Appunti
per il corso di Fisica Matematica

Settore di Ingegneria dell'Informazione
Anno accademico 2010–2011

Giancarlo Benettin

Queste note discendono dai vecchi "Appunti di Meccanica Razionale" scritti ormai molti anni fa in collaborazione con i colleghi Luigi Galgani e Antonio Giorgilli. Assieme all'annesso Eserciziario, sono tagliati sul corso di Fisica Matematica che ormai da diversi anni tengo a Padova per gli studenti di Ingegneria del settore di Ingegneria dell'Informazione. Il confronto con i vecchi appunti mostra che alcune parti sono state eliminate, altre sono state aggiunte, e anche le parti rimaste sono state ampiamente rielaborate. L'impianto tuttavia è rimasto lo stesso, e soprattutto è rimasto lo stesso lo spirito, che è lo spirito classico della Fisica Matematica: mantenersi fedeli al rigore del procedimento e del linguaggio matematico, dando allo stesso tempo enfasi al senso fisico del formalismo introdotto, nella convinzione che i due punti di vista (qui e in ogni sviluppo della Fisica Matematica, o forse della Fisica e della Matematica), ben lungi dall'ostacolarsi, si completano a vicenda e sono entrambi necessari per capire.

La rielaborazione delle note è permanente: ogni anno qualche cosa viene aggiunto o modificato, spesso su indicazione degli stessi studenti che segnalandomi inesattezze o difficoltà a comprendere mi hanno molto aiutato nel lavoro di revisione. Anche quest'anno conto sulla loro collaborazione: qualunque commento — dalla segnalazione degli errori sicuramente ancora presenti all'indicazione di quello che non è abbastanza chiaro e si potrebbe dire meglio — è molto gradito.

G. B. — a.a. 2010–2011

INDICE

Capitolo 1: Introduzione alla teoria qualitativa delle equazioni differenziali ordinarie

1.1. Considerazioni introduttive sulle equazioni differenziali ordinarie
- 1.1.1 *Esempi elementari*
- 1.1.2 *Esempi di forze dipendenti dalla velocità*
- 1.1.3 *Un esempio non meccanico: il sistema di Lotka–Volterra*

1.2. Risultati generali
- 1.2.1 *Il teorema di esistenza e unicità e il problema ai dati iniziali (o di Cauchy)*
- 1.2.2 *Equilibrio e stabilità*
- 1.2.3 *Costanti del moto e stabilità*
- 1.2.4 *Il teorema di Ljapunov*

1.3. Sistemi conservativi a un grado di libertà
- 1.3.1 *Il ritratto in fase per sistemi conservativi a un grado di libertà*
- 1.3.2 *Trattazione analitica completa*

1.4. Studio locale attorno ai punti singolari
- 1.4.1 *Linearizzazione delle equazioni in prossimità di un punto singolare*
- 1.4.2 *La classificazione dei punti singolari in* $\mathbb{R}^2$
- 1.4.3 *Il problema in* $\mathbb{R}^n$*; linearizzazione e stabilità*
- 1.4.4 *Ritratti in fase in* $\mathbb{R}^2$ *per sistemi non conservativi*
- 1.4.5 *Biforcazioni*

1.5. Il fenomeno del ciclo limite
- 1.5.1 *L'orologio meccanico*
- 1.5.2 *L'equazione di Van der Pol*
- 1.5.3 *La biforcazione di Hopf (cenno)*

1.6. Introduzione ai moti caotici
- 1.6.1 *Fenomenologia dei moti caotici*
- 1.6.2 *Considerazioni sui moti caotici*

Appendici al capitolo 1

A. Una funzione di Ljapunov per l'oscillatore armonico smorzato

B. Classificazione dei punti singolari: il caso di autovalori nulli o coincidenti

C. Complementi sull'equazione di Van der Pol
- C.1 *Una realizzazione elettrica di un'equazione di tipo Van der Pol*
- C.2 *Dimostrazione dell'esistenza di un ciclo limite per ogni* $\beta > 0$

D. Le oscillazioni forzate
- D.1 *L'oscillatore armonico con forzante sinusoidale*
- D.2 *Il caso smorzato*

Capitolo 2: Meccanica Lagrangiana

2.1. Introduzione
- 2.1.1 *Il punto materiale in coordinate arbitrarie*
- 2.1.2 *Il punto materiale vincolato*
- 2.1.3 *Moti relativi e vincoli mobili*

2.2. Sistemi eventualmente vincolati di N punti materiali
2.2.1 *Vincoli olonomi e coordinate libere*
2.2.2 *Vincoli anolonomi (cenno)*
2.2.3 *Vincoli ideali*
2.3. Energia cinetica, lavoro ed energia potenziale
2.3.1 *Energia cinetica*
2.3.2 *Forze, lavoro, energia potenziale*
2.4. Le equazioni di Lagrange
2.4.1 *Deduzione delle equazioni*
2.4.3 *Sistemi lagrangiani generali*
2.4.4 *Forma normale delle equazioni di Lagrange*
2.4.2 *Semplici esempi*
2.4.5 *Equazioni di Lagrange e corpi rigidi*
2.4.6 *Proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange*
2.5. Potenziali dipendenti dalla velocità
2.5.1 *La forza di Coriolis*
2.5.2 *La forza di Lorentz*
2.6. Leggi di conservazione in meccanica lagrangiana
2.6.1 *La conservazione dell'energia*
2.6.2 *Coordinate ignorabili e riduzione*
2.6.3 *Il Teorema di Noether*
2.7. Soluzioni di equilibrio, stabilità e piccole oscillazioni
2.7.1 *Equilibrio*
2.7.2 *Stabilità dell'equilibrio*
2.7.3 *Linearizzazione delle equazioni attorno a un punto di equilibrio*
2.7.4 *Modi normali di oscillazione e coordinate normali*
2.7.5 *Linearizzazione e stabilità*
2.7.6 *Non linearità e moti caotici*
2.8. I principi variazionali della meccanica
2.8.1 *Funzionali*
2.8.2 *Variazione di un funzionale*
2.8.3 *Stazionarietà di un funzionale ed equazione di Eulero-Lagrange*
2.8.4 *Il principio di Hamilton*

Appendici al Capitolo 2

A. Esempi di vincoli anolonomi
B. Equazioni cardinali, idealità del vincolo e equazioni di Lagrange per un corpo rigido
C. Stabilizzazione magnetica
D. La corda vibrante discreta
E. La brachistocrona

Capitolo 1

Introduzione alla teoria qualitativa delle equazioni differenziali ordinarie

1.1 Considerazioni introduttive sulle equazioni differenziali ordinarie

Richiamiamo qui, in modo non sistematico e basandoci su esempi tratti dalla meccanica, alcune nozioni di base riguardanti le equazioni differenziali ordinarie, utili anche al fine di precisare la nomenclatura e fissare alcune notazioni.

1.1.1 Esempi elementari

L'equazione di Newton $ma = F(x, v, t)$ per un sistema a un grado di libertà, tipicamente un punto di massa m su una retta, soggetto a forza F dipendente dalla posizione x, dalla velocità v e dal tempo t, è il più comune esempio (anzi, in un certo senso il prototipo) di equazione differenziale ordinaria. Usando la notazione $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ per le derivate prima e seconda di x rispetto al tempo, ovvero per la velocità e l'accelerazione, e dividendo tutta l'equazione per m in modo da eliminare una costante, l'equazione di Newton prende la forma

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \ , \qquad \text{ove} \quad f = F/m \ . \tag{1.1.1}$$

E' questa un'*equazione differenziale ordinaria del secondo ordine in forma normale:*

- *differenziale* perchè vi compaiono le derivate della funzione incognita x;
- *ordinaria* perchè c'è una sola variabile indipendente, il tempo t;
- *del secondo ordine* perchè la derivata di ordine più elevato è la derivata seconda;
- *in forma normale* perché è risolta rispetto alla derivata di ordine massimo.[1]

[1] L'equazione differenziale del primo ordine $\dot{x}^2 = x$ non è invece in forma normale. Estraendo la radice si trovano due equazioni in forma normale, $\dot{x} = \pm\sqrt{x}$, ma ci sono problemi in un intorno di $x = 0$ (non si applica il teorema di Cauchy, si veda più avanti al paragrafo 1.2.1).

L'incognita di un'equazione differenziale come la (1.1.1), ricordiamo, è una funzione $x = x(t)$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che in ambito meccanico è detta *movimento* (è la funzione che a ogni istante t assegna la posizione x del punto). Dire che $x(t)$ è soluzione vuol dire che risulta, *identicamente in t,*

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t), t) \ .$$

L'equazione del secondo ordine (1.1.1) è equivalente a una coppia di equazioni del primo ordine, precisamente

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases} , \tag{1.1.2}$$

per la coppia di variabili (x, v).

Vediamo subito alcune semplicissime equazioni con le rispettive soluzioni.

i) La particella libera (moto per inerzia)

$$\ddot{x} = 0 \ .$$

L'equazione è risolta da tutte e sole le funzioni con derivata seconda nulla, cioè dalle funzioni lineari

$$x(t) = at + b \ , \tag{1.1.3}$$

con a e b costanti arbitrarie.

ii) L'oscillatore armonico: F è la *forza elastica* $-kx$ $(k > 0)$, e corrispondentemente si ha

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \ , \qquad \omega^2 = k/m \ .$$

L'equazione è risolta da

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \ , \tag{1.1.4}$$

o equivalentemente[2] da

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

o ancora da

$$x(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t} \ .$$

iii) Il "repulsore armonico"

$$\ddot{x} = \omega^2 x \ ,$$

che descrive ad esempio un punto su una retta rotante con velocità angolare ω, soggetto alla sola forza centrifuga. La soluzione è

$$x(t) = ae^{\omega t} + be^{-\omega t} \ , \tag{1.1.5}$$

ancora con a e b arbitrarie.

Le equazioni che abbiamo scritto sono

– *lineari omogenee,* brevemente lineari (il secondo membro è funzione lineare omogenea della funzione incognita);

[2] L'insieme delle funzioni, scritte in un modo o nell'altro, è identico: basta fare la corrispondenza $a = A \cos \varphi$, $b = -A \sin \varphi$, oppure $a = C + D$, $b = i(C - D)$.

– *autonome*[3] (non c'è dipendenza esplicita da t);
– *posizionali* (il secondo membro non dipende dalla velocità $\dot{x}$).

Nelle soluzioni che abbiamo scritto compaiono sempre due *costanti arbitrarie:* ciò vuol dire che le soluzioni soddisfano l'equazione (sono appunto soluzioni) per ogni scelta delle costanti che vi compaiono. L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale è detto *integrale generale;* l'integrale generale di un'equazione di ordine r contiene sempre un numero di costanti arbitrarie pari a r. Le (1.1.3)–(1.1.5) costituiscono l'integrale generale delle rispettive equazioni. Per ogni scelta delle costanti arbitrarie si ha una *soluzione particolare.*

Le equazioni differenziali lineari omogenee godono della proprietà fondamentale, nota come *principio di sovrapposizione,* che la combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione. L'integrale generale si può allora sempre scrivere come combinazione lineare di un numero di soluzioni particolari indipendenti pari all'ordine dell'equazione, come appunto mostrano le (1.1.3)–(1.1.5).

Aggiungendo a un'equazione lineare omogenea un termine costante si ottiene un'equazione lineare *non omogenea;* l'integrale generale si ottiene allora sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea associata una (qualsiasi) soluzione particolare. Così l'equazione $\ddot{x} = -g$ (punto materiale in caduta libera) ha la soluzione particolare $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ e corrispondentemente l'integrale generale è $x(t) = at + b - \frac{1}{2}gt^2$, mentre l'equazione $\ddot{x} = -\omega^2 x - g$ (oscillatore armonico pesante) ha la soluzione particolare costante $x(t) = -g/\omega^2$ e l'integrale generale è $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t - g/\omega^2$.

Un esempio classico di equazione non lineare (autonoma, posizionale) è

iv) il *pendolo*,
$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$$
($\omega^2 = g/l$, dove g è l'accelerazione di gravità e l la lunghezza del pendolo), il cui integrale generale non si scrive in termini di funzioni elementari ma richiede le cosiddette funzioni ellittiche.[4]

Il pendolo ha due soluzioni costanti, $x(t) = 0$ e $x(t) = \pi$; per x prossimo a 0, ricordando che $\sin x = x + \mathcal{O}(x^3)$, si vede che l'equazione è ben approssimata dall'equazione dell'oscillatore armonico $\ddot{x} = -\omega^2 x$; per x prossimo a π, diciamo $x = \pi + x'$ con x' piccolo, l'equazione è similmente approssimata da quella del repulsore armonico $\ddot{x}' = +\omega^2 x'$, che per questo è anche detto *pendolo rivoltato.* E' tipico dei sistemi non lineari l'assomigliare, in regioni diverse, a sistemi lineari diversi.

- Qui si apre una questione tra le più interessanti: fino a che punto equazioni simili hanno soluzioni simili? Fino a che punto (per che tempi, guardando a quali variabili...) piccole modifiche all'equazione (come il passaggio da x a $\sin x$) producono soltanto piccole diversità nella soluzione? E' un problema difficile ma di fondamentele importanza: qualunque studio si faccia, qualunque equazione differenziale si consideri, si tratta sempre di un modello semplificato, e dunque approssimato, della realtà fisica che si vorrebbe studiare. E' cruciale pertando capire, tutte le volte che si può, quali sono i limiti di validità delle deduzioni che si fanno, quanto sono "robusti" i risultati che si ottengono. E' un punto di vista che, nei limiti del

[3] Le equazioni autonome sono talvolta chiamate "temporalmente invarianti".

[4] Si tratta di particolari funzioni definite come integrali di opportune funzioni elementari; per il pendolo interviene la funzione (si veda al paragrafo 1.3.2)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E + \omega^2 \cos x}}\ ,$$
che (per $E \neq \omega^2$) non ammette scrittura più semplice.

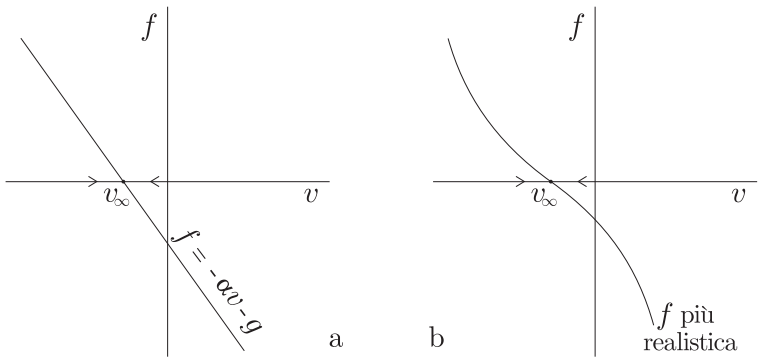

Figura 1.1: *Il fenomeno della velocità limite: spiegazione qualitativa*

possibile, terremo sempre presente, e che in un certo senso è l'anima dello studio qualitativo. Il problema sollevato è detto di *stabilità strutturale.*

1.1.2 Esempi di forze dipendenti dalla velocità

Il caso più semplice di forza dipendente dalla velocità è quello dell'attrito viscoso, con forza lineare $-w\dot{x}$ ($w > 0$) che si aggiunge alla forza posizionale; il corrispondente termine a secondo membro dell'equazione del moto è $-\alpha\dot{x}$, $\alpha = w/m$. Aggiungendo tale forza ad esempio alla caduta dei gravi si ottiene

v) la *caduta frenata*,

$$\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - g \ . \tag{1.1.6}$$

Questa è una falsa equazione del secondo ordine, potendosi scrivere come equazione del primo ordine

$$\dot{v} = -\alpha v - g \tag{1.1.7}$$

per la velocità $v = \dot{x}$. La soluzione della (1.1.7) è immediata: $v(t) = v_\infty + ce^{-\alpha t}$, con $v_\infty = -g/\alpha$ velocità asintotica, o velocità limite, e c costante arbitraria. Per integrazione di $\dot{x} = v(t)$ si ottiene subito l'integrale generale delle (1.1.6) nella forma $x(t) = v_\infty t + ae^{-\alpha t} + b$, con a e b costanti arbitrarie ($a = -c/\alpha$).

La soluzione della (1.1.7), in particolare la convergenza di $v(t)$ per t grande alla velocità limite v_∞, si comprende bene osservando la figura 1.1a, ove il secondo membro della (1.1.7), $f(v) = -\alpha v - g$, è riportato in funzione di v; in questo caso semplice si tratta evidentemente di una retta. La velocità limite è lo zero di $f(v)$, e si vede bene dal grafico che per $v < v_\infty$ si ha $f(v) > 0$, dunque v cresce, e viceversa si ha $f(v) < 0$, ovvero v cala, per $v > v_\infty$; si vedano le frecce. Se ne deduce immediatamente che ogni soluzione $v(t)$ tende monotonamente a v_∞ per $t \to \infty$.[5] La spiegazione è solo qualitativa. Ma ha il *grande* vantaggio di essere "robusta", ovvero valida per $f(v)$ ben più generale dell'esempio, idealizzato e poco realistico, della retta, ad esempio per la curva disegnata in figura 1.1b.

Aggiungendo invece l'attrito viscoso all'oscillatore armonico si trova

[5] Se ne dia una prova formale, sfruttando il fatto che le funzioni monotone limitate ammettono limite.

vi) l'*oscillatore armonico smorzato*

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0 \ , \qquad \mu = \tfrac{1}{2}\alpha \ .$$

L'integrale generale si scrive[6] in modo diverso a seconda che sia $\mu > \omega$:

$$x(t) = ae^{-\mu_1 t} + be^{-\mu_2 t} \ , \qquad \mu_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} > 0 \ ,$$

("grande smorzamento"; $x(t) \to 0$ con segno definito) oppure $\mu < \omega$:

$$x(t) = e^{-\mu t}(a\cos\sigma t + b\sin\sigma t) \ , \qquad \sigma = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} > 0 \ ,$$

("debole smorzamento"; per t comunque grande $x(t)$ oscilla) o infine $\mu = \omega$ ("smorzamento critico"):

$$x(t) = (a + bt)e^{-\mu t} \ .$$

In questi esempi la forza di attrito è sempre di segno contrario a quello della velocità e quindi tende a smorzare il moto. Può anche considerarsi formalmente il caso di "attrito negativo" $\ddot{x} - 2\mu\dot{x} + \omega x = 0$, $\mu > 0$, in cui l'ampiezza del moto viene esaltata anziché smorzata; tale idealizzazione si può utilizzare per rappresentare delle situazioni in cui viene compiuto dall'esterno del lavoro sul sistema. Un caso importante di coesistenza di attrito positivo e negativo in un'equazione non lineare è quello dell'*equazione di Van der Pol*, che studieremo nel paragrafo 1.5.2.

- *Riduzione adimensionale.* E' a volte utile ridurre i parametri presenti in una equazione, tramite l'introduzione di unità di misura adattate all'equazione studiata. Ad esempio, se introduciamo al posto di t la variabile adimensionale $\tau = \omega t$, allora si ha $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$; indicando ancora con un punto la derivata rispetto a τ, l'equazione dell'oscillatore armonico prende allora la forma adimensionale $\ddot{x} = -x$, priva di costanti, mentre per l'oscillatore armonico smorzato otteniamo $\ddot{x} = -2\beta\dot{x} - x$, ove compare la sola costante adimensionale $\beta = \mu/\omega$. La possibilità di eliminare ogni costante nell'equazione dell'oscillatore armonico sta a significare che tutti gli oscillatori armonici si identificano, se osservati ciascuno sulla sua propria scala di tempo. Ciò non si può dire per l'oscillatore smorzato: oscillatori con β diverso sono sostanzialmente diversi (si pensi alla differenza tra i casi di debole smorzamento, $\beta < 1$, e grande smorzamento, $\beta > 1$). Il procedimento di riduzione delle costanti si può eseguire su qualunque equazione, fino a che non vi restano che costanti adimensionali. La versione completamente adimensionale delle equazioni va tuttavia usata ove è veramente utile, e non ovunque per principio: trattazioni troppo adimensionali perdono a volte la trasparenza fisica.

