C = \dot{\xi}\underline{i} = \dot{x}\underline{i} + \underline{\omega} \wedge TC$$

da cui segue che la velocita' angolare del disco e' data da $\underline{\omega} = \frac{\dot{x} - \dot{\xi}}{R} \underline{k}$.

I vincoli sono ideali bilateri e fissi e le forze attive sono conservative di energia potenziale $V(x,\xi) = \frac{1}{2}k(x^2+\xi^2)$. Si vede facilmente che l'unica posizione di equilibrio $x=0, \xi=0$ e' stabile.
L'energia cinetica e' la somma dell'energia cinetica della sbarra $T_S = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ e del disco che si determina usando il teorema di Koning:

$$T_D = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}(\frac{\dot{x}-\dot{\xi}}{R})^2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - M\dot{x}\dot{\xi})$$

La lagrangiana ridotta coincide con la lagrangiana del sistema

$$\tilde{L} = L = T - V = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + m\dot{x}^2 - M\dot{x}\dot{\xi}) - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k\xi^2$$

e le equazioni dei piccoli moti sono

$$\frac{3}{2}M\ddot{\xi} - \frac{1}{2}M\ddot{x} + k\xi = 0, \quad \frac{1}{2}M\ddot{x} + m\ddot{x} - \frac{1}{2}M\ddot{\xi} + kx = 0 \tag{1}$$

Assumiamo $M = m$, ne segue che

$$T = \begin{pmatrix} \frac{3m}{2} & -\frac{m}{2} \\ -\frac{m}{2} & \frac{3m}{2} \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

e il polinomio di secondo grado in λ

$$det(V - \lambda T) = \begin{pmatrix} k - \lambda\frac{3m}{2} & \lambda\frac{m}{2} \\ \lambda\frac{m}{2} & k - \lambda\frac{3m}{2} \end{pmatrix} = 0$$

ha radici $\lambda_1 = k/m, \lambda_2 = k/2m$. Gli autovettori sono $\underline{A}^{(1)} = (c_1, c_1)$, $\underline{A}^{(2)} = (c_2, -c_2)$ e imponendo la normalizzazione nella metrica T $(\Sigma_{hk}A_h^{(i)}T_{hk}A_k^{(i)} = 1)$, si ottiene

$$c_1^2(3m/2 - m/2 - m/2 + 3m/2) = 1, \quad c_2^2(3m/2 + m/2 + m/2 + 3m/2) = 1$$

da cui le costanti $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}$, $c_2 = \frac{1}{2\sqrt{m}}$.
Le soluzioni delle equazioni del moto (1) sono date da:

$$x(t) = a_1\frac{1}{\sqrt{2m}}cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2\frac{1}{2\sqrt{m}}cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad \xi(t) = a_1\frac{1}{\sqrt{2m}}cos(\omega_1 t + \phi_1) - a_2\frac{1}{2\sqrt{m}}cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

dove a_i, ϕ_i, $i = 1, 2$ sono costanti di integrazione e $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{k/2m}$ sono dette pulsazioni proprie.
Le variabili ζ_i corrispondenti ai modi normali sono definite dalle relazioni

$$x = A_1^{(1)}\zeta_1 + A_1^{(2)}\zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\zeta_1 + \frac{1}{2\sqrt{m}}\zeta_2, \quad \xi = A_2^{(1)}\zeta_1 + A_2^{(2)}\zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\zeta_1 - \frac{1}{2\sqrt{m}}\zeta_2$$

Nelle nuove variabili la lagrangiana diviene

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\zeta}_1^2 + \dot{\zeta}_2^2) - \frac{1}{2}\frac{k}{m}\zeta_1^2 - \frac{1}{2}\frac{k}{2m}\zeta_2^2$$

Le equazioni di Lagrange sono disaccoppiate

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2\zeta_i = 0, \quad i = 1, 2$$

e l'integrale generale e' dato da

$$\zeta_1(t) = a_1 cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad \zeta_2(t) = a_2 cos(\omega_2 t + \phi_2)$$