1.1.3 Un esempio non meccanico: il sistema di Lotka–Volterra

Allarghiamo ora un poco il nostro orizzonte introducendo esempi semplici di tipo non meccanico, tratti dal campo affascinante della dinamica delle popolazioni. Cominciamo dall'elementare equazione lineare del primo ordine

$$\dot{x} = \alpha x \ , \tag{1.1.8}$$

[6] La deduzione è facile per $\mu \neq \omega$: cerchiamo soluzioni particolari della forma $x(t) = e^{\lambda t}$; deve essere allora $(\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$, ovvero $\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2 = 0$, $\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$, e si trovano così due soluzioni particolari. Per combinazione lineare si ha direttamente l'espressione data nel testo nel caso di grande smorzamento. Nel caso di piccolo smorzamento si trova invece $x(t) = e^{-\mu t}(Ce^{i\sigma t} + \bar{C}e^{-i\sigma t})$, che si riduce immediatamente alla forma data nel testo attraverso le formule di Eulero $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$. Nel caso critico $\mu = \omega$ si verifica subito che una soluzione particolare è $x(t) = te^{-\mu t}$, sicché la soluzione generale è $x(t) = e^{-\mu t}(a + bt)$.

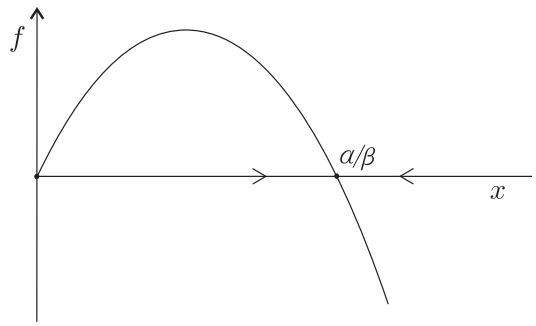

Figura 1.2: *La crescita malthusiana modificata*

che per $\alpha > 0$ rappresenta la crescita nel tempo di una popolazione il cui ritmo di crescita sia proporzionale alla popolazione stessa; per $\alpha < 0$ rappresenta invece, ad esempio, il decadimento radioattivo. La soluzione è esponenziale, $x(t) = ae^{\alpha t}$ (crescita "malthusiana", dal nome dell'economista inglese Malthus, fine '700). Un modello un po' più realistico per la crescita di una singola popolazione è

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2 \ , \qquad \alpha \, , \, \beta \, > 0 \tag{1.1.9}$$

(se gli individui diventano troppi si ostacolano). Senza bisogno di scrivere esplicitamente la soluzione,[7] si comprende subito il comportamento qualitativo del sistema: si vede infatti immediatamente che esiste la soluzione stazionaria $x(t) = \alpha/\beta$ (oltre naturalmente alla soluzione banale $x(t) = 0$), e che x cresce se è compreso tra zero e α/β, mentre cala se maggiore di α/β; se ne deduce facilmente, come si è fatto sopra per la caduta frenata, che (per ogni dato iniziale positivo) la soluzione $x(t)$ tende a α/β per $t \to \infty$. Si veda la figura 1.2.

Esercizio 1 *Più in generale, come deve essere fatta f nell'equazione $\dot{x} = f(x)$ perchè si abbia un comportamento simile? Che comportamento qualitativo si otterrebbe invece se f attraversasse più volte l'asse delle x? E se avesse un punto di tangenza?*

Sistemi più interessanti si trovano considerando almeno due popolazioni che interagiscono tra loro. Un sistema importante (anche storicamente) è il *modello di Lotka–Volterra* (1930 circa)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \ . \tag{1.1.10}$$

L'interpretazione classica è la seguente. In un ambiente chiuso vi sono due popolazioni, prede e predatori, rispettivamente in quantità x e y. Le prede hanno a disposizione cibo in abbondanza, e in assenza di predatori crescerebbero in modo malthusiano, $x(t) = ae^{\alpha t}$; i predatori si nutrono delle prede e in assenza di esse si estinguerebbero con decremento esponenziale, $y(t) = be^{-\gamma t}$. L'incontro tra prede e predatori, la cui frequenza è proporzionale sia a x che a y, produce una crescita di y e una decrescita di x, con ritmo (efficacia dell'incontro nel far comparire o scomparire un nuovo individuo) dato dalle costanti β e δ.

Non è possibile scrivere una soluzione esplicita in termini di funzioni elementari. Ma si trovano subito due soluzioni particolari: una, banale, è $x(t) = y(t) = 0$; l'altra, anch'essa costante, è

$$x(t) = \gamma/\delta \ , \qquad y(t) = \alpha/\beta \ .$$

[7] Che peraltro si trova facilmente: separando le variabili si ha $\mathrm{d}x/(\alpha x - \beta x^2) = \mathrm{d}t$; integrando si trova $x(t) = \alpha/(\beta + ae^{-\alpha t})$, con a costante arbitraria.

Vedremo più avanti che ogni altra soluzione, con x e y entrambi positivi, è oscillante nel tempo, con massimi e minimi sfasati per le due variabili (come era stato osservato empiricamente da un conoscente di Volterra su dati di pesca nell'Adriatico). Il modello è stato usato anche in economia.

1.2 Risultati generali

Dopo aver preso familiarità con le equazioni differenziali attraverso semplici esempi, cominciamo qui uno studio più sistematico. Ci riferiremo a una una generica equazione differenziale del primo ordine (o sistema del primo ordine) in $\mathbb{R}^n$, più precisamente in un qualche dominio aperto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, che per il momento supponiamo autonoma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \ , \qquad \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n \ . \tag{1.2.1}$$

La mappa $\mathbf{f}$ che a ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ assegna il vettore $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ è detta *campo vettoriale.* La (1.2.1) comprende in particolare il caso meccanico (1.1.1) o (1.1.2) considerato sopra, che si ha per

$$n = 2 \ , \qquad \mathbf{x} = (x, v) \ , \qquad \mathbf{f}(x, v) = (v, f(x))$$

(si ponga attenzione alla differenza tra tra $\mathbf{x}$ e x, e tra $\mathbf{f}$ e f). L'aperto $\mathcal{D}$ ove si svolge il moto è detto spesso *spazio delle fasi* del sistema, *piano di fase* per $n = 2$.

1.2.1 Il teorema di esistenza e unicità e il problema ai dati iniziali (o di Cauchy)

Per l'equazione (1.2.1) vale innanzitutto, in ipotesi debolissime di regolarità di $\mathbf{f}$, il fondamentale *teorema di esistenza e unicità,* o *teorema di Cauchy:*

Proposizione 1 *Se* $\mathbf{f}$ *è localmente lipshitziana*[8] *in* $\mathcal{D}$*, allora per ogni* $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ *esistono un intervallo* (τ_0, τ_1)*,* $\tau_0 < 0 < \tau_1$*, e un'unica soluzione* $\mathbf{x}(t)$ *dell'equazione, definita per* $t \in (\tau_0, \tau_1)$*, tale che sia* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$*.*

Il problema di determinare la soluzione di un'equazione differenziale che soddisfi una assegnata condizione iniziale è detto *problema di Cauchy;* il teorema di Cauchy dice dunque che sotto la sola ipotesi che $\mathbf{f}$ sia lipshitziana il problema di Cauchy ammette sempre una e una sola soluzione.

- Per una data equazione si possono porre, oltre al problema di Cauchy, altri problemi (spesso più interessanti sul piano pratico): ad esempio, restando alla meccanica, la determinazione della velocità iniziale v_0 tale che sia $x(0) = x_0$ e $x(t_1) = x_1$ assegnato (*problema di Sturm–Liouville*). Un altro problema ancora si ha in balistica, ove si cerca l'alzo da dare al tiro (con posizione iniziale e modulo della velocità assegnati) perché il proiettile colpisca (non importa quando) un punto assegnato. E' bene tener presente la distinzione tra *equazione,* della quale si cercano in linea di principio tutte le soluzioni, e *problema,* ovvero ricerca delle soluzioni di un'equazione che soddisfino a particolari caratteristiche. Problemi diversi dal problema di Cauchy non hanno sempre soluzione, e generalmente quando hanno soluzione questa non è unica. E' un argomento che non approfondiremo.

[8] Ricordiamo che $\mathbf{f}$ si dice localmente lipshitziana se esiste $\lambda > 0$ (*costante di Lipshitz*) tale che per ogni coppia $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}$ con $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ sufficientemente piccolo si ha $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$; per questo è sufficiente che $\mathbf{f}$ sia di classe C^1. Non è lipshitziana ad esempio, in $\mathbb{R}^1$, $f(x) = \sqrt{(x)}$.

Una conseguenza del teorema di Cauchy è che si possono sempre etichettare in modo univoco le soluzioni dell'equazione (1.2.1) con il dato iniziale $\mathbf{x}_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})$. In questo modo si vede che l'insieme delle soluzioni dell'equazione (l'integrale generale) contiene sempre esattamente n costanti arbitrarie, e anzi come costanti arbitrarie si possono sempre prendere, volendo, le n componenti del dato iniziale. Così per l'oscillatore armonico, facendo riferimento al dato iniziale $\mathbf{x}_0 = (x_0, v_0)$, l'integrale generale si scrive (esplicitando anche la velocità)

$$x(t, x_0, v_0) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \ , \qquad v(t, x_0, v_0) = -\omega x_0 \sin \omega t + v_0 \cos \omega t \ ,$$

mentre per il repulsore armonico si ha

$$x(t, x_0, v_0) = \tfrac{x_0 + v_0/\omega}{2} e^{\omega t} + \tfrac{x_0 - v_0/\omega}{2} e^{-\omega t} \ , \qquad v(t, x_0, v_0) = \tfrac{\omega x_0 + v_0}{2} e^{\omega t} - \tfrac{\omega x_0 - v_0}{2} e^{-\omega t} \ .$$

Una notazione comoda per la soluzione dell'equazione (1.2.1) con dato iniziale $\mathbf{x}_0$ è $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$.

- L'intervallo di definizione della soluzione (τ_0, τ_1) dipende in generale da $\mathbf{x}_0$. Per ogni $\mathbf{x}_0$ si può sempre supporre che l'intervallo sia massimale, ovvero che per $t = \tau_0$ e $t = \tau_1$ la soluzione $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ esca dal dominio di definizione $\mathcal{D}$ dell'equazione (altrimenti, si veda un testo di analisi, l'intervallo (τ_0, τ_1) è prolungabile). In molti casi interessanti l'intervallo di definizione della soluzione è tutto $\mathbb{R}$. Sotto opportune ipotesi[9] che qui non approfondiremo — ad esempio, che risulti ovunque $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| < c_0 + c_1 \|\mathbf{x}\|$ per qualche scelta delle costanti c_0 e c_1, oppure che vi sia una costante del moto che obbliga $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ a restare limitato (si veda oltre) — ciò effettivamente avviene. *Supporremo di regola, senza farne esplicita menzione, di trovarci in questa situazione.*

Supponiamo dunque che la soluzione sia definita, in corrispondenza a ogni $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. In questo caso torna utile la notazione $\Phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, che invita a pensare la soluzione a ogni t fissato come a una mappa $\Phi^t : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. L'insieme delle mappe

$$\Phi = \left\{ \Phi^t \ , \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

è detto *flusso;* l'immagine buona è proprio quello di un fluido che scorre nello spazio delle fasi, in regime stazionario. Oltre che singoli punti, si può pensare di portare avanti con Φ^t anche insiemi di punti (ad esempio volumi dello spazio delle fasi); una buona notazione per l'evoluto al tempo t dell'insieme $A \subset \mathcal{D}$ è $\Phi^t(A) = \cup_{\mathbf{x} \in A} \Phi^t(\mathbf{x})$.

E' bene distinguere tra *movimento,* ovvero una qualunque soluzione particolare $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ dell'equazione, e *traiettoria,* o *orbita,* che è una curva immersa in $\mathcal{D}$, precisamente l'immagine dell'aplicazione $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathcal{D}$ (è l'oggetto geometrico, senza riguardo al tempo di percorrenza). Grazie al fatto che l'equazione (1.2.1) è autonoma, se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione particolare lo è anche $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t + t_0)$ per ogni t_0; in sostanza la medesima traiettoria fa da supporto a infiniti movimenti sfasati nel tempo, che hanno come dato iniziale un punto qualsiasi della traiettoria. Ne segue una *importante* proprietà, naturale corollario del teorema di Cauchy:

Corollario 2 *Traiettorie diverse di un sistema autonomo non possono mai intersecarsi.*

[9] Vale la pena di osservare che perché la soluzione sia definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ non basta supporre che $\mathcal{D}$, ad esempio, coincida con $\mathbb{R}^n$, cosicché non vi sia bordo: la xoluzione $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ potrebbe andare all'infinito in un tempo finito. Lo si vede con un facile esempio in $\mathbb{R}^1$, precisamente l'equazione $\dot{x} = 1 + x^2$, che è risolta da $x(t, x_0) = \tan(t + c)$, $c = \arctan x_0$; la soluzione va con evidenza all'infinito per $t + c = \pm\pi/2$.

Dimostrazione. Se due traiettorie diverse si intersecassero in $\bar{\mathbf{x}}$, esisterebbero due diversi movimenti con il medesimo dato iniziale $\bar{\mathbf{x}}$, e ciò è in conflitto con il teorema di Cauchy nella parte di unicità della soluzione. □

- Una facile proprietà delle equazioni differenziali autonome è che per ogni t e s in $\mathbb{R}$ si ha
$$\Phi^{t+s}(\mathbf{x}) = \Phi^t(\Phi^s(\mathbf{x})) = \Phi^s(\Phi^t(\mathbf{x})) \ ,$$
o in altra notazione
$$\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^s \circ \Phi^t \ .$$
Questa relazione, assieme a $\Phi^0 =$ identità e a $(\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t}$, mostra che *il flusso* Φ *di un'equazione differenziale autonoma è un gruppo commutativo a un parametro.*

- L'ipotesi che $\mathbf{f}$ sia lipshitziana è essenziale per l'unicità. Ad esempio l'equazione in $\mathbb{R}^1$ $\dot{x} = \sqrt{x}$, con dato iniziale $x_0 = 0$, è risolta da $x(t) = 0$, ma anche da $x(t) = \frac{1}{4}t^2$, o da $x(t) = 0$ per $t \leq s$, $x(t) = \frac{1}{4}(t-s)^2$ per $t > s$.

Nelle stesse ipotesi del teorema di Cauchy si dimostra un altro teorema di grande importanza, che assicura *a ogni tempo t fissato* la regolarità della soluzione al variare del dato iniziale $\mathbf{x}_0$.

Proposizione 3 *Si consideri l'equazione differenziale* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. *La soluzione* $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ per ogni t fissato *è funzione regolare del dato iniziale* $\mathbf{x}_0$*, con la stessa classe di regolarità di* $\mathbf{f}$. *Esistono in particolare costanti* $C, \lambda > 0$ *tali che*
$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0') - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| < C \, \|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\| \, e^{\lambda|t|} \ . \tag{1.2.2}$$

La (1.2.2) implica la continuità della soluzione in $\mathbf{x}_0$ e in un certo senso la quantifica.

Di frequente si trovano equazioni che contengono parametri, ad esempio la frequenza nell'oscillatore armonico o il coefficiente dell'attrito viscoso nei sistemi smorzati. La proposizione appena enunciata sulla dipendenza regolare della soluzione dal dato iniziale si estende immediatamente alla dipendenza dai parametri.

Proposizione 4 *Si consideri il sistema*
$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$
dipendente dai parametri $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \geq 1$. *La soluzione* $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ per ogni t fissato *è funzione regolare di* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$*, con la stessa classe di regolarità di* $\mathbf{f}$.

Dimostrazione. Si può sempre pensare di estendere il sistema a $\mathbb{R}^{n+k}$, considerando anche $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ come variabili, aggiungendo le equazioni del moto banali $\dot{\alpha}_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$. La dipendenza regolare dai dati iniziali nel sistema allargato si traduce allora nella dipendenza regolare dai parametri nel sistema ristretto. □

Si osservi, ed è un fatto di grande importanza, che la regolarità, in particolare la continuità, valgono a ogni tempo t fissato ma, come mostra la (1.2.2), *non c'è alcuna uniformità in t:* anzi, nei limiti in cui la stima (1.2.2) è ottimale, la perdita di uniformità al crescere di t è rapidissima, esponenziale. In particolare, *è impensabile pretendere che un eventuale comportamento asintotico della soluzione per $t \to \infty$ mantenga la continuità al variare del dato iniziale o di un parametro.* Un esempio istruttivo è il caso dell'oscillatore armonico smorzato: per ogni $\mu > 0$ si ha $x(t) \to 0$ per $t \to \infty$, mentre per $\mu = 0$ il comportamento asintotico è diverso, e non si ha nessuna continuità.

Esercizio 2 *Si mostri che per l'equazione (1.1.8) e per il repulsore armonico la stima esponenziale (1.2.2) non è migliorabile. Si mostri invece che per l'oscillatore armonico si può dare una stima addirittura uniforme in t.*

- Il teorema di Cauchy è alla base del ben noto *determinismo* della meccanica classica: il dato iniziale determina in modo univoco il passato e il futuro di un sistema retto da un'equazione differenziale come la (1.2.1), ovvero tutto è prevedibile, in linea di principio, quando siano noti *esattamente* l'equazione del moto e le condizioni iniziali.

  Va detto con chiarezza che questa radiosa visione, pur corretta, è alquanto ingenua se non addirittura fuorviante. Per capire, consideriamo un pendolo di lunghezza $l = 0.1\,\mathrm{m}$, cosicché $\omega = \sqrt{g/l} \simeq 10\,\mathrm{rad/sec}$. In corrispondenza al dato iniziale $(x_0, v_0) = (\pi, 0)$ si ha la soluzione stazionaria $(x(t), v(t)) = (\pi, 0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$: il pendolo cioè, messo "a rovescio" *esattamente* in π con velocità *esattamente* nulla, se ne sta lì fermo per sempre. Supponiamo ora di sbagliare di poco la posizione iniziale, cioè di avere $x_0 = \pi + x_0'$ con x_0' piccolo ma non nullo; per semplicità continuiamo invece a supporre $v_0 = 0$. Dopo quanto tempo il moto si discosta da π di una quantità prefissata X, non piccola? Accettiamo per buona la linearizzazione dell'equazione attorno a $x = \pi$, confondendo così il pendolo col corrispondente repulsore armonico $\ddot{x}' = +\omega^2 x'$; la soluzione (per velocità iniziale nulla) è allora
$$x'(t) = \tfrac{1}{2}x_0'(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = \tfrac{1}{2}x_0' e^{\omega t}(1 + e^{-2\omega t}) \ .$$
  Trascurando (per t positivo) il termine $e^{-2\omega t} \ll 1$, si ottiene per il "tempo di caduta" fino a X l'espressione
$$T(x_0', X) = \frac{1}{\omega} \log \frac{2X}{x_0'} \ . \tag{1.2.3}$$
  Poniamo ad esempio, per fissare le idee, $X = 0.5\,\mathrm{rad}$. Per $x_0' = 10^{-3}\,\mathrm{rad}$ (0.1 mm dal punto di equilibrio) si trova allora $T \simeq 0.7\,\mathrm{sec}$. Per $x_0' = 10^{-6}\,\mathrm{rad}$ (0.1 μm dall'equilibrio) il tempo semplicemente raddoppia, $T \simeq 1.4\,\mathrm{sec}$. Per il valore, fisicamente ridicolo, $x_0' = 10^{-12}\,\mathrm{rad}$ (distanza dall'equilibrio di molto inferiore a un diametro atomico) il tempo si limita ancora a raddoppiare, $T \simeq 2.8\,\mathrm{sec}$. Il limite al determinismo è evidente: per avere una capacità di previsione di neanche tre secondi, dovremmo saper distinguere dati iniziali che distano tra loro 10^{-12} rad; viceversa, se abbiamo un'incertezza di soli 10^{-12} rad nel dato iniziale, ecco che già dopo tre secondi la nostra capacità di previsione è terminata (il pendolo cade a destra? A sinistra? Resta fermo?). Questo esempio non è eccezionale ma tipico, come si vedrà più avanti. Il meccanismo, si osservi, è del tutto elementare: tutto si deve alla presenza del logaritmo nella (1.2.3), che a sua volta proviene dagli esponenziali nella soluzione. C'è da aspettarsi una cosa simile ogni volta in cui la (1.2.2) è ottimale, cioè davvero dati iniziali vicini danno luogo a traiettorie che si allontanano a ritmo esponenziale. In questa situazione, dopo molti "tempi propri" $1/\lambda$ (molti decimi di secondo = pochi secondi, nell'esempio del pendolo) il determinismo, pur valido in linea di principio, di fatto viene meno. Ritorneremo su questo punto quando piu' avanti accenneremo ai *moti caotici.*

Concludiamo il paragrafo con qualche riflessione sul caso *non autonomo*
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \ , \qquad \mathbf{f} : \mathcal{D} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ ,$$
fino ad ora trascurato. L'equazione si può sempre rendere autonoma passando allo spazio allargato a $n+1$ variabili: basta infatti considerare il sistema
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, s) \\ \dot{s} = 1 \end{cases} \ ,$$

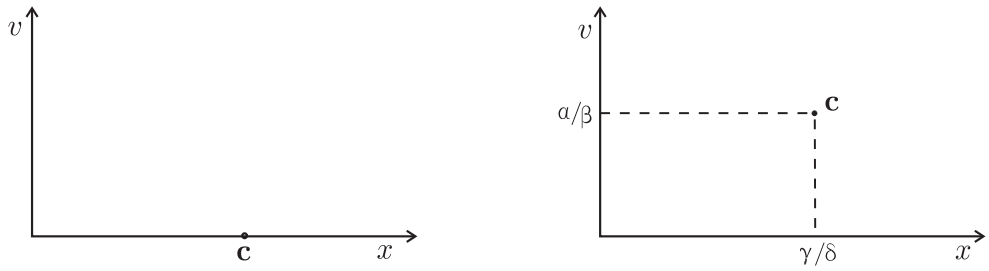

Figura 1.3: *Posizione dei punti di equilibrio nei sistemi meccanici (sinistra) e nel sistema di Lotka–Volterra (destra).*

con dato iniziale completato da $s_0 = 0$ cosicché $s(t) = t$. E' un punto di vista non obbligatorio, ma utile, perché invita a considerare, come dominio in cui si svolge il moto, non $\mathcal{D}$ ma $\mathcal{D}_{\text{ext}} = \mathcal{D} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Si estendono naturalmente ai sistemi non autonomi il teorema di esistenza e unicità, così come la dipendenza regolare dal dato iniziale e dai parametri. Quanto alla proprietà che traiettorie diverse non si intersecano, questa è verificata in $\mathcal{D}_{\text{ext}}$ ma in generale non in $\mathcal{D}$: in $\mathcal{D}$ le traiettorie, o meglio le loro proiezioni da $\mathcal{D}_{\text{ext}}$ a $\mathcal{D}$, si possono intersecare (moti diversi non possono però passare nello stesso punto di $\mathcal{D}$ allo stesso istante).

Esercizio 3 *Si scriva la soluzione, come funzione di t e del dato iniziale, per l'oscillatore armonico debolmente smorzato; si esegua poi il limite $\mu \to 0$, mostrando che* a ogni t fissato *si riottiene la soluzione dell'oscillatore armonico non smorzato con il medesimo dato iniziale.*

1.2.2 Equilibrio e stabilità

Consideriamo un sistema autonomo retto dall'equazione differenziale (1.2.1) nel dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.

Definizione 1 *Il punto $\mathbf{c} \in \mathcal{D}$ si dice* punto di equilibrio *per il sistema, se esiste la soluzione costante*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c} \qquad \forall\ t\ .$$

Con evidenza se $\mathbf{c}$ è di equilibrio allora $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = 0$, e viceversa se $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = 0$ allora $\mathbf{c}$ è di equilibrio. I punti di equilibrio sono dunque tutti e soli i cosiddetti *punti critici,* o *punti singolari,* del campo vettoriale $\mathbf{f}$, cioè quelli in cui il campo si annulla.

Nel caso meccanico autonomo a un grado di libertà si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v) \end{cases} , \tag{1.2.4}$$

perciò i punti di equilibrio sono sempre del tipo $\mathbf{c} = (x^*, 0)$, con x^* tale che $f(x^*, 0) = 0$; si veda la figura 1.3. Nel caso meccanico x^* stesso si dice comunemente, con piccola confusione di linguaggio, punto di equilibrio; meglio è chiamare sempre $\mathbf{c}$ *punto* di equilibrio, e x^* *configurazione* o *posizione* di equilibrio.

Per la particella libera ogni punto dell'asse x è posizione di equilibrio: è un caso non tipico, genericamente i punti di equilibrio sono isolati. Per l'oscillatore armonico e per il repulsore armonico l'origine è l'unico punto di equilibrio. Per il pendolo i punti di equilibrio sono due, l'origine $(0, 0)$ e

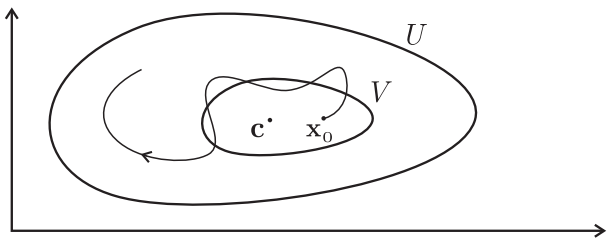

Figura 1.4: *Ad illustrazione della definizione di stabilità di un punto di equilibrio*

$(\pi, 0)$. L'aggiunta di un attrito viscoso, più in generale di un termine che si annulla per $v = 0$, non aggiunge né toglie punti di equilibrio. Per il sistema di Lotka–Volterra i punti di equilibrio sono l'origine e poi $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$, si veda la figura 1.3.

Quando si siano determinate le soluzioni di equilibrio risolvendo l'equazione (non differenziale) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, ci si domanda cosa avvenga dei dati iniziali prossimi a quelli di equilibrio: ad esempio le soluzioni corrispondenti possono restare indefinitamente presso il punto di equilibrio, o sfuggirne via tutte, o solo alcune. Una prima formalizzazione di tale ordine di idee si ottiene introducendo la nozione di *stabilità (alla Ljapunov) di un punto di equilibrio.*

Definizione 2 *Un punto di equilibrio* $\mathbf{c}$ *di* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *si dice* stabile *(o stabile nel futuro, o stabile nel passato) se per ogni intorno* U *di* $\mathbf{c}$ *esiste un intorno* V *di* $\mathbf{c}$*, tale che ogni movimento* $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ *con dato iniziale* $\mathbf{x}_0$ *in* V *resta in* U *per ogni tempo (o rispettivamente per tutti i tempi positivi, o per tutti i tempi negativi).*

Dunque "si resta indefinitamente vicino a $\mathbf{c}$ pur di partire abbastanza vicino"; si veda la figura 1.4.

Definizione 3 *Un punto di equilibrio* $\mathbf{c}$ *di* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *si dice* instabile *se non è stabile.*

Attenzione: l'instabilità non comporta che tutte le orbite sfuggano dal punto di equilibrio, ma soltanto che non tutte le orbite gli restino vicine; se un'orbita almeno sfugge, il punto è instabile.

Esercizio 4 *Si verifichi, sulla base della definizione, che l'origine è punto di equilibrio stabile per l'oscillatore armonico, instabile per il repulsore armonico; si verifichi poi che tutti i punti di equilibrio della particella libera sono instabili.*

Una proprietà più restrittiva è quella di *stabilità asintotica.*

Definizione 4 *Un punto di equilibrio* $\mathbf{c}$ *si dice* asintoticamente stabile *per tempi positivi (negativi) quando: (a) è stabile per* $t \geq 0$ $(t \leq 0)$*, e inoltre (b) esiste un intorno* V^* *di* $\mathbf{c}$ *tale che per ogni dato iniziale* $\mathbf{x}_0 \in V^*$ *si ha* $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \to \mathbf{c}$ *per per* $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$.[10]

Esercizio 5 *Si verifichi che l'aggiunta di un termine di smorzamento muta la stabilità semplice in stabilità asintotica per l'oscillatore armonico e rende stabile ma non asintoticamente stabile la particella libera.*

[10] La sola proprietà (b) non implica la proprietà di stabilità (a). Un tipico controesempio è dato dal sistema descritto, in coordinate polari piane (r, ϑ), dalle equazioni $\dot{r} = 1 - r$, $\dot{\vartheta} = 1 - \cos\vartheta$. Tale sistema, ben definito nell'aperto costituito dal piano privato dell'origine, ha $r = 1$, $\vartheta = 0$ come unico punto critico. Si vede facilmente che tale punto non è stabile (ciò segue dal fatto che si ha $\dot{\vartheta} > 0$ per $\vartheta \neq 0$, e dunque in ogni intorno del punto critico vi sono punti che se ne allontanano a distanza finita); d'altra parte (tenendo conto che dalla prima equazione segue $r \to 1$ per $t \to +\infty$) è facile convincersi che tutti i punti del piano (privato dell'origine) tendono al punto critico, per $t \to +\infty$, eventualmente dopo "aver compiuto un giro".

1.2.3 Costanti del moto e stabilità

La stabilità è fortemente connessa con l'eventuale presenza nel sistema di quantità conservate, dette *costanti del moto.*

Definizione 5 *Sia data l'equazione differenziale* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *in* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$*. Una funzione* $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *è detta* costante del moto *per il sistema, se* per ogni $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ *e ogni* $t \in \mathbb{R}$ *risulta*

$$F(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = F(\mathbf{x}_0) \ .$$

Del tutto in generale, se F è una qualsiasi funzione (regolare) $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$, la sua derivata lungo un movimento $\mathbf{x}(t)$, cioè la derivata rispetto al tempo della funzione composta $F(\mathbf{x}(t))$, è data da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}(t)) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) \ .$$

E' utile allora la seguente definizione:

Definizione 6 *Sia data l'equazione differenziale* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *in* $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$*. L'operatore di derivazione*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{f}} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \ ,$$

che agisce sulle funzioni regolari $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$*, è detto* derivata di Lie *associata a* $\mathbf{f}$*; per ogni* F*, la funzione* $\mathcal{L}_{\mathbf{f}} F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{f}} F)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

è detta derivata di Lie della funzione F *associata a* $\mathbf{f}$.[11]

Si ha così, lungo un qualsiasi moto,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\mathbf{x}(t)) = (\mathcal{L}_{\mathbf{f}}) F(\mathbf{x}(t)) \ ,$$

pertanto F è una costante del moto se e solo se $\mathcal{L}_{\mathbf{f}} F$ è ovunque nulla in $\mathcal{D}$. Si osservi che in un punto di equilibrio $\mathbf{c}$ la derivata di Lie $(\mathcal{L}_{\mathbf{f}}) F(\mathbf{c})$, per qualunque F, è nulla. Useremo di frequente per $\mathcal{L}_{\mathbf{f}} F$ la notazione breve $\dot{F}$.

Proposizione 5 *Per tutti i sistemi meccanici a un grado di libertà con forze posizionali,*

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} \ , \tag{1.2.5}$$

si conserva l'energia (per unità di massa)

$$E(x, v) = \tfrac{1}{2} v^2 + V(x) \ ,$$

ove V *è una primitiva di* f *cambiata di segno:* $f(x) = -V'(x)$*.*

[11] Sophus Lie, 1842–1899; pronuncia alla tedesca "Li", con la vocale leggermente allungata.

$K(v) = \frac{1}{2}v^2$ e $V(x)$ sono dette rispettivamente *energia cinetica* e *energia potenziale* (per unità di massa). Con evidenza V ed E sono determinate a meno di una costante additiva.

Dimostrazione. La verifica che E si conserva è banale: infatti

$$\dot{E}(x,v) = v\dot{v} + V'(x)\dot{x} = vf(x) - f(x)v = 0 \ .$$

□

Più interessante della verifica è la deduzione dell'espressione di E. Si può fare così: lungo un qualsiasi movimento $(x(t), v(t))$ si ha

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t \ , \qquad \mathrm{d}v = f(x)\mathrm{d}t \ ;$$

moltiplicando la prima per $f(x)$, la seconda per v, e sottraendo, segue che per ogni traiettoria

$$v\mathrm{d}v - f(x)\mathrm{d}x = 0 \ .$$

Al primo membro si riconosce subito il differenziale di una funzione, precisamente la funzione E sopra introdotta, che dunque resta costante lungo le traiettorie (è essenziale, perché l'espressione al primo membro sia il differenziale di una funzione, il fatto che f sia posizionale).

Per l'oscillatore armonico e il repulsore armonico risulta, rispettivamente, $E(x,v) = \frac{1}{2}(v^2+\omega^2x^2)$ e $E(x,v) = \frac{1}{2}(v^2 - \omega^2x^2)$; per il pendolo si ha $E(x,v) = \frac{1}{2}v^2 - \omega^2\cos x$.

Esercizio 6 *Si determini una costante del moto per il sistema di Lotka–Volterra.* [Soluzione: procedendo come sopra per l'energia si trova $\mathrm{d}x = (\alpha x - \beta xy)\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = (-\gamma y + \delta xy)\mathrm{d}t$, e dunque $(-\gamma y + \delta xy)\mathrm{d}x - (\alpha x - \beta xy)\mathrm{d}y = 0$. Dividendo per xy le variabili si separano,

$$(-\gamma/x + \delta)\mathrm{d}x - (\alpha/y - \beta)\mathrm{d}y = 0 \ ;$$

al primo membro si riconosce allora immediatamente il differenziale della funzione

$$F(x,y) = \delta x - \gamma\log x + \beta y - \alpha\log y \ ,$$

che pertanto è costante lungo le traiettorie.]

Se al sistema (1.2.5) si aggiunge un termine di attrito viscoso, cioè si considera il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) - \beta v \end{cases} ,$$

allora E non si conserva più ma si ha

$$\dot{E} = -\beta v^2 \leq 0$$

(si osservi che $\dot{E}$ è pari alla potenza della forza dissipativa $-\beta v$). Sistemi per cui E non si conserva, e $\dot{E} \leq 0$, sono detti *dissipativi;* sistemi per cui E si conserva sono detti *conservativi.*

Definizione 7 *Un insieme $A \subset U$ si dice* invariante *se il suo evoluto $\Phi^t(A)$ a ogni tempo t coincide con A; equivalentemente, se A è unione di traiettorie. L'insieme A si dice* invariante in avanti *se $\Phi^t(A) \subset A$ per ogni $t > 0$.*

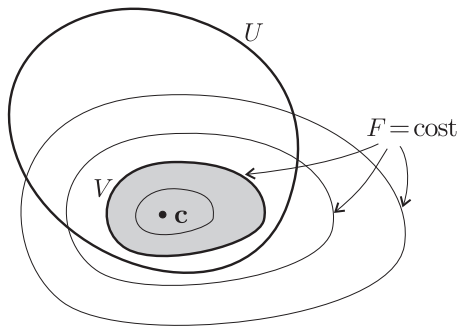

Figura 1.5: *Connessione tra costanti del moto e stabilità.*

Se esiste una costante del moto F, allora ogni insieme di livello

$$\Sigma_c = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{D} : F(\mathbf{x}) = c \right\}$$

è un insieme invariante, come pure ogni unione di tali insiemi, ad esempio

$$A_{c_1,c_2} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{D} : c_1 \leq F(\mathbf{x}) \leq c_2 \right\} .$$

Come insegna l'analisi, se il gradiente ∇F di F non si annulla mai su Σ_c, allora Σ_c è una varietà regolare (una superficie) di dimensione $n-1$ immersa in $\mathbb{R}^n$; se ∇F non si annulla su A_{c_1,c_2}, allora A_{c_1,c_2} è decomposto ("foliato") in tali superfici.

Se poi F non è una costante del moto, ma $\dot{F}$ ha segno definito, ad esempio $\dot{F} \leq 0$, allora un insieme del tipo

$$A_c = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{D} : F(\mathbf{x}) \leq c \right\}$$

è invariante in avanti.

La connessione tra presenza di una costante del moto e stabilità di un punto di equilibrio è semplice: se una costante del moto $F(\mathbf{x})$ ha un massimo o un minimo stretto (o proprio) nel punto di equlibrio $\mathbf{c} \in \mathcal{D}$, allora certamente $\mathbf{c}$ è stabile. Infatti (figura 1.5) in tal caso le superfici di livello di F attorno a $\mathbf{c}$ sono (topologicamente) sfere racchiuse l'una nell'altra, con diametro che tende a zero quando il valore di F si avvicina a $F(\mathbf{c})$; la definizione di stabilità è con evidenza soddisfatta: comunque si prenda U aperto, certamente si trova una di queste sfere interamente contenuta in U; basta allora prendere come insieme V l'interno di tale sfera: i moti con dato iniziale in V, essendo V invariante, restano in V, e dunque anche in U, per tutti i tempi. Si osservi anche che per la stabilità per soli tempi positivi è sufficiente che V sia invariante in avanti: per questo basta che F abbia in $\mathbf{c}$ un minimo, e sia $\dot{F} \leq 0$, come avviene con l'energia dei sistemi meccanici dissipativi (o viceversa, F abbia un massimo e sia $\dot{F} \geq 0$).

Esercizio 7 *Si consideri un sistema di due oscillatori armonici disaccoppiati:* $\dot{x}_i = v_i$, $\dot{v}_i = -\omega_i^2 x_i$, $i = 1, 2$. *Supposto* $\omega_1 = \omega_2$, *si determini una costante del moto indipendente dalle due energie (che evidentemente si conservano).* [Risposta: $F(x_1, x_2, v_1, v_2) = x_1 v_2 - x_2 v_1$.] Si può dimostrare (ma è difficile) che una costante del moto indipendente dalle due energie esiste se e solo se ω_2/ω_1 è razionale.

1.2.4 Il teorema di Ljapunov

Il legame tra presenza di costanti del moto, o comunque di funzioni con derivata di Lie a segno definito, e stabilità dei punti di equilibrio, si formalizza con il seguente fondamentale *teorema di Ljapunov.*

PROPOSIZIONE 6 *Sia* $\mathbf{c}$ *un punto di equilibrio per il sistema* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *in* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$*. Se in un intorno* U_0 *di* $\mathbf{c}$ *esiste una funzione differenziabile* $\mathcal{W} : U_0 \to \mathbb{R}$ *(*"funzione di Ljapunov"*), che gode delle due seguenti proprietà:*

a) $\mathcal{W}$ *ha un minimo stretto in* $\mathbf{c}$*, ovvero si ha* $\mathcal{W}(\mathbf{x}) > \mathcal{W}(\mathbf{c})$ *in* $U_0 \backslash \{\mathbf{c}\}$*;*

b) *la sua derivata di Lie soddisfa la disuguaglianza* $\dot{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) \leq 0$ *in* U_0*;*

allora $\mathbf{c}$ *è punto di equilibrio stabile per tempi positivi. Se poi* $\mathcal{W}$ *soddisfa la condizione, più forte di* b)*:*

b') $\dot{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) < 0$ *per* $\mathbf{x} \in U_0 \backslash \{\mathbf{c}\}$,

allora $\mathbf{c}$ *è asintoticamente stabile per tempi positivi.*

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo innanzitutto b) e dimostriamo la stabilità di $\mathbf{c}$ per tempi positivi. Preso ad arbitrio un intorno U di $\mathbf{c}$, sia B una sfera aperta centrata in $\mathbf{c}$, contenuta in $U \cap U_0$ assieme al suo bordo ∂B. Su ∂B (chiuso e limitato) la funzione $\mathcal{W}$ (continua) ammette un minimo l; se $\hat{\mathbf{x}} \in \partial B$ realizza il minimo, per a) sarà $l = \mathcal{W}(\hat{\mathbf{x}}) > \mathcal{W}(\mathbf{c})$ strettamente. Consideriamo allora l'insieme

$$V = \{\mathbf{x} \in B; \mathcal{W}(\mathbf{x}) < l\} \ ;$$

V è come richiesto un aperto contenente $\mathbf{c}$. Ora utilizzando b) si vede facilmente che preso comunque $\mathbf{x}_0 \in V$, il corrispondente movimento $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ per $t > 0$ non può raggiungere ∂B: per b) infatti $\mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$ è funzione monotona non crescente di t, perciò si ha $\mathcal{W}(\mathbf{x}) \leq \mathcal{W}(\mathbf{x}_0) < l$, mentre $\mathcal{W}(\mathbf{x}) \geq l$ su ∂B. Perciò per $t \geq 0$ qualsiasi risulta $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in B \subset U$ e la stabilità per tempi positivi è dimostrata.[12]

Assumiamo ora b') e proviamo la stabilità asintotica di $\mathbf{c}$ per tempi positivi. A tale scopo prendiamo come V^* l'insieme V costruito sopra in corrispondenza a un U qualsiasi, e mostriamo che, in aggiunta a quanto già provato, per ogni $\mathbf{x}_0$ appartenente all'insieme V sopra costruito si ha

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{c} \tag{1.2.6}$$

Tenendo conto della continuità di $\mathcal{W}$, e del fatto che $\mathbf{c}$ è l'unico punto nel quale $\mathcal{W}$ assume il valore $\mathcal{W}(\mathbf{c})$, si vede immediatamente che la (1.2.6) equivale[13] a

$$\lim_{t \to +\infty} \mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \mathcal{W}(\mathbf{c}) \ .$$

[12] Al di là di quanto richiesto nella definizione di stabilità, l'insieme V sopra costruito è addirittura invariante per tempi positivi.

[13] Se non valesse la (1.2.6), allora si potrebbe trovare una sferetta $B' \subset B$ centrata in $\mathbf{c}$, tale che $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, pur contenuto in B, esce da B' per opportuni valori di t arbitrariamente grandi. Ma il minimo l di $\mathcal{W}$ sulla chiusura di $B \setminus B'$ è strettamente maggiore di $\mathcal{W}(\mathbf{c})$, e dunque per questi valori di t risulterebbe $\mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) \geq l > \mathcal{W}(\mathbf{c})$, contro l'esistenza del limite (1.2.6).

L'esistenza di un limite è ovvia: infatti, fissato $\mathbf{x}_0 \in V$, sappiamo che $\mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$, come funzione di t, è monotona non crescente, e inoltre è inferiormente limitata da $\mathcal{W}(\mathbf{c})$, pertanto un limite λ esiste e anzi si ha $\lambda \geq \mathcal{W}(\mathbf{c})$. Per assurdo, supponiamo $\lambda > \mathcal{W}(\mathbf{c})$. Allora, per definizione di limite, fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, per tutti i $t \geq T_\varepsilon$ opportuno sarà $\lambda \leq \mathcal{W}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) \leq \lambda + \varepsilon$ (si ricordi che al limite si arriva da sopra), cioè

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in A = \big\{\mathbf{x} : \lambda \leq \mathcal{W}(\mathbf{x}) \leq \lambda + \varepsilon\big\} \qquad \forall\, t \geq T_\varepsilon \ . \tag{1.2.7}$$

Usiamo ora la disuguaglianza stretta b'). Per l'ipotesi assurda, $\mathbf{c} \notin A$, dunque il massimo di $\dot{\mathcal{W}}$ in A (che esiste, perché A è compatto) è strettamente negativo:

$$\dot{\mathcal{W}}(\mathbf{x}) \leq -\alpha < 0 \qquad \forall x \in A \ .$$

Per il teorema della media segue immediatamente

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}(T_\varepsilon + \tau, \mathbf{x}_0)) \leq \mathcal{W}(T_\varepsilon, \mathbf{x}_0) - \alpha\tau \leq \lambda + \varepsilon - \alpha\tau$$

per ogni $\tau > 0$, e per $\tau > \varepsilon/\alpha$ si va contro la (1.2.7). □

- Se si invertono le disuguaglianze b) o b'), si ottiene la stabilità, o la stabilità asintotica, per tempi negativi anziché positivi. Se b) è realizzata come uguaglianza, si ottiene la stabilità (non asintotica) per tutti i tempi.

- Nella condizione a) la disuguaglianza è richiesta in senso stretto, cioè non può essere sostituita da "$\geq$" (si pensi al caso della particella libera, con $W = E = \frac{1}{2}mv^2$).

- Il teorema di Ljapunov non è costruttivo: esso infatti stabilisce un criterio per garantire la stabilità di un punto di equilibrio, nella forma di una condizione sufficiente, ma non dà alcuna indicazione sul modo di determinare concretamente una funzione di Ljapunov, se esiste, a partire dall'espressione di $\mathbf{f}$.

Corollario 7 *Si consideri un sistema meccanico autonomo con forze puramente posizionali,*

$$\dot{x} = v \ , \qquad \dot{v} = f(x) \ .$$

Se l'energia potenziale $V(x)$ ha un minimo stretto in $x^* \in \mathbb{R}$, allora il punto di equilibrio $\mathbf{c} = (x^*, 0)$ è stabile (per tutti i tempi).

Dimostrazione. Poiché l'energia cinetica $\frac{1}{2}v^2$ è definita positiva come funzione di v e si annulla per $v = 0$, allora l'energia totale $E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x)$ ha un minimo stretto in $\mathbf{c}$, e dunque soddisfa la condizione a) del teorema; d'altra parte E, essendo una costante del moto, soddisfa anche la condizione b) e dunque è una buona funzione di Ljapunov. □

Vedremo che questo risultato si estende in modo naturale a tutti i sistemi meccanici (sistemi lagrangiani a $n \geq 1$ gradi di libertà, si veda oltre), per i quali si può scrivere l'energia totale come somma di un'energia cinetica definita positiva e di un'energia potenziale: nei punti di minimo dell'energia potenziale l'equilibrio risulterà stabile (teorema di Lagrange–Dirichlet, presentato in queste note come corollario del teorema di Ljapunov, ma storicamente ben precedente).

Restando nell'ambito dei sistemi meccanici autonomi sopra considerati, si osservi che la stabilità nel futuro persiste anche se si aggiunge alla forza un termine dissipativo, cioè un termine tale che si abbia sempre $\dot{E} \leq 0$. Tuttavia ciò non è sufficiente, in generale, a garantire la stabilità asintotica, che richiede la disuguaglianza stretta b'). Si noti che tale condizione più forte non è soddisfatta, ad esempio, nemmeno nel caso dell'oscillatore armonico smorzato (che pure sappiamo essere asintoticamente stabile), qualora si prenda come funzione di Ljapunov l'energia $E = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$, per la quale si ha $\dot{E} = -2\mu v^2$: infatti, si ha $\dot{E} = 0$ su tutto l'asse $v = 0$, e non solo nel punto critico. A questa difficoltà si potrebbe ovviare correggendo opportunamente la funzione di Ljapunov, come mostrato nell'appendice A. E' naturale chiedersi tuttavia se ciò sia veramente necessario: è chiaro infatti che in tale esempio, pur se in un particolare istante risulta $\dot{x} = 0$, e quindi $\dot{E} = 0$ anche se $(x, v) \neq (0, 0)$, tuttavia immediatamente prima e dopo risulta $\dot{E} < 0$, perché tutte le orbite ad eccezione del punto di equilibrio attraversano trasversalmente la retta $\dot{x} = 0$, e quindi non possono restarvi indefinitamente. Questa argomentazione si può rendere rigorosa in condizioni del tutto generali, dando luogo a una utilissima formulazione del teorema di Ljapunov, in cui si sostituisce la condizione b') con la condizione più debole

b") *In U_0 risulta $\dot{\mathcal{W}} \leq 0$, ma l'insieme ove è realizzata l'uguaglianza esatta non contiene, al di fuori del punto critico* **c**, *alcuna traiettoria completa.*

Omettiamo la dimostrazione, che presenta qualche complicazione in più (ma nessuna difficoltà sostanziale) rispetto alla dimostrazione riportata sopra.

Esercizio 8 *Sfruttando la presenza della costante del moto $F(x, y) = \delta x - \log x + \beta y - \log y$ (esercizio 6), si studi la stabilità del punto di equilibrio $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ per il sistema di Lotka–Volterra.*

1.3 Sistemi conservativi a un grado di libertà

1.3.1 Il ritratto in fase per sistemi conservativi a un grado di libertà

Per un sistema conservativo a un grado di libertà, con equazioni del moto

$$\dot{x} = v \ , \qquad \dot{v} = f(x) \ , \qquad \text{con} \quad f(x) = -V'(x) \ , \tag{1.3.1}$$

le traiettorie necessariamente coincidono con le linee di livello dell'energia $E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x)$. *Per tracciarle basta dunque lo studio geometrico della funzione $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, senza alcun bisogno di risolvere l'equazione differenziale.* Così per l'oscillatore armonico le curve di livello

$$E(x, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = \hat{E}$$

per ogni valore della costante $\hat{E} > 0$ sono ellissi centrate nell'origine, che degenerano in un punto per $\hat{E} = 0$. Similmente, si veda la figura 1.6, per il repulsore armonico le curve di livello

$$E(x, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} = \hat{E}$$

per ogni $\hat{E} \neq 0$ sono iperboli centrate nell'origine, con i fuochi sull'asse v per $\hat{E} > 0$ (curve di tipo (a), v non si annulla mai) e sull'asse x per $\hat{E} < 0$ (curve di tipo (b), x non si annulla mai); per $\hat{E} = 0$ si ha il caso degenere di una coppia di rette $v = \pm\omega x$, che fanno da asintoti a tutte

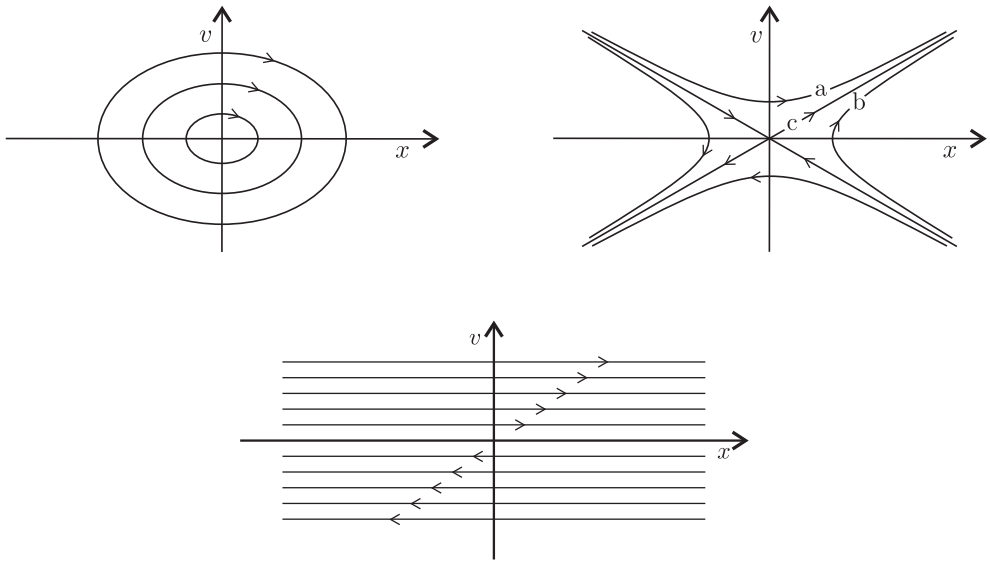

Figura 1.6: *Studio di $E(x, v) = \hat{E}$ e ritratto in fase per l'oscillatore armonico, il repulsore armonico e la particella libera.*

le iperboli (curve (c)). Per la particella libera v stessa si conserva, pertanto le traiettorie sono rette parallele all'asse x. In figura sono state inserite frecce a indicare il verso di percorrenza delle traiettorie, univocamente determinato (per i sistemi meccanici che stiamo considerando, grazie alla forma particolarissima della prima equazione del moto $\dot{x} = v$), dal fatto che $\dot{x} > 0$, e dunque x è crescente, nel semipiano $v > 0$, e viceversa nel semipiano $v < 0$. L'immagine dell'insieme delle traiettorie nello spazio delle fasi di un sistema è detto *ritratto in fase* del sistema; la figura 1.6 mostra dunque il ritratto in fase per i tre elementari sistemi sopra considerati.

- Le curve di livello, fuori dai punti di equilibrio, tagliano l'asse delle x "verticalmente". Infatti sull'asse delle x, definito da $v = 0$, "x non cresce né decresce". Più precisamente, per ogni moto $x(t), v(t)$ con $v \neq 0$ resta definita una funzione $v = \tilde{v}(x)$ tale che $\mathrm{d}\tilde{v}/\mathrm{d}x = \dot{v}/\dot{x} = f(x)/v$ (infatti per $\dot{x} \neq 0$ si inverte $x(t)$ in $t(x)$ e si sostituisce nella seconda, eliminando così t), e si vede bene che la derivata di $\tilde{v}$ diverge se x tende a un punto di arresto, ovvero un punto dove v si annulla, senza che contemporaneamente si annulli anche $f(x)$.

Esercizio 9 *Per il repulsore armonico, quanti sono i moti che hanno supporto sull'insieme di livello $E(x, v) = 0$?* [Sono cinque.] *La soluzione analitica mostra che qualunque moto con dato iniziale $v_0 = -\omega x_0$ converge all'origine per $t \to \infty$, ma non vi arriva per nessun $t < \infty$. E' possibile dedurre l'ultima affermazione direttamente del teorema di Cauchy, senza bisogno di conoscere la soluzione analitica?*

- Per la particella libera si dice talvolta che si ha un caso parabolico, mentre si ha un caso ellittico per l'oscillatore armonico e un caso iperbolico per il repulsore armonico; con altra terminologia, il punto di equilibrio dell'oscillatore armonico si dice essere un *centro* (per evidenti ragioni) mentre quello del repulsore armonico è chiamato *colle* (nel senso di "valico") o *sella*.

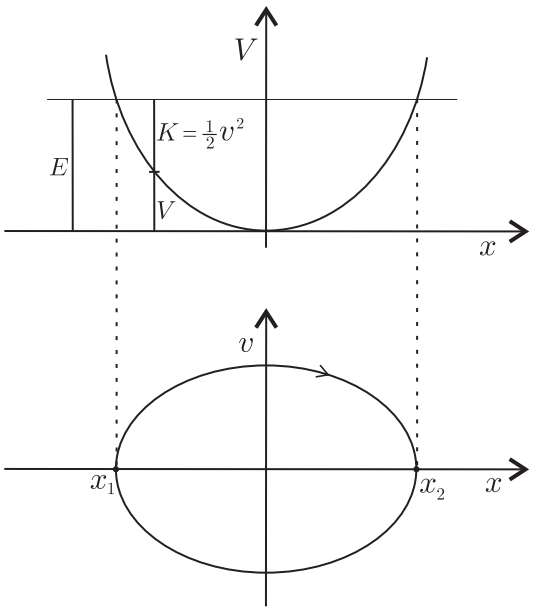

Figura 1.7: *La costruzione del ritratto in fase per un potenziale con un minimo nell'origine, come per l'oscillatore armonico.*

Questo procedimento analitico, in cui si studiano in dettaglio le curve del tipo $E(x, v) = \hat{E}$, con $E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x)$, diventa faticoso non appena V è un po' complicato. L'andamento qualitativo tuttavia si può sempre ottenere in modo semplice, a partire dal grafico dell'energia potenziale $V(x)$. Si prenda ad esempio un potenziale "a scodella", simile la parabola dell'oscillatore armonico (figura 1.7) e si fissi un qualsiasi valore di energia $\hat{E}$ (superiore al minimo di V, qui preso uguale a zero).

- Nei due punti in cui la retta $V(x) = \hat{E}$, l'energia cinetica $K = \frac{1}{2}v^2$ si annulla; corrispondentemente si hanno i due punti d'arresto, o di inversione, x_1 e x_2.

- Poiché $K = E - V$ deve essere positiva, il moto può svolgersi solo entro l'intervallo $[x_1, x_2]$ ove $V \leq E$.

- All'interno di tale intervallo la velocità è diversa da zero, crescente in modulo fino al valore massimo in coincidenza del minimo di V, poi di nuovo decrescente fino a zero proseguendo verso l'altro punto di arresto; per ogni $x \in (x_1, x_2)$ sono possibili due valori opposti di v, $v = \pm\sqrt{2(\hat{E} - V(x))}$, perciò la curva di livello è costituita da due rami che si incontrano nei due punti di arresto. Si osservi che nei punti di arresto la pendenza delle curve diventa infinita: derivando infatti si ha

$$v'(x) = \mp \frac{V'(x)}{\sqrt{2(\hat{E} - V(x))}} \ ,$$

  e nei punti di arresto il denominatore si annulla senza che si annulli anche il numeratore[14]

[14] Diverso è il caso delle curve che hanno per limite un punto di equilibrio: in tal caso anche il numeratore V' si annulla e allora la pendenza può essere qualsiasi.

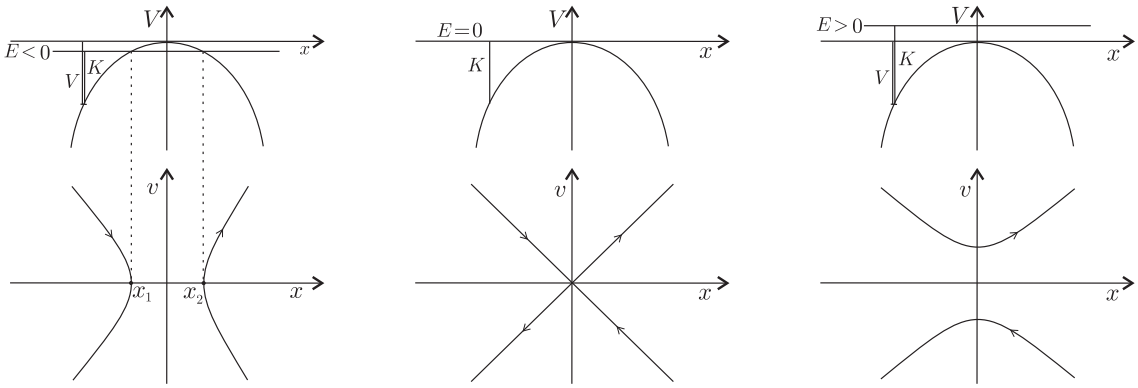

Figura 1.8: *La costruzione del ritratto in fase per un potenziale con un massimo nell'origine, come per il repulsore armonico.*

La figura 1.8 mostra la costruzione analoga per un potenziale "a montagnola", come nel caso del repulsore armonico; per semplicità si è preso il massimo di V nell'origine, con $V(0) = 0$.

- Per $E < 0$ vi sono due punti di arresto x_1 e x_2; il requisito $V(x) \leq E$, per avere $K \geq 0$, restringe questa volta il moto all'esterno dell'intervallo (x_1, x_2).
- Per $E > 0$ non vi sono punti di arresto: v in modulo diminuisce avvicinandosi al massimo di V, ma non si annulla mai.
- Per $E = 0$ si ha un unico punto ove $V = E$ e corrispondentemente la velocità si annulla, precisamente il punto (qui l'origine) ove V è massimo. Non è un punto di inversione ma di equilibrio; se ci si allontana da questo punto v in modulo cresce, e si hanno quattro diverse traiettorie che fanno da supporto ad altrettanti moti, due entranti e due uscenti.[15] Per il repulsore armonico le quattro traiettorie sono semirette, in generale sono curve diverse.

Esempi

La figura 1.9 insegna a costruire il ritratto in fase per il pendolo, con potenziale periodico $V(x) = -\omega^2 \cos x$. Localmente attorno ai minimi e massimi di V l'andamento è simile, rispettivamente, a quello dell'oscillatore e del repulsore armonico. E' importante studiare bene il livello di energia $E(x, v) = \omega^2$, corrispondente al massimo di V. Le corrispondenti traiettorie connettono i punti di equilibrio instabili $\mathbf{c}_\pm = (\pm\pi, 0)$, e supportano moti che asintoticamente per $t \to \pm\infty$ tendono a questi punti, in un verso o nell'altro a seconda del segno di v. Tali curve sono dette *separatrici;* hanno questo nome perché dividono il piano di fase in regioni con proprietè diverse: in questo caso la regione delle *librazioni* (oscillazioni) del pendolo, compresa fra le separatrici, che si ha per $-\omega^2 < E < \omega^2$, e le due regioni delle *rotazioni,* nei due versi opposti, che si hanno per $E > \omega^2$.

La figura 1.10 mostra la costruzione analoga per un potenziale cubico del tipo $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \alpha x^3$, $\alpha > 0$, e per un potenziale quartico a forma di doppia buca, $V(x) = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \alpha x^4$, $\alpha > 0$. Per costruire il ritratto in fase conviene sempre tracciare innanzitutto i punti di equilibrio, in corrispondenza ai punti stazionari di V, e poi le separatrici, per i livelli di energia pari ai massimi di V.

[15] A causa della presenza di un punto (l'origine) ove la funzione $E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x)$ ha gradiente nullo, l'equazione $E(x, v) = 0$ non fornisce in questo caso una curva ma un insieme più complicato, con un punto doppio.

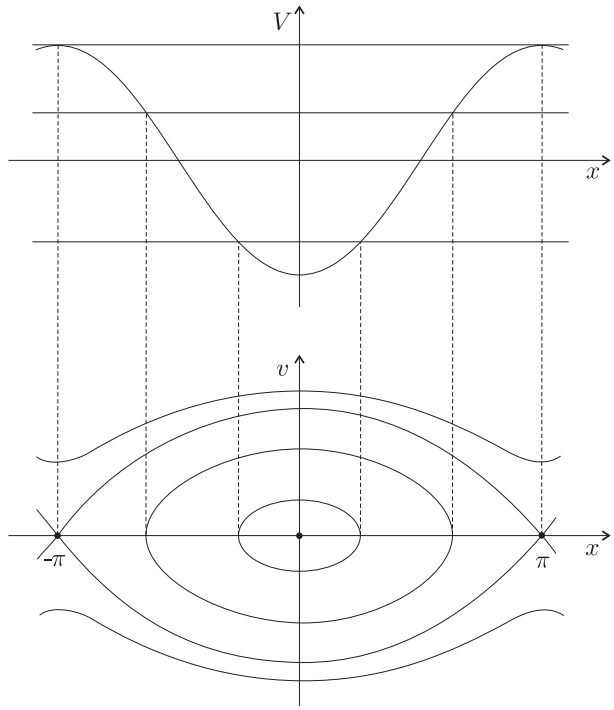

Figura 1.9: *Grafico del potenziale e ritratto in fase del pendolo.*

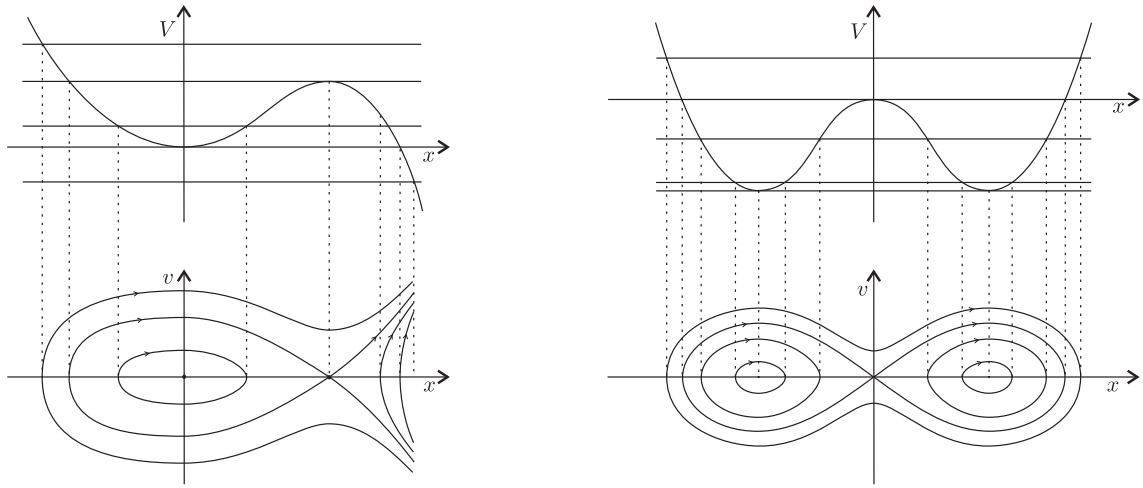

Figura 1.10: *Grafico del potenziale e ritratto in fase per il potenziale cubico* $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \alpha x^3 + \mathrm{cost}$, $\alpha > 0$, *e per la doppia buca* $V(x) = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \alpha x^4$, $\alpha > 0$.

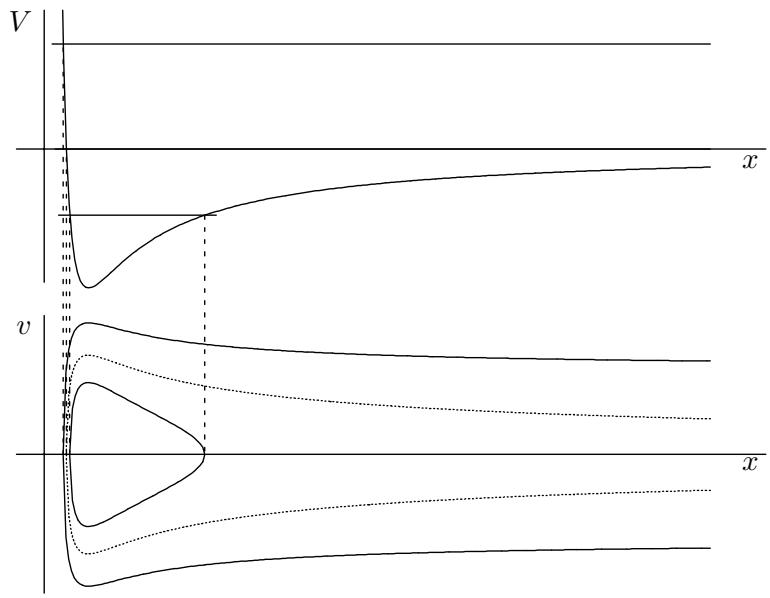

Figura 1.11: *Grafico del potenziale e ritratto in fase per il potenziale* $V(x) = -\alpha/x + \beta/x^2$*, caratteristico del moto centrale.*

Un altro esempio interessante è quello di un potenziale della forma

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} \ , \tag{1.3.2}$$

che si incontra nello studio del moto centrale con potenziale kepleriano. Come è noto il moto centrale si svolge in un piano ed è convenientemente descritto da coordinate polari piane r, ϑ. Elementari considerazioni di cinematica, basate sulle relazioni che legano le coordinate cartesiane alle coordinate polari,

$$x = r\cos\vartheta \ , \qquad y = r\sin\vartheta \ ,$$

consentono di scrivere per l'energia cinetica (per unità di massa) l'espressione

$$K(r,\vartheta) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2)$$

(basta derivare, quadrare e sommare). Ma come è noto, il momento angolare (per unità di massa) $l = r^2\dot{\vartheta}$ si conserva; ricavando $\dot{\vartheta}$ e sostituendo si trova allora $K = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + l^2/r^2)$ e corrispondentemente

$$E(r,\dot{r};l) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2r^2} + \mathcal{V}(r) \ ,$$

ove l va pensato come parametro e $\mathcal{V}(r)$ è il potenziale del problema di moto centrale considerato, $\mathcal{V}(r) = -\alpha/r$, $\alpha > 0$, nel caso kepleriano. *Ci si ritrova così con un problema a un solo grado di libertà per la sola coordinata radiale* r*,* con "energia cinetica efficace" $\frac{1}{2}\dot{r}^2$ e "energia potenziale efficace" $V(r;l) = \mathcal{V}(r) + l^2/(2r^2)$. Nel caso kepleriano si trova la (1.3.2), con $\beta = l^2/2$, a meno della notazione x al posto di r (e dell'omissione del parametro l in V).

Il grafico del potenziale e il ritratto in fase di questo sistema (per $l \neq 0$) sono riportati in figura 1.11. Si faccia particolare attenzione alla curva di livello relativa a $E = 0$, che gioca il ruolo di

separatrice (come se vi fosse un massimo di V con il corrispondente punto di equilibrio instabile all'infinito). La separatrice qui divide i moti "legati" (r è limitato) che si hanno per $E < 0$ dai moti aperti (r non limitato) che si trovano per $E > 0$; per il caso kepleriano (ma l'analisi che abbiamo fatto è in realtà più generale) si tratta rispettivamente dei moti ellittici e dei moti iperbolici. Il punto di equilibrio stabile in corrispondenza del minimo di V rappresenta i moti circolari (r resta costante).

Esercizio 10 *Quali caratteristiche deve avere il potenziale $\mathcal{V}(r)$ del moto centrale perchè il ritratto in fase appaia qualitativamente come in figura 1.11?*

- In tutti questi casi i moti sulle separatrici convergono ai punti di equilibrio asintoticamente per $t \to \pm\infty$, ma non possono giungervi in un tempo finito t^*: se così fosse infatti due diversi movimenti — quello sulla separatrice e il moto stazionario corrispondente all'equilibrio — coinciderebbero a $t = t^*$, contro il teorema di Cauchy (nella parte di unicità).

- Abbiamo considerato in questo paragrafo il caso semplice di equazioni della forma (1.3.1), che è quello tipico del moto di un punto materiale su una retta, cui corrisponde l'energia cinetica $K(v) = \frac{1}{2}v^2$. Come si mostrerà più avanti trattando i sistemi meccanici più generali retti dalle equazioni di Lagrange, per sistemi a un grado di libertà si trova per l'energia cinetica l'espressione più generale $K(x, v) = \frac{1}{2}a(x)v^2$, con $a(x) > 0$ in generale non costante. Ci si rende facilmente conto che *grazie alla proprietà* $a(x) > 0$ le considerazioni qualitative del presente paragrafo si estendono senza sostanziali diversità a tale caso più generale.

1.3.2 Trattazione analitica completa

Il ritratto in fase contiene una descrizione dettagliata del moto, a meno del tempo di percorrenza di ciascuna traiettoria. A questa mancanza si rimedia, all'occorrenza, usando ancora una volta la conservazione dell'energia. Si procede così: da $E = \frac{1}{2}v^2 + V(x)$ si ricava $v = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$; la scelta del segno dipende dal semipiano in cui ci si trova, e il segno muta, seguendo una traiettoria, soltanto all'atto delle inversioni (punti x in cui $V(x) = E$ e corrispondentemente $v = 0$). Prendendo ad esempio il segno positivo, e ricordando $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, si ha allora l'equazione differenziale *del primo ordine* nell'incognita $x(t)$

$$\dot{x} = \sqrt{2(E - V(x))} \ , \tag{1.3.3}$$

o equivalentemente, separando le variabili, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E-V(x))}}$; per integrazione si trova allora

$$t(x) - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{2(E - V(x'))}} \ , \tag{1.3.4}$$

con $x(t_0) = x_0$. Per integrazione e inversione si determina così, in linea di principio, il movimento $x(t)$; si dice allora che si è ricondotto il problema *alle quadrature*, cioè a un'integrazione, che (come l'inversione di una funzione) è un'operazione sostanzialmente più elementare della soluzione di un'equazione differenziale (molto meglio approssimabile, ad esempio, con metodi numerici).

- In un punto di inversione x_1, dal momento che $V(x_1) = E$, l'integrando nella (1.3.4) diverge. Tuttavia, essendo $V'(x_1) \neq 0$, è facile verificare che l'integrale è finito: infatti, poichè $E = V(x_1)$, il denominatore è

$$\sqrt{2(V(x_1) - V(x))} = \sqrt{-2V'(x_1)(x - x_1) + \dots} \simeq \text{cost}\sqrt{|x - x_1|} \ ,$$

e per $x \to x_1$ non si ha divergenza (ciò corrisponde al fatto fisicamente evidente che si giunge al punto di inversione in un tempo finito). Invece avvicinandosi a un massimo x^* di V — cioè muovendosi lungo una separatrice verso un punto di equilibrio instabile — l'integrando diverge più in fretta: questa volta infatti $V'(x_1) = 0$, pertanto

$$\sqrt{2(V(x^*) - V(x))} = \sqrt{-V''(x^*)(x - x^*)^2 + \dots} \simeq \text{cost}\,|x - x^*|$$

e l'integrale ha una divergenza logaritmica (più rapida ancora se, eccezionalmente, $V''(x^*) = 0$). Si verifica così anche in modo analitico che è infinito il tempo necessario per raggiungere un punto di equilibrio instabile lungo una separatrice. Anzi: nel caso tipico $V''(x^*) \neq 0$ si ha, come si è visto, $t(x) \simeq c\,\log(|x - x^*|)$, e corrispondentemente $x - x^* \simeq e^{t/c}$. Queste considerazioni elementari e generali portano a concludere che *la presenza degli esponenziali è la regola in prossimità dei punti di equilibrio instabile.*

Quando le traiettorie sono curve chiuse il moto corrispondente è periodico. Se x_1 e x_2 sono i punti di inversione, allora la (1.3.4) fornisce immediatamente il periodo del moto in funzione dell'energia: si trova subito infatti

$$T(E) = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E - V(x))}} \ .$$

Per un sistema come il pendolo, con una famiglia di traiettorie chiuse comprese tra un punto di minimo x^* di V (un punto di equilibrio stabile) e una coppia di separatrici, se

$$V(x) = V(x^*) + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \cdots \ ,$$

allora per energie piccole, prossime a $E^* = V(x^*)$, il sistema è ben approssimato dall'oscillatore armonico e il periodo corrispondentemente è ben approssimato da $T_0 = 2\pi/\omega$; più precisamente si ha

$$\lim_{E\to 0} T(E) = \frac{2\pi}{\omega} \ .$$

Lo si può dedurre, con un po' di attenzione, dalla regolarità delle soluzioni di un'equazione differenziale al variare dei parametri (proposizione 4).[16] D'altra parte, spingendo il dato iniziale verso la separatrice, il periodo necessariamente diverge.[17] La legge di dipendenza del periodo da E è così del tipo illustrato nella figura 1.12.

[16] Consideriamo per semplicità il caso

$$V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{3}\alpha x^3 \ , \qquad f = -V'(x) = -\omega^2 x - \alpha x^2 \ ;$$

la generalizzazione poi è facile. Effettuiamo il riscalamento $x = \varepsilon\tilde{x}$, $v = \varepsilon\tilde{v}$ (*"blow–up"* di un intorno del punto di equilibrio). Il nuovo sistema si trova facilmente essere

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{v} \ , \qquad \dot{\tilde{v}} = \tilde{f}(\tilde{x}) = -\omega^2\tilde{x} - \varepsilon\alpha\tilde{x}^3 \ ,$$

mentre le energie E e $\tilde{E}$, come è facile verificare, seguono la legge di scala $E = \varepsilon^2\tilde{E}$. Si vede così che prendere energie piccole è *esattamente* equivalente a prendere un sistema "sempre più armonico". Usando il teorema di continuità al variare dei parametri si deduce senza difficoltà che il periodo del moto (comune ai due sistemi) per $\varepsilon \to 0$ tende al periodo armonico $2\pi/\omega$.

[17] Il moto infatti deve seguire per tempi sempre più lunghi il moto sulla separatrice, che a sua volta spende un tempo infinito in prossimità del punto di equilibrio instabile.

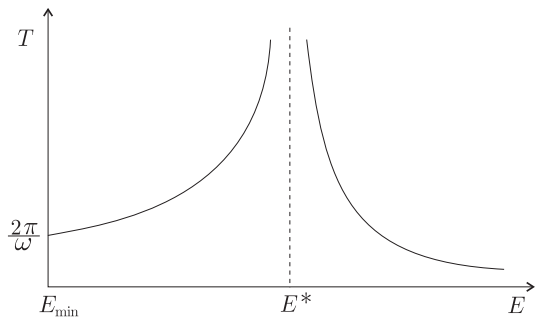

Figura 1.12: *La dipendenza del periodo T dall'energia E, per un sistema come il pendolo.*

1.4 Studio locale attorno ai punti critici

1.4.1 Linearizzazione delle equazioni in prossimità di un punto critico

Nel caso di sistemi conservativi a un grado di libertà la presenza di una costante del moto ha permesso di costruire facilmente il ritratto in fase in tutto il piano xv. Quando questo strumento viene meno l'analisi non è altrettanto immediata e allo stesso tempo il comportamento del sistema si fa più complesso. Si riesce tuttavia ancora a descrivere dettagliatamente il comportamento del sistema in prossimità dei punti critici (o di equilibrio), e a classificare in modo soddisfacente i comportamenti possibili, linearizzando le equazioni attorno a ciascun punto critico; dalle immagini locali non è poi difficile, in generale, comporre il ritratto in fase globale.

Del tutto in generale, la linearizzazione è un procedimento in cui si sostituisce a un problema non lineare (difficile) il sistema lineare (facile) che meglio lo approssima. Nell'ambito delle equazioni differenziali del primo ordine in $\mathbb{R}^n$, sono lineari i sistemi della forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \ , \tag{1.4.1}$$

ove A è una matrice (costante) $n \times n$. Sia dato allora un sistema non lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e sia $\mathbf{c}$ un suo punto critico. Con uno sviluppo di Taylor attorno a $\mathbf{c}$, posto $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{c}$ (cosicché $\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{x}}$), ricordando $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = 0$, si trova subito

$$\dot{\mathbf{x}}' = A\mathbf{x}' + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}'\|^2) \ ,$$

ove A è la matrice jacobiana di $\mathbf{f}$ calcolata in $\mathbf{c}$:

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{c}) \ .$$

Si ottiene allora il sistema lineare (1.4.1) trascurando il termine $\mathcal{O}(\|\mathbf{x}'\|^2)$ e rimuovendo gli apici (il che equivale a spostare l'origine degli assi sul punto $\mathbf{c}$). Per i particolari sistemi meccanici conservativi del tipo discusso nel paragrafo precedente A è una matrice 2×2 della forma specialissima

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x^*) & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{1.4.2}$$

ove x^* è la posizione di equilibrio; in presenza di forze dipendenti anche dalla velocità si ha la forma più generale, ma ancora particolare,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, 0) & \frac{\partial f}{\partial v}(x^*, 0) \end{pmatrix} ;$$

altri sistemi invece possono avere A a priori qualsiasi.

Esercizio 11 *Si determini la matrice A per i due punti critici del sistema di Lotka–Volterra.*

I sistemi lineari si sanno risolvere esattamente qualunque sia A, nel senso che la ricerca dell'integrale generale si riporta in ogni caso a un problema algebrico. Noi non ci addentreremo tuttavia in questo studio, un po' complesso e al di fuori del nostro interesse, per il quale rinviamo ai testi specializzati, e ci limiteremo al caso assai più semplice $n = 2$; inoltre anche per $n = 2$ privilegeremo la situazione, generica, in cui A ha autovalori distinti non nulli, rinviando il caso di autovalori coincidenti o nulli, per noi meno interessante, all'appendice B.

1.4.2 La classificazione dei punti critici in $\mathbb{R}^2$

Si verifica immediatamente che (per n qualsiasi)

Proposizione 8 *Per ogni autovettore $\mathbf{u}$ di A, con autovalore λ, esiste la soluzione particolare*

$$\mathbf{x}(t) = Ce^{\lambda t}\mathbf{u} .$$

Dimostrazione. Basta sostituire nell'equazione.[18] □

La proposizione risolve il problema nel caso generico in cui A abbia due autovettori indipendenti $\mathbf{u}^{(1)}$ e $\mathbf{u}^{(2)}$: in tal caso infatti l'integrale generale si scrive

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}^{(1)} + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}^{(2)} , \tag{1.4.3}$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie.

Proseguiamo qui supponendo $\mathbf{u}^{(1)}$ e $\mathbf{u}^{(2)}$ indipendenti, rinviando all'appendice B il caso in cui questa ipotesi non sia soddisfatta. La matrice A è reale, perciò λ_1 e λ_2 sono reali oppure complesso–coniugati. Se sono reali, anche gli autovettori $\mathbf{u}^{(1)}$ e $\mathbf{u}^{(2)}$ si possono prendere[19] reali. Il comportamento qualitativo della soluzione dipende allora dai segni di λ_1 e λ_2. I casi per noi più interessanti sono quelli n cui

$$0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0 ,$$

e li trattiamo qui di seguito; gli altri casi (autovalori coincidenti, un autovalore nullo) sono trattati in appendice.

[18] Si giunge naturalmente a soluzioni di questo tipo cercandole di tipo fattorizzato,

$$\mathbf{x}(t) = \tau(t)\mathbf{u} ,$$

con $\tau(t)$ funzione scalare $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vettore costante. (Le soluzioni di questa forma sono evidentemente speciali in quanto tutte le componenti $x_1, \ldots, x_n$ di $\mathbf{x}$ evolvono con la medesima legge temporale, e corrispondentemente la soluzione $\mathbf{x}(t)$ mantiene sempre la stessa direzione). Sostituendo nell'equazione (1.4.1) si trova $\dot{\tau}\mathbf{u} = \tau A\mathbf{u}$; questo richiede che $A\mathbf{u}$ sia parallelo a $\mathbf{u}$, cioè che $\mathbf{u}$ sia autovettore di A, $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$; per $\tau(t)$ si ha poi la facile equazione $\dot{\tau} = \lambda\tau$, risolta da $\tau(t) = Ce^{\lambda t}$. Per un procedimento simile si veda, nell'ambito della meccanica lagrangiana, il paragrafo sulle piccole oscillazioni.

[19] Non si dica "sono reali": infatti se $\mathbf{u}$ è autovettore, anche $c\mathbf{u}$ è autovettore, per c complesso qualsiasi. Tuttavia, se λ è reale, *esiste* $\mathbf{u}$ reale (*dimostrazione:* se $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono essi stessi autovettori).

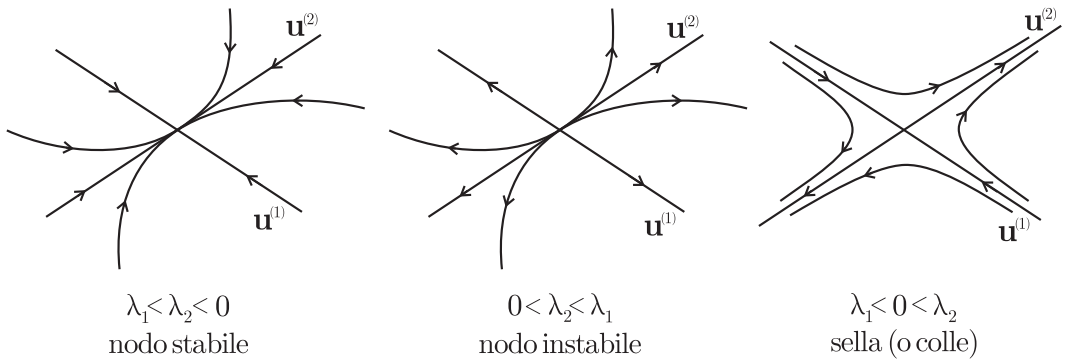

Figura 1.13: *Il caso degli autovalori reali*

(i) Se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, tutte le soluzioni tendono all'origine per $t \to \infty$. Si osservi che tutte tranne quella con $C_2 = 0$, che corre lungo la retta di $\mathbf{u}^{(1)}$, sono tangenti a $\mathbf{u}^{(2)}$: la componente parallela a $\mathbf{u}^{(1)}$ infatti si annulla più in fretta. Si veda la figura 1.13, sinistra. Il punto critico si dice *nodo stabile.*

(ii) Se all'opposto $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, tutte le soluzioni convergono all'origine per $t \to -\infty$ (provengono cioè dall'origine); si veda la figura 1.13, al centro. Il punto critico si dice *nodo instabile.*

(iii) Se infine $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, si hanno due soluzioni eccezionali, corrispondenti a $C_1 = 0$ e a $C_2 = 0$, che convergono all'origine, rispettivamente, lungo la retta di $\mathbf{u}^{(2)}$ per $t \to -\infty$ e lungo la retta di $\mathbf{u}^{(1)}$ per $t \to +\infty$; tutte le altre soluzioni divergono in entrambi i limiti, accostandosi asintoticamente all'una o all'altra retta. Si veda la figura 1.13, destra. Il punto critico si dice *sella* o anche *colle.*

Consideriamo ora il caso di autovalori complesso–coniugati, che denotiamo

$$\lambda_1 = \alpha + i\omega \ , \qquad \lambda_2 = \alpha - i\omega \ .$$

In tal caso si possono sempre prendere autovettori complesso–coniugati:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{v} + i\mathbf{w} \ , \qquad \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{v} - i\mathbf{w} \ .$$

La soluzione allora è reale se anche C_1 e C_2 sono complesso–coniugati,

$$C_1 = \rho e^{i\varphi} \ , \qquad C_2 = \rho e^{-i\varphi} \ .$$

Dalla (1.4.3), mettendo in evidenza i coefficienti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, si ottiene allora subito l'espressione

$$\mathbf{x}(t) = 2\,\rho\, e^{\alpha t}\,[\cos(\omega t + \varphi)\mathbf{v} - \sin(\omega t + \varphi)\mathbf{w}] \ ,$$

facilmente leggibile perché vi compaiono solo quantità reali. Abbiamo anche qui tre sottocasi (questa volta senza eccezioni):

(iv) $\alpha = 0$: in tal caso il moto è periodico, le traiettorie sono ellissi. Si veda la figura 1.14, parte sinistra. Il punto critico è detto *centro.*

(v) $\alpha < 0$: in tal caso il moto converge a spirale verso l'origine per $t \to \infty$; si veda la figura 1.14, al centro. Il punto critico è detto *fuoco stabile.*

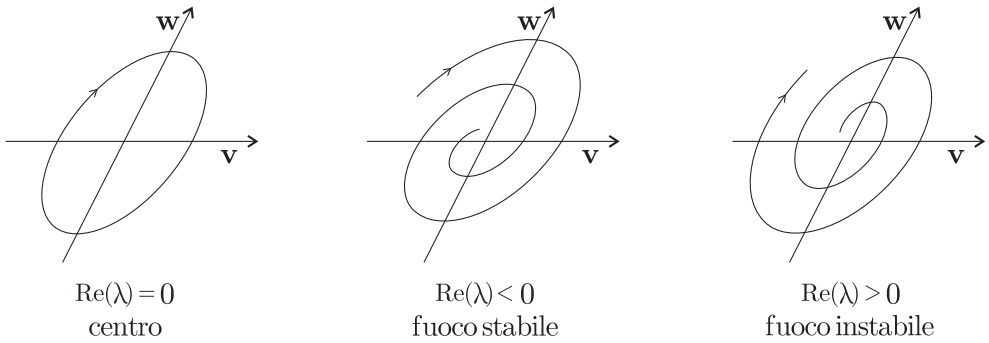

Figura 1.14: *Il caso degli autovalori complesso–coniugati*

(vi) $\alpha > 0$: in tal caso il moto converge a spirale verso l'origine per $t \to -\infty$; si veda la figura 1.14, a destra. Il punto critico è detto *fuoco instabile.*

E' molto facile distinguere tra tutti i sei casi sopra descritti, anche senza calcolare esplicitamente gli autovalori della matrice A, semplicemente considerandone la traccia e il determinante. Infatti, come si verifica immediatamente, l'equazione per λ è

$$\lambda^2 - (\mathrm{Tr}\, A)\lambda + \det A = 0 \ ;$$

allora, dalla formula risolutiva

$$2\lambda = \mathrm{Tr}\, A \pm \sqrt{\Delta} \ , \qquad \Delta = (\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4 \det A \ ,$$

si vede subito che si hanno i seguenti casi possibili:

a) autovalori reali di segno opposto, e dunque un punto di sella, se $\det A < 0$ (qualunque sia $\mathrm{Tr}\, A$);

b) autovalori reali concordi dello stesso segno di $\mathrm{Tr}\, A$, e dunque un nodo stabile o un nodo instabile rispettivamente per $\mathrm{Tr}\, A < 0$ e $\mathrm{Tr}\, A > 0$, se $\det A > 0$ e $\Delta > 0$;

c) autovalori complesso–coniugati con parte reale dello stesso segno di $\mathrm{Tr}\, A$, e dunque nell'ordine un fuoco stabile, un fuoco instabile o un centro, per $\mathrm{Tr}\, A$ minore, maggiore o uguale a zero, se $\Delta < 0$.

E' pertanto significativo fare riferimento al piano con coordinate $(\mathrm{Tr}\, A, \det A)$, si veda la figura 1.15. Tale piano risulta naturalmente diviso in regioni aperte dalle tre curve messe sopra in evidenza, precisamente $\det A = 0$ (asse orizzontale); $\mathrm{Tr}\, A = 0$ con $\det A > 0$ (semiasse verticale positivo); $\Delta = 0$ (la parabola riportata in figura), e ad ognuna di tali regioni aperte corrisponde un comportamento qualitativo ben preciso.

Si osservi che i casi lasciati indietro e trattati in appendice sono quelli corrispondenti alla prima e alla terza di queste curve: precisamente i casi $\det A = 0$ (un autovalore nullo) oppure $\Delta = 0$ (autovalori coincidenti); quest'ultimo caso comprende anche la situazione in cui A ha un solo autovettore e dunque non è diagonalizzabile.

- Per i sistemi conservativi a un grado di libertà la matrice A, come già si è detto, ha la forma (1.4.2), perciò *per tali sistemi la traccia è sempre nulla,* e (escludendo l'origine del diagramma,

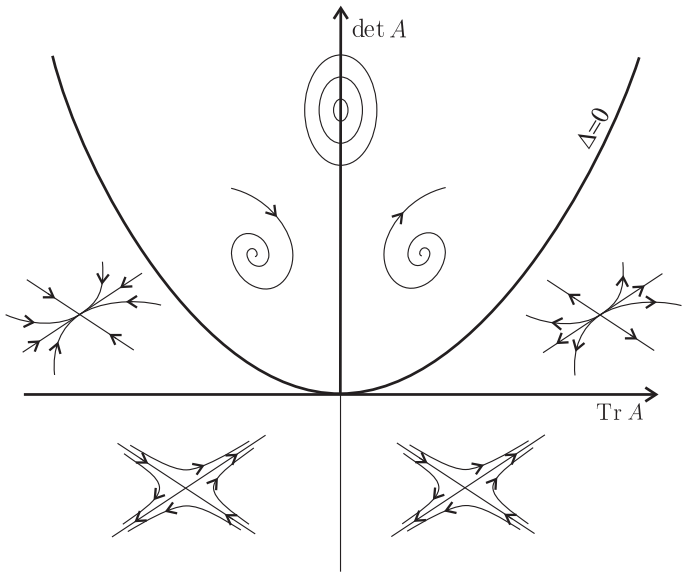

Figura 1.15: *Il diagramma di biforcazione per i punti critici del piano*

in cui $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) le uniche possibilità sono il centro, che si ha per $\det A > 0$, e la sella, che si ha per $\det A < 0$. Poiché per qusti sistemi $\det A = -f'(x^*) = V''(x^*)$, si ritrova il fatto che un minimo di V ($V'' > 0$) è un centro, un massimo è una sella.

- Si comprende che le regioni aperte limitate dalle tre curve critiche rappresentano in qualche modo la regola, cioè la situazione generica, mentre le curve stesse che fanno da bordo a questi aperti rappresentano situazioni eccezionali. E' principalmente per questo che abbiamo posposto, come meno importante, la trattazione del caso $\det A = 0$ (un autovalore nullo) e $\Delta = 0$ (autovalori coincidenti, eventualmente un solo autovettore). Il caso $\mathrm{Tr}\, A = 0$ è anch'esso eccezionale nell'ambito vasto in cui si ammettono tutte le possibili matrici, ma è ovviamente molto importante quando ci si restringa a priori ai sistemi conservativi.

Esercizio 12 *Si classifichi l'origine per l'oscillatore armonico smorzato. Si verifichi poi che in un sistema meccanico (non in generale): (i) il verso di rotazione dei fuochi è sempre orario; (ii)* $\mathbf{u}^{(1)}$ *e* $\mathbf{u}^{(2)}$ *hanno la direzione del secondo–quarto quadrante per un nodo stabile e la direzione del primo–terzo quadrante per un nodo instabile.*

Se ci limitiamo a considerare le sole proprietà di stabilità dell'origine per l'equazione lineare $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, è evidente che esse dipendono solo dal segno della parte reale degli autovalori (che è il segno degli autovalori stessi, nel caso reale). Precisamente si ha:

- stabilità asintotica per tempi positivi (negativi), se entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa (positiva); restano compresi sia i fuochi che i nodi stabili (instabili). Si adopera il termine *pozzo* (*sorgente*).
- instabilità per tempi positivi (negativi), se uno almeno degli autovalori ha parte reale positiva (negativa). Le selle in particolare sono instabili sia per tempi positivi che per tempi negativi.

Queste proprietà restano vere anche nel caso qui tralasciato di autovalori coincidenti o nulli (si veda l'appendice).

1.4.3 Il problema in $\mathbb{R}^n$; linearizzazione e stabilità

Le proprietà appena enunciate si trasportano senza variazioni ai sistemi in $\mathbb{R}^n$, come mostra la proposizione seguente che enunciamo senza dimostrazione:

PROPOSIZIONE 9 *Si consideri l'equazione lineare $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^n$. Se* tutti *gli autovalori hanno parte reale negativa (positiva) allora l'origine è asintoticamente stabile per tempi positivi (negativi). Se* uno almeno *degli autovalori ha parte reale positiva (negativa) allora l'origine è instabile per tempi positivi (negativi).*

Resta da esaminare una questione *importante e delicata:* fino a che punto le proprietà qui discusse per i sistemi lineari si trasportano ai sistemi non lineari ad essi prossimi. Per capire che c'è un problema, ovvero che le proprietà di stabilità dei sistemi non lineari possono a volte differire da quelle dei corrispondenti linearizzati, consideriamo l'oscillatore smorzato, con smorzamento non lineare, di equazione $\ddot{x} + \beta x^2 \dot{x} + \omega^2 x = 0$, ovvero il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 x - \beta x^2 v \ . \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio è l'origine e si ha

$$A = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{v})}{\partial(x, v)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Il sistema linearizzato è così l'oscillatore armonico, stabile ma non asintoticamente stabile per tutti i tempi (la linearizzazione con evidenza non vede lo smorzamento). D'altra parte il teorema di Ljapunov, usando l'ipotesi debole (b"), ci permette di concludere che per il sistema nonlineare, con $\beta > 0$, l'origine è asintoticamente stabile per tempi positivi, e dunque instabile per tempi negativi (viceversa se $\beta < 0$). Le proprietà di stabilità dunque in questo caso non combaciano. Un altro facilissimo controesempio, addirittura in $\mathbb{R}^1$, è offerto dall'esercizio qui sotto.

ESERCIZIO 13 *Si studi la stabilità dell'origine per le equazioni differenziali in $\mathbb{R}^1$*

$$\dot{x} = \alpha x^2 \ , \qquad\qquad \dot{x} = \alpha x^3 \ .$$

Non è difficile intuire quello che sta dietro ai controesempi: quando le proprietà del sistema lineare dipendono in modo essenziale dal fatto che la parte reale di uno o più autovalori è esattamente nulla, allora la stabilità è in qualche modo marginale e eventuali termini nonlineari possono diventare determinanti. Viceversa, come è chiarito dalla prossima proposizione, nota come *primo teorema di Ljapunov* (quello precedente è noto come *secondo teorema di Ljapunov*), se le proprietà di stabilità sono determinate dalla presenza di autovalori con parte reale a segno definito, le proprietà di stabilità del sistema linearizzato si trasportano senza variazioni al sistema non lineare.

PROPOSIZIONE 10 *Sia $\mathbf{c}$ un punto di equilibrio per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\mathbb{R}^n$ e sia A la matrice jacobiana di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{c}$, $A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{c})$.*

- *Se* tutti *gli autovalori hanno parte reale negativa (positiva) allora $\mathbf{c}$ è asintoticamente stabile per tempi positivi (negativi).*

- *Se* uno almeno *degli autovalori ha parte reale positiva (negativa) allora* $\mathbf{c}$ *è instabile per tempi positivi (negativi).*

Il caso non coperto dalla proposizione, pensando per semplicità al solo comportamento per $t > 0$, è quello in cui nessun autovalore ha parte reale positiva, ma uno o più autovalori hanno parte reale nulla. Lungo le corrispondenti direzioni (nel corrispondente piano, se si tratta di una coppia di autovalori immaginari coniugati) l'aggiunta dei termini non lineari potrebbe modificare in modo importante il moto e alterare le proprietà di stabilità del sistema.

- Chiudiamo il paragrafo con un'osservazione in un certo senso ovvia, ma importante: tutte le proprietà che abbiamo qui preso in considerazione sono invarianti per cambiamenti di coordinate. In generale un cambiamento locale di coordinate da $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ è un diffeomorfismo (trasformazione regolare invertibile con inversa regolare)

$$\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{y}) \ , \qquad \mathbf{y} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}) \ ,$$

da un aperto $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ dove sta la nuova variabile $\mathbf{y}$ a un aperto $\mathcal{U}$ dove sta la variabile $\mathbf{x}$. La regolarità impone che la matrice jacobiana $J = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}}$ sia invertibile. Poiché $\dot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}}$, l'equazione differenziale nella variabile $\mathbf{y}$ prende la forma

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \qquad \text{con} \qquad \mathbf{g}(\mathbf{y}) = J^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) \ . \tag{1.4.4}$$

Sia ora $\mathbf{c} \in \mathcal{U}$ un punto critico per il primo sistema, ovvero $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = 0$, e sia $\mathbf{c} = \mathbf{h}(\mathbf{d})$. Con evidenza si ha $\mathbf{g}(\mathbf{d}) = 0$, ovvero $\mathbf{d}$ è punto critico per il sistema (1.4.4). Denotata poi con B la matrice jacobiana del nuovo sistema in $\mathbf{d}$, si trova immediatamente

$$B = J^{-1}(\mathbf{d})\, A\, J(\mathbf{d}) \ ;$$

ne consegue che B e A hanno, in particolare, gli stessi autovalori (e la stessa traccia e determinante). Quanto alle proprietà di stabilità, la nozione di stabilità alla Ljapunov che abbiamo introdotto è interamente topologica, e dunque invariante addirittura per homeomorfismi.

Esercizio 14 *Si classifichino i due punti di equilibrio del sistema di Lotka–Volterra. Utilizzando la costante del moto* $F(x, y) = \delta x - \log x + \beta y - \log y$ *(esercizio 6) si tracci poi il ritratto in fase del sistema.* Il ritratto è in figura 1.16, parte alta: a sinistra il ritratto "fatto a mano", con le indicazioni per tracciarlo (si osservi in particolare l'andamento delle frecce sugli assi e sulle rette $x = \gamma/\delta$ e $y = \alpha/\beta$); a destra una figura realistica, ottenuta mediante integrazione numerica delle equazioni del moto. In basso si vede l'andamento di $x(t), y(t)$ per una traiettoria (quella tracciata con una linea più spessa nel ritratto realistico).

1.4.4 Ritratti in fase in $\mathbb{R}^2$ per sistemi non conservativi

Quando non vi sia una quantità conservata, tracciare il ritratto in fase in dimensione bassa, precisamente in $\mathbb{R}^2$, è un po' più laborioso ma non difficile. Le considerazioni svolte nei paragrafi precedenti consentono di rappresentare l'andamento delle traiettorie localmente in prossimità dei punti critici; si tratta allora di connettere tra loro in modo appropriato questi "ritratti locali". Vediamo come esempio il pendolo debolmente smorzato, di equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin x - 2\mu v \ . \end{cases}$$

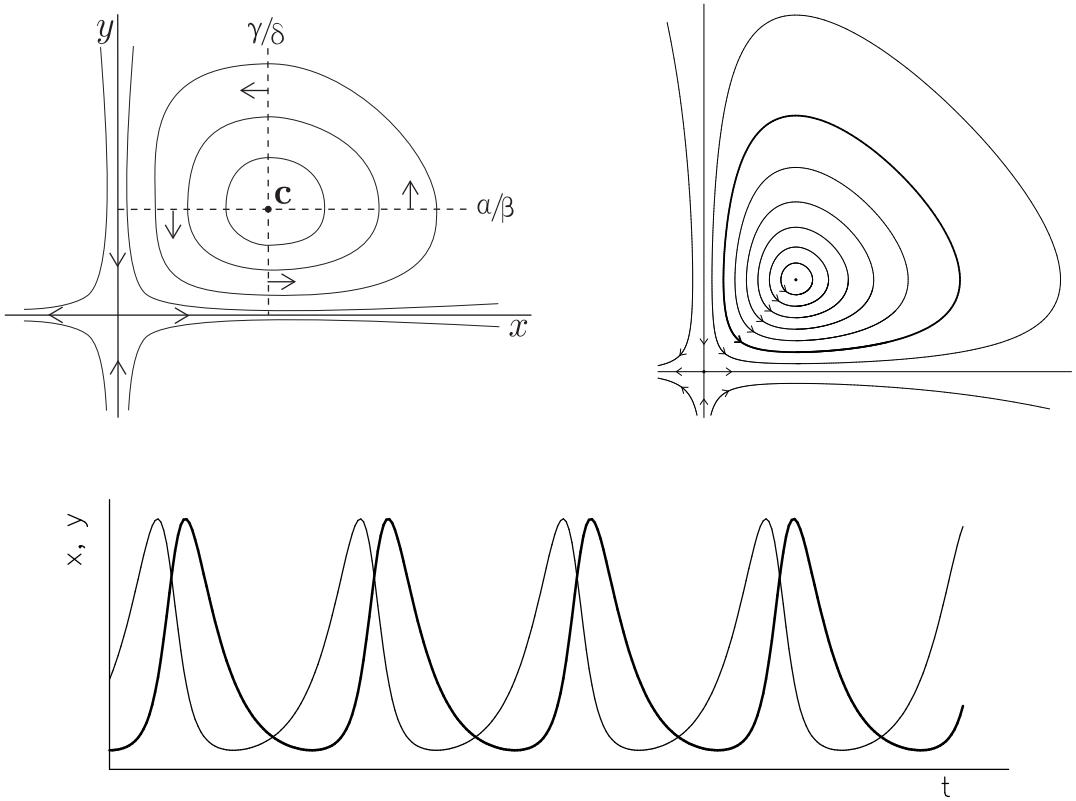

Figura 1.16: *Parte alta: il ritratto in fase per il sistema di Lotka–Volterra. A sinistra: figura "a mano", con le indicazioni per tracciarla; a destra: figura realistica ottenuta mediante integrazione numerica delle equazioni del moto, in corrispondenza ai valori* $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ *delle costanti. (Per completezza sono state tracciate anche alcune traiettorie con* $x, y < 0$*.) In basso: l'andamento di* $x(t)$ *e* $y(t)$*, per la traiettoria tracciata nell'immagine precedente con una linea più spessa.*

Conviene pensare x come una coordinata sull'intera retta, distinguendo punti che differiscono per multipli di 2π ("pendolo col contagiri"). I punti di equilibrio sono allora tutti e soli i punti $\mathbf{c}_k = (x_k^*, 0)$ con $x_k = k\pi$; la matrice jacobiana in $\mathbf{c}_k$ è

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix} \qquad \text{oppure} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix} ,$$

rispettivamente per k pari e per k dispari. Per k pari e μ piccolo, precisamente $0 < \mu < \omega$, si ha un fuoco stabile; per k dispari si ha invece una sella. L'andamento locale intorno ai punti di equilibrio è rappresentato in figura 1.17 (curve piene). Per connettere tra loro i ritratti locali bisogna innanzitutto capire cosa succede alle separatrici, cioè alle curve entranti e uscenti dai punti di sella. Per dissipazione nulla, $\mu = 0$, la curva uscente, ad esempio, da $(-\pi, 0)$ nel semipiano $v > 0$ raggiunge asintoticamente $(\pi, 0)$. Per $\mu > 0$ si perde invece energia: non si riesce più a raggiungere $(\pi, 0)$ e il movimento per $t \to \infty$ si avvicina spiraleggiando all'origine (curva tratteggiata n. 1). Viceversa, la curva che raggiunge asintoticamente per $t \to \infty$ il punto $(\pi, 0)$ deve avere per $x = -\pi$ energia maggiore della precedente, e dunque velocità positiva (curva tratteggiata n. 2). Procedendo con questi ragionamenti si costruisce facilmente il ritratto in fase completo, rappresentato in figura 1.18. L'area grigia in figura, delimitata da separatrici, individua moti con il medesimo comportamento qualitativo: vanno a cadere asintoticamente sul medesimo punto di equilibrio stabile (compiono un ugual numero di giri, prima di mettersi a oscillare).

Esercizio 15 *Si tracci il ritratto in fase per la doppia buca con dissipazione:*

$$\dot{x} = v \ , \qquad \dot{v} = \omega^2 x - \alpha x^3 - 2\mu v \ .$$

Esercizio 16 *Si consideri il sistema di Lotka–Volterra modificato con l'aggiunta di competizione tra le prede:*

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy - \varepsilon x^2 \ , \qquad \dot{y} = -\gamma y + \delta xy$$

per $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon > 0$, ε piccolo. Si determinino e si classifichino i punti critici e si tracci il ritratto in fase del sistema (in tutto $\mathbb{R}^2$). Il ritratto in fase è in figura 1.19 (figura realistica ottenuta mediante integrazione numerica; valore dei parametri: $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $\varepsilon = 0.3$).

- Benché non sia facile enunciare un metodo generale per costruire i ritratti in fase in assenza di una costante del moto, in dimensione due come si e detto la cosa non è mai difficile. Cio è dovuto a due proprietà, valide per n qualsiasi ma che in dimensione due diventano molto stringenti:

  (i) diverse traiettorie non possono mai intersecarsi;

  (ii) localmente, ove non vi siano punti critici, le traiettorie si possono sempre deformare in modo differenziabile, fino a farle divenire linee rette parallele.

  Quest'ultima proprietà merita una spiegazione. L'idea è questa: sia $\hat{\mathbf{x}}$ un punto ordinario, $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \neq 0$, e sia Σ una superficie trasversa a $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$, sufficientemente piccola; si veda la figura 1.20. Consideriamo un "intorno tubolare" $\mathcal{W}$ della traiettoria con dato iniziale $\hat{\mathbf{x}}$, formato dalle traiettorie con dato iniziale $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$ portate avanti e indietro per un intervallo di tempo $|t| < \tau$, con un qualche τ fissato; se τ non è troppo grande, si può essere certi che per $|t| < \tau$ i moti non ripassano per Σ. Fissate a piacere $n-1$ coordinate $\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}$ su Σ, possiamo assegnare a ogni punto $\mathbf{x}$ di $\mathcal{W}$ nuove coordinate $y_1, \ldots, y_n$ nel modo seguente:

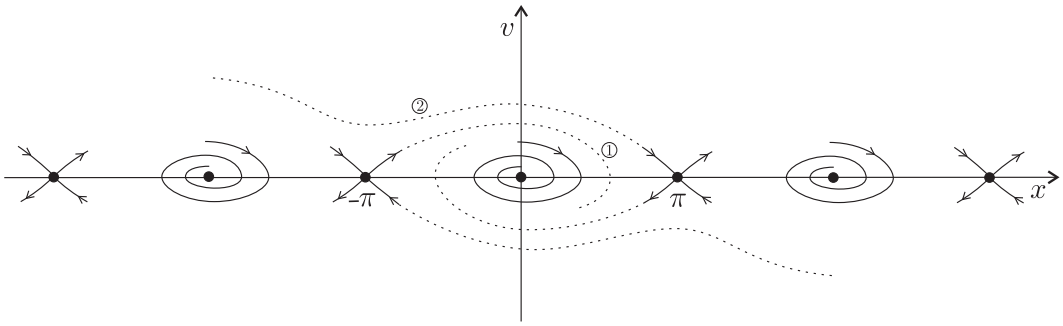

Figura 1.17: *Ritratti in fase locali per il pendolo debolmente smorzato; costruzione globale delle separatrici.*

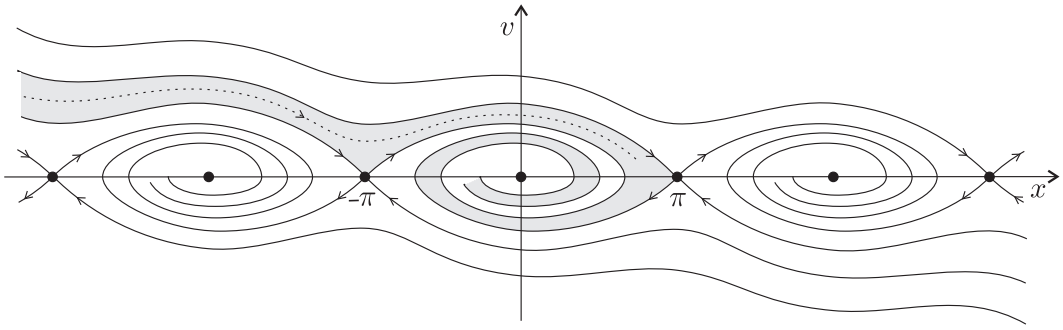

Figura 1.18: *Il ritratto in fase globale per il pendolo debolmente smorzato.*

– ci si muove lungo la traiettoria che passa per $\mathbf{x}$ fino a incontrare Σ in un punto $\mathbf{x}_0$; se $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ sono le coordinate di $\mathbf{x}_0$ su Σ, si pone $y_i = \sigma_i$, $i = 1, \ldots, n-1$;
– come n–esima coordinata si prende $y_n =$ tempo di percorrenza da $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$ a $\mathbf{x}$.

Il cambiamento di coordinate così costruito è un diffeomorfismo che manda $\mathcal{W}$ in $\Sigma \times (-\tau, \tau)$ e nelle nuove cooordinate le equazioni del moto, banali, sono

$$\begin{cases} \dot{y}_i = 0 & \text{per} \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ \dot{y}_n = 1 \ . \end{cases}$$

Il moto avviene così su rette parallele all'n–esimo asse coordinato. Queste considerazioni si potrebbero formalizzare nel cosiddetto *teorema di rettificazione,* per il quale si demanda a testi specializzati.

Le proprietà (i) e (ii) sono vere in dimensione qualsiasi. Ma mentre in dimensione $n \geq 3$ le traiettorie possono ugualmente attorcigliarsi, scavalcandosi e producendo situazioni complicate (si veda il paragrafo 1.6), in dimensione due ciò non risulta possibile.

1.4.5 Biforcazioni

Consideriamo ora un sistema contenente un parametro, ad esempio l'oscillatore armonico smorzato di equazioni $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -\omega^2 x - 2\mu v$; per fissare le idee pensiamo ω fisso e μ variabile (ma conterà

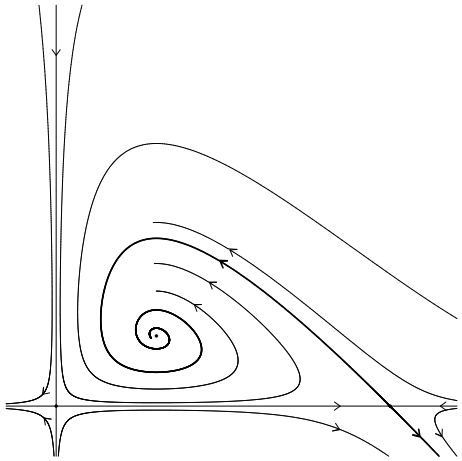

Figura 1.19: *Il ritratto in fase per il sistema di Lotka–Volterra modificato.*

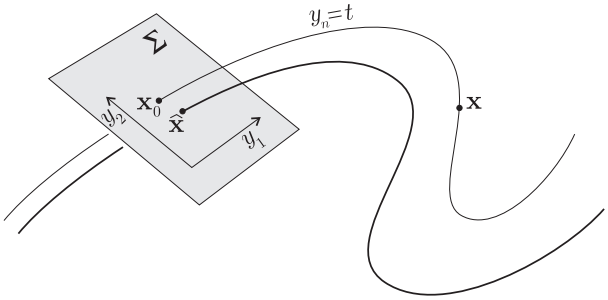

Figura 1.20: *Il procedimento di rettificazione.*

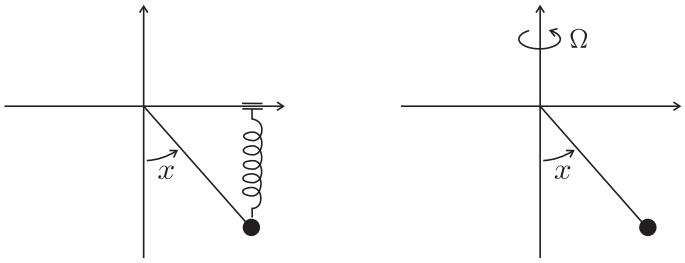

Figura 1.21: *Due dispositivi meccanici che realizzano il sistema (1.4.5).*

solo la quantità adimensionale μ/ω). L'origine $\mathbf{c} = (0,0)$ è punto di equilibrio per ogni valore di μ; la corrispondente matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix} ,$$

e dunque si ha

$$\det A = \omega^2 , \qquad \operatorname{Tr} A = -2\mu , \qquad \tfrac{1}{4}\Delta = \mu^2 - \omega^2 .$$

Variando μ il punto rappresentativo del sistema nel diagramma di biforcazione $\det A, \operatorname{Tr} A$ si sposta, e per $\mu = \omega$ attraversa la linea critica $\Delta = 0$; corrispondentemente il comportamento qualitativo cambia da fuoco stabile a nodo stabile.

Il fenomeno per cui il comportamento qualitativo di un sistema cambia quando un parametro attraversa un valore critico è detto *biforcazione.* Vediamo qui di seguito i principali esempi che si possono avere in bassa dimensionalità.

a) Biforcazione "a forchetta"

Si consideri l'equazione $\ddot{x} = -\omega^2 \sin x + \Omega^2 \sin x \cos x$, ovvero il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} \qquad \text{con} \qquad f(x) = -\omega^2 \sin x + \Omega^2 \sin x \cos x . \tag{1.4.5}$$

Una semplice interpretazione è suggerita dalla figura 1.21: un pendolo semplice di massa m e lunghezza l è soggetto, oltre che al peso, a una forza elastica di costante elastica k che lega m alla sua proiezione sull'asse orizzontale; procedendo in modo elementare si ottiene subito, in luogo del pendolo, il sistema (1.4.5) con $\omega^2 = g/l$ e $\Omega^2 = k/m$. Un'altra possibile interpretazione della (1.4.5) è quella del *pendolo centrifugo* (detto anche *regolatore di Watt*), ovvero un pendolo piano il cui piano di oscillazione ruota uniformemente attorno alla verticale con velocità angolare Ω; il termine $\Omega^2 \sin x \cos x$, che si aggiunge all'equazione del moto del pendolo, è dovuto in questo caso alla forza centrifuga che bisogna introdurre per poter scrivere l'equazione di Newton nel sistema di riferimento rotante.

Determiniamo innanzitutto i punti di equilibrio, che sono evidentemente del tipo $(x^*, 0)$ con x^* tale che $f(x^*) = 0$. Si trovano immediatamente le soluzioni $x_1^* = 0$ e $x_2^* = \pi$ e inoltre

$$x_{3,4}^* = \pm \arccos \frac{\omega^2}{\Omega^2} ,$$

purché però sia soddisfatta la condizione di esistenza $\Omega^2/\omega^2 > 1$. Si osservi che $x_{3,4}^*$ coincidono con l'origine quando $\Omega^2/\omega^2 = 1$ e tendono a $\pm\pi/2$ per $\Omega^2/\omega^2 \to \infty$. La matrice A in $\mathbf{c}_i = (x_i^*, 0)$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x_i^*) & 0 \end{pmatrix} , \qquad \text{con} \qquad f'(x) = -\omega^2 \cos x + \Omega^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) .$$

Come per tutti i sistemi meccanici conservativi la traccia è nulla e si ha un centro per $f'(x_i^*) < 0$ ($V''(x_i^*) > 0$, un minimo di V) e una sella per $f'(x_i^*) > 0$ (un massimo di V).

Il punto $(\pi, 0)$ si vede subito essere una sella per tutti i valori dei parametri, dunque non ha biforcazioni. L'origine invece biforca, precisamente è un centro per $\Omega^2/\omega^2 < 1$ e un colle per $\Omega^2/\omega^2 > 1$. Quanto a $x_{3,4}^*$, essi sono sempre centri (la condizione perché siano tali è la loro stessa condizione di esistenza). Un'utile rappresentazione sintetica della biforcazione si ottiene riportando in un grafico la posizione dei punti x_i^* in funzione del parametro Ω^2/ω^2; si veda la figura 1.22. Si è usata una linea piena per i punti stabili (i centri), tratteggiata per i punti instabili (le selle). Si

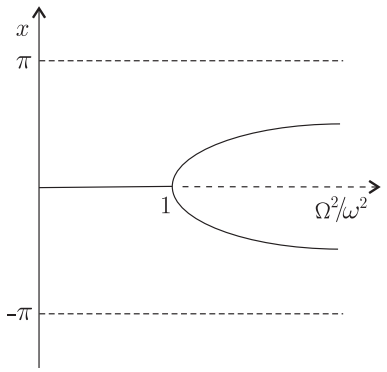

Figura 1.22: *Il grafico della biforcazione a forchetta per l'equazione (1.4.5).*

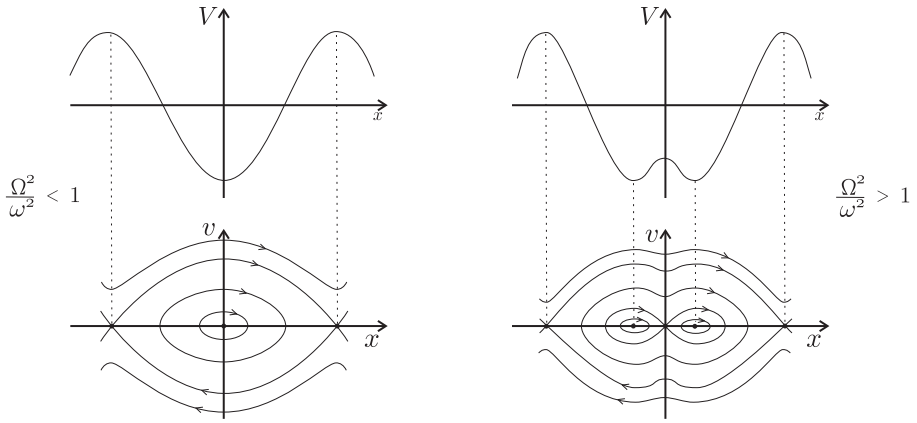

Figura 1.23: *Grafico del potenziale e ritratto in fase per il sistema (1.4.5), prima e dopo la biforcazione.*

è aggiunto per completezza il punto di equilibrio $(\pi, 0)$, pur estraneo alla biforcazione (ripetendolo simmetricamente in $(-\pi, 0)$). Il nome *biforcazione a forchetta* (inglese *pitchfork,* che però è il forcone da fieno) deriva evidentemente dalla forma del grafico. La figura 1.23 riporta il grafico del potenziale e il ritratto in fase del sistema prima e dopo la biforcazione.

L'eventuale aggiunta di un termine dissipativo, nullo per $v = 0$, non altera la posizione dei punti di equilibrio, ma ne modifica la classificazione potendo mutare la stabilità in stabilità asintotica (i centri sono mutati in fuochi o nodi; le selle restano selle). Per capire si consideri il sistema (1.4.5) e si aggiunga a f il termine dissipativo $-2\mu v$; si riclassifichino i punti critici. Il risultato è in figura 1.24 (sinistra), ove si sono denotati con una linea continua sottile i fuochi stabili, con una linea più spessa i nodi stabili; si è supposto $\mu < \omega$. Il comportamento del punto rappresentativo dell'origine nel piano $\det A, \operatorname{Tr} A$ è in figura 1.24 (destra). Mentre prima, nel caso conservativo, avveniva un'unica biforcazione da centro a sella, qui (al crescere del rapporto Ω^2/ω^2, per μ fissato) ne avvengono due in successione: da fuoco stabile a nodo stabile, poi da nodo stabile a sella. Si comprende che il caso conservativo è eccezionale, mentre quello dissipativo è generico. La figura 1.25 mostra il comportamento degli autovalori nei due casi.

Dal punto di vista della forma di f, la biforcazione a forchetta è rappresentata in figura 1.26, sinistra: variando il parametro la derivata $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, 0)$ cambia segno e localmente f passa dalla forma

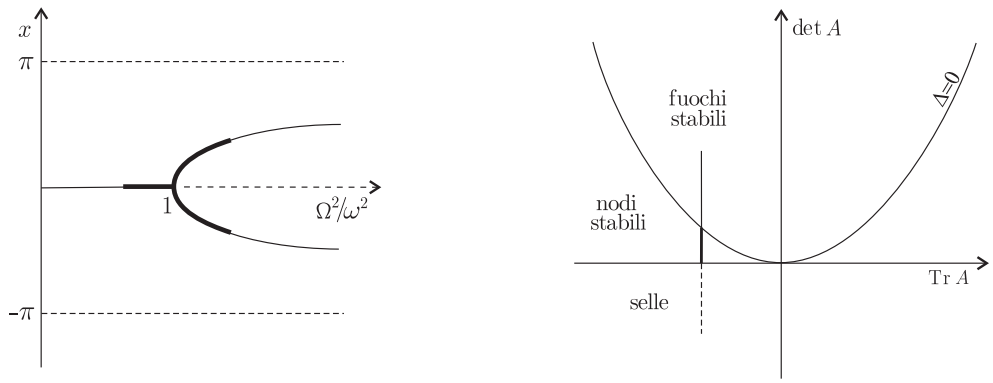

Figura 1.24: *Il grafico della biforcazione a forchetta con dissipazione.*

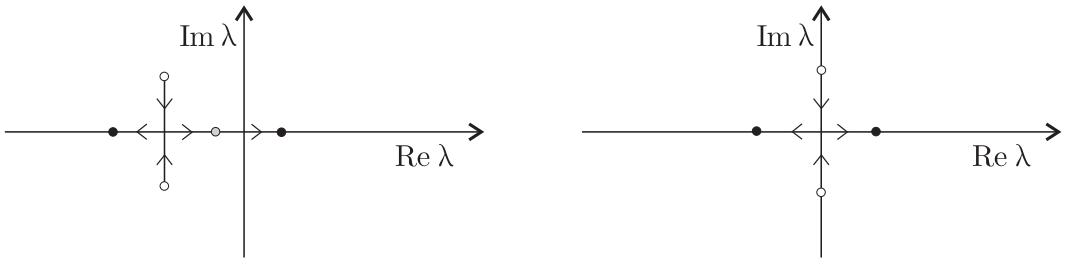

Figura 1.25: *Il comportamento degli autovalori nel caso generico dissipativo (sinistra) e nel caso conservativo (destra).*

I alla forma III; la forma II, con un flesso in x^*, corrisponde al valore critico del parametro.

b) Biforcazione a forchetta inversa

Una biforcazione a forchetta solo apparentemente diversa si ottiene percorrendo a rovescio una biforcazione a forchetta, per esempio cambiando segno o invertendo il parametro in uso. Una situazione più interessante, diversa dal punto di vista della stabilità dei punti critici implicati nella biforcazione, è quella in cui un punto instabile diventa stabile "emettendo" una coppia di punti instabili; si veda la figura 1.27, destra. Un sistema meccanico che presenta questo tipo di biforcazione è rappresentato nella parte sinistra della figura. Dal punto di vista della forma di $f(x, 0)$, l'andamento corrispondente è quello della parte centrale della figura 1.26.

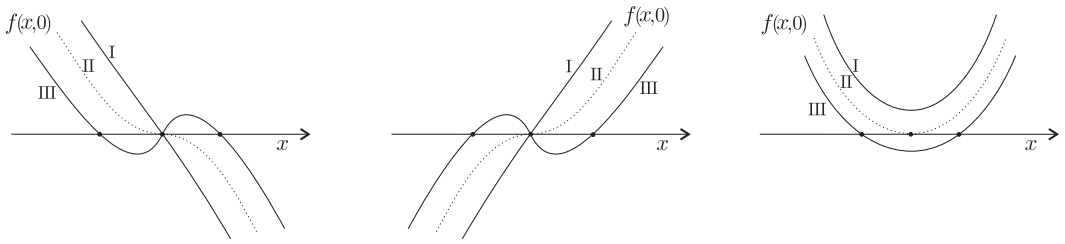

Figura 1.26: *Il comportamento di $f(x, 0)$ nei diversi tipi di biforcazione.*

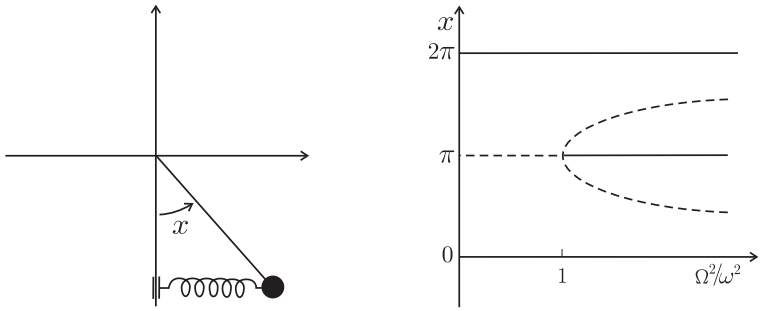

Figura 1.27: *La biforcazione a forchetta inversa.*

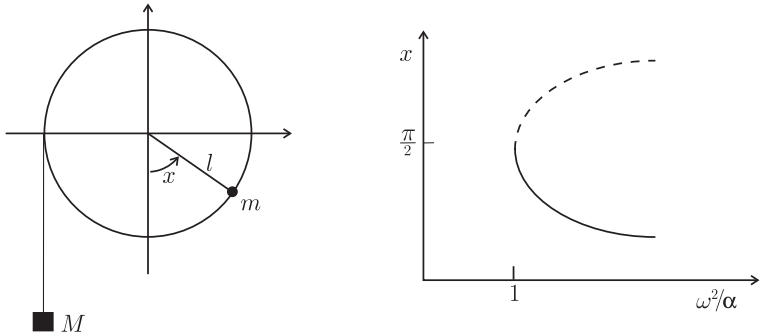

Figura 1.28: *La biforcazione tangente.*

Esercizio 17 *Si consideri il sistema*

$$\dot{x} = v \ , \qquad \dot{v} = -\omega^2 \sin x - \Omega^2 \sin x \cos x \ ;$$

si determinino e si classifichino i punti critici, tracciando il grafico della biforcazione. Si traccino anche il grafico del potenziale e il ritratto in fase del sistema nelle diverse condizioni, prendendo come parametro il rapporto Ω^2/ω^2*. Si studi poi in modo analogo il sistema ottenuto aggiungendo una forza dissipativa* $-2\mu v$*.*

c) Biforcazione tangente

Consideriamo l'equazione che si ottiene aggiungendo all'equazione del pendolo un termine costante, ovvero $\ddot{x} = -\omega^2 \sin x + \alpha$, equivalente il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin x + \alpha \ ; \end{cases}$$

una possibile realizzazione è data dal dispositivo meccanico rappresentato in figura 1.28, sinistra, per il quale si ha $\omega^2 = \frac{m}{m+M}\frac{g}{l}$ e $\alpha = \frac{M}{m}\omega^2$. Si vede immediatamente che non vi sono punti di equilibrio per $\omega^2 < |\alpha|$, mentre ve ne sono due, uno stabile e uno instabile, per $\omega^2 > |\alpha|$.

Anche la comparsa o scomparsa di punti di equilibrio al variare di un parametro è considerata una biforcazione; il suo grafico, per l'esempio che stiamo seguendo, è rappresentato in figura 1.28, destra. Questa biforcazione è nota come *biforcazione tangente*; il nome deriva dall'andamento di $f(x, 0)$ al variare del parametro, rappresentato nella parte destra di figura 1.26.

Esercizio 18 *Si traccino il grafico del potenziale e il ritratto in fase per la biforcazione tangente in un sistema meccanico conservativo.*

Lo studio di una ulteriore interessante biforcazione esclusiva dei sistemi dissipativi, detta *biforcazione di Hopf*, è posposta allo studio del ciclo limite, cui è dedicato il prossimo paragrafo.

- Sia per la biforcazione a forchetta, diretta o inversa, sia per la bifircazione tangente, al variare del parametro μ abbiamo assistito alla comparsa o scomparsa di punti di equilibrio. Ciò si è verificato, in entrambi i casi, quando il sistema, muovendosi al variare di μ nel diagramma di biforcazione, attraversava l'asse delle ascisse, ovvero per $\det A = 0$. Effettivamente, l'annullarsi del determinante è condizione necessaria perché ciò possa avvenire, e questo anzi è vero, ben al di là del contesto in cui stiamo ragionando, per generiche equazioni differenziali $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_\mu(\mathbf{x})$ in $\mathbb{R}^n$, dipendenti da un parametro μ. Precisamente:

Proposizione 11 *Se* $\mathbf{c}$ *è un punto critico del campo vettoriale* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, e risulta*

$$\det\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)(\mathbf{c}) \neq 0 \ , \tag{1.4.6}$$

allora $\mathbf{c}$ *è un punto critico isolato (ovvero in un intorno di* $\mathbf{c}$ *non vi sono altri punti critici).*

Se poi si ha un campo vettoriale $\mathbf{f}_\mu$ *dipendente da un parametro* μ*, e* $\mathbf{c}^*$ *è un punto critico corrispondente al valore* μ^* *del parametro, ovvero* $\mathbf{f}_{\mu^*}(\mathbf{c}^*) = 0$*, e risulta*

$$\det\Big(\frac{\partial f_{\mu^*,i}}{\partial x_j}\Big)(\mathbf{c}^*) \neq 0 \ ,$$

allora per μ *prossimo a* μ^* *esiste un punto di equilibrio* $\mathbf{c}(\mu)$ *isolato prossimo a* $\mathbf{c}^*$*.*

I punti di equilibrio $\mathbf{c}$ di un campo vettoriale $\mathbf{f}$, nei quali si ha $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) \neq 0$, sono detti punti critici *trasversi* di $\mathbf{f}$.

Dimostrazione. Il primo punto è un classico risultato di analisi, secondo cui una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})(\mathbf{x}) \neq 0$ manda un intorno di $\mathbf{x}$ in un intorno di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in modo biunivoco; in particolare, $\mathbf{f}$ manda biunivocamente un intorno di $\mathbf{c}$ in un intorno dell'origine, pertanto (localmente) $\mathbf{c}$ è l'unica antimmagine dell'origine, ovvero è un punto critico isolato. Il secondo punto non è altro che una riformulazione del teorema della funzione implicita. Per riconoscerlo, conviene usare la notazione $\mathbf{f}(\mu, \mathbf{x})$ al posto di $\mathbf{f}_\mu(\mathbf{x})$. Con questa notazione, il teorema della fuzione implicita garantisce che nell'intorno di un punto $(\mu^*, \mathbf{x}^*)$ in cui $\mathbf{f}$ si annulla, l'equazione $\mathbf{f}(\mu, \mathbf{x}) = 0$ definisce implicitamente una funzione $\mathbf{c}(\mu)$, tale che $\mathbf{f}(\mu, \mathbf{c}(\mu)) = 0$ identicamente; $\mathbf{c}(\mu)$ è precisamente il punto critico che cercavamo. Per continuità, il determinante resta diverso da zero, e dunque il punto critico $\mathbf{c}(\mu)$ è ancora isolato.

□

Chi non è familiare con l'invertibilità delle funzioni: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e con il teorema della funzione implicita in dimensione alta, può tradurre enunciato e dimostrazione al caso di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.5 Il fenomeno del ciclo limite

1.5.1 L'orologio meccanico

Ci proponiamo qui di costruire un modello matematico, più semplice possibile, che riproduca la fenomenologia dell'orologio meccanico. Sistemi conservativi che eseguono moti periodici, come l'oscillatore armonico o il pendolo, differiscono in modo sostanziale dall'orologio per due motivi importanti.

- Innanzitutto non tengono conto della dissipazione che per quanto piccola è sempre presente negli oggetti reali. Un modello di orologio deve contenere un termine dissipativo e allo stesso tempo un meccanismo in grado di immettere energia nel sistema per compensare la dissipazione.
- Mentre l'oscillatore e il pendolo hanno un continuo di moti periodici, di ampiezza qualsiasi fissata dal dato iniziale, l'orologio invece (si pensi al comportamento familiare di un orologio a pendolo) ha un unico moto periodico di una ben definita ampiezza; anche se messo in movimento con dato iniziale diverso, si porta da solo (asintoticamente) a questo moto particolare, eseguendo oscillazioni di ampiezza crescente se l'ampiezza iniziale è troppo piccola e decrescente se troppo grande. *Questa presenza di un singolo moto periodico, col suo fissato periodo, è essenziale per il buon funzionamento dell'orologio:* diversamente il sistema (si ricordi che il pendolo *non* è isocrono) avrebbe periodo dipendente dal dato iniziale.

Occorre pertanto un sistema che presenti una singola traiettoria chiusa, alla quale si accostino asintoticamente le traiettorie vicine. A traiettorie di questo tipo fu dato da Poincaré il nome significativo di *ciclo limite*. Una definizione formale è la seguente:[20]

Definizione 8 *Una curva chiusa $\mathcal{C}$ priva di punti critici si dice essere un* ciclo limite stabile (instabile) *per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\mathbb{R}^2$, se esiste un aperto $\mathcal{B}$ contenente $\mathcal{C}$ tale per ogni dato iniziale $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ si ha*

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \mathcal{C}) \to 0 \qquad \text{per} \qquad t \to \infty \quad (t \to -\infty) \ . \tag{1.5.1}$$

Per continuità, $\mathcal{C}$ è necessariamente una traiettoria. L'aperto $\mathcal{B}$ è chiamato *bacino di attrazione* del ciclo limite; l'insieme di tutti i punti per cui vale la la (1.5.1) è detto *bacino di attrazione massimale* (è frequente tuttavia l'uso del termine "bacino di attrazione" per indicare il bacino di attrazione massimale).

Un esempio semplicissimo, ma ciononostante abbastanza realistico per rappresentare quello che veramente avviene in un orologio meccanico, si ottiene a partire da un oscillatore o un pendolo smorzato aggiungendovi un termine impulsivo. Consideriamo per fissare le idee un oscillatore armonico debolmente smorzato:

$$\dot{x} = v \ , \qquad \dot{v} = -\omega^2 x - 2\mu v \ ,$$

[20] Una nozione più generale è quella di *attrattore*. Un insieme chiuso X si dice essere un attrattore per un sistema, se esiste un aperto $\mathcal{B}$ contenente X, invariante in avanti, tale che, denotato con Φ^t il flusso del sistema, si ha

$$\bigcap_{t \geq 0} \Phi^t(\mathcal{B}) = X \ .$$

Un punto fisso asintoticamente stabile e un ciclo limite stabile sono esempi di attrattori. Nella moderna teoria dei Sistemi Dinamici hanno grande importanza attrattori che non sono né traiettorie né varietà lisce, ma insiemi più complessi ("strani"), con struttura "frattale", che fanno da supporto a moti cosiddetti caotici.

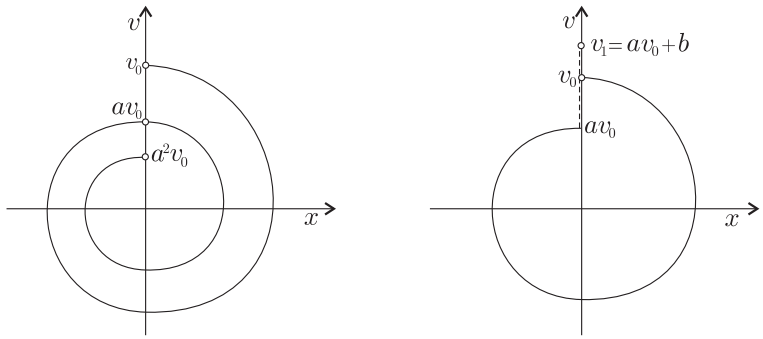

Figura 1.29: *L'oscillatore forzato impulsivamente.*

e fissiamo un dato iniziale $(0, v_0)$ sulla semiretta $x = 0$, $v > 0$. Il movimento che ne segue,

$$x(t) = \frac{v_0}{\sigma} e^{-\mu t} \sin \sigma t \ , \qquad v(t) = v_0 e^{-\mu t} \Big(- \frac{\mu}{\sigma} \sin \sigma t + \cos \sigma t \Big) \ , \tag{1.5.2}$$

ove $\sigma = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$, riattraversa la semiretta a intervalli regolari di tempo $T = 2\pi/\sigma$, in corrispondenza a valori di velocità v_1, v_2, ... decrescenti; si veda la figura 1.29. Dalla (1.5.2) si ricava la legge elementare

$$v_{k+1} = a\, v_k \ , \qquad a = e^{-\mu T} < 1 \ ,$$

che dà $v_k = a^k v_0$.

Aggiungiamo ora al sistema una forzante impulsiva che agisce nel modo seguente: nell'istante in cui la x passa per lo zero con $v > 0$, si trasmette all'oscillatore un impulso istantaneo positivo, che ne incrementa la velocità di una quantità fissa $b > 0$; l'idea è che l'oscillatore subisca un urto da un dispositivo liberato proprio dal passaggio di x sullo zero (meccanismo di *scappamento* dell'orologio).[21] Così, al primo passaggio si avrà velocità av_0 prima dell'urto e velocità $v_1 = av_0 + b$ dopo l'urto; al secondo passaggio si ha $av_1 = a(av_0 + b)$ prima dell'urto, e $v_2 = av_1 + b = a(av_0 + b) + b$ dopo l'urto, e così via; si veda la figura 1.29, destra.

Si è così costruita una mappa

$$v' = f(v) \ , \qquad f(v) = av + b \ ,$$

tale che

$$v_{k+1} = f(v_k) \ . \tag{1.5.3}$$

L'analisi della mappa è semplice: innanzitutto esiste un unico punto fisso $v^* = \frac{b}{1-a}$ che è soluzione di $f(v) = v$, ovvero è intersezione della retta $v' = f(v)$ con la bisettrice $v' = v$; si veda la figura 1.30. Poi, grazie al fatto che la pendenza della retta è $a < 1$, avviene che per ogni dato iniziale v_0 la successione $v_0, v_1, v_2, \ldots$ converge a v^*; la legge esatta, come si deduce immediatamente,[22] è

$$v_k = v^* + a^k (v_0 - v^*) \ . \tag{1.5.4}$$

Al di là del dettaglio, il comportamento delle iterate della mappa è evidente col metodo grafico illustrato in figura 1.30: da v_0 si sale sul grafico di f per trovare v_1, poi si utilizza la bisettrice per

[21] Il più comune è lo *scappamento ad ancora*, ben visibile aprendo un qualunque orologio meccanico. Il dispositivo è mosso evidentemente dalla riserva di energia dell'orologio (molla, peso).

[22] Si porta l'origine delle velocità in v^* ponendo $v = v^* + u$. Si ricava immediatamente $u_{k+1} = au_k$, che dà la (1.5.4).

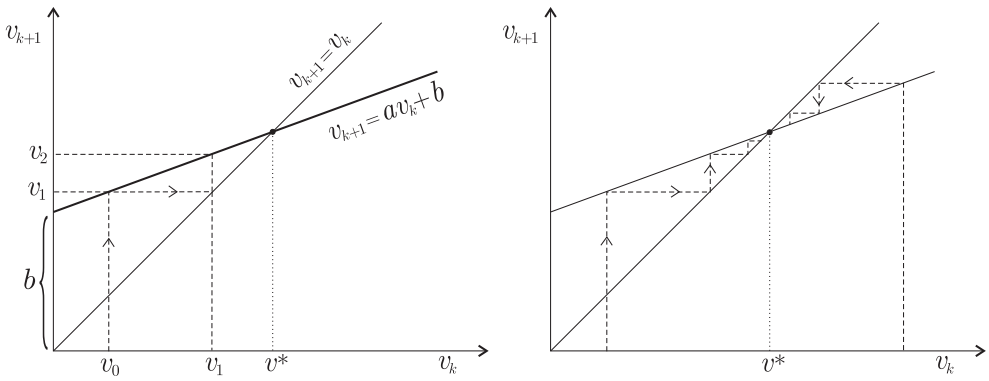

Figura 1.30: *La mappa $f(v) = av + b$ e le sue iterate.*

riportare v_1 sull'asse delle ascisse, poi si risale al grafico di f trovando v_2 e così via; si segue in questo modo una spezzata che conduce asintoticamente a v^* per ogni dato iniziale.

E' importante osservare che questa conclusione è "robusta", ovvero valida ben al di là delle specificità dell'esempio che abbiamo seguito. Se anche l'oscillatore di partenza non è armonico (ad esempio è un pendolo), o lo smorzamento non è esattamente lineare, oppure l'impulso b non è del tutto indipendentemente da v, si arriva comunque a una legge $v_{k+1} = f(v_k)$, con f non esattamente lineare ma non troppo diversa da una retta di pendenza inferiore a uno. Ci si convince immediatamente che *il comportamento qualitativo del sistema non cambia se sono rispettate due condizioni elementari: (i) f è crescente e la sua derivata resta staccata da uno, $0 < f'(x) \leq a < 1$ con a opportuna; (ii) si ha $f(0) > 0$.*[23]

1.5.2 L'equazione di Van der Pol

Nell'analisi delle oscillazioni in circuiti elettrici nonlineari amplificati intervengono equazioni della forma

$$\ddot{x} + \mu(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \tag{1.5.5}$$

ove il coefficiente di smorzamento $\mu(x)$, non costante, non ha segno definito, ma è positivo (attrito ordinario, il sistema perde energia) per $|x|$ grande e negativo (il sistema guadagna energia) per $|x|$ piccolo. L'esempio più semplice, che seguiremo, è

$$\mu(x) = \mu_0\Big(\frac{x^2}{a^2} - 1\Big) \ , \tag{1.5.6}$$

ma dal punto di vista qualitativo le considerazioni che faremo sono assai più generali. Come si arrivi a equazioni di questo tipo in circuiti amplificati molto elementari è brevemente descritto nell'appendice C. Conviene passare alla forma adimensionale dell'equazione, usando a come unità di misura di x e ω^{-1} come unità di misura di t (si riveda il paragrafo 1.1.2); come risultato si trova l'equazione

$$\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \ , \tag{1.5.7}$$

[23] Infatti, innanzitutto in queste ipotesi esiste unica l'intersezione v^* tra il grafico di f e la bisettrice. Poi si osserva che ad esempio per $v < v^*$ si ha $v < f(v) < v^*$; ne consegue che la successione $v_0, v_1, v_2, \ldots$ è monotona crescente e limitata da v^*, perciò ha un limite $v_\infty \leq v^*$. Si trova subito $f(v_\infty) = v_\infty$, pertanto necessariamente $v_\infty = v^*$.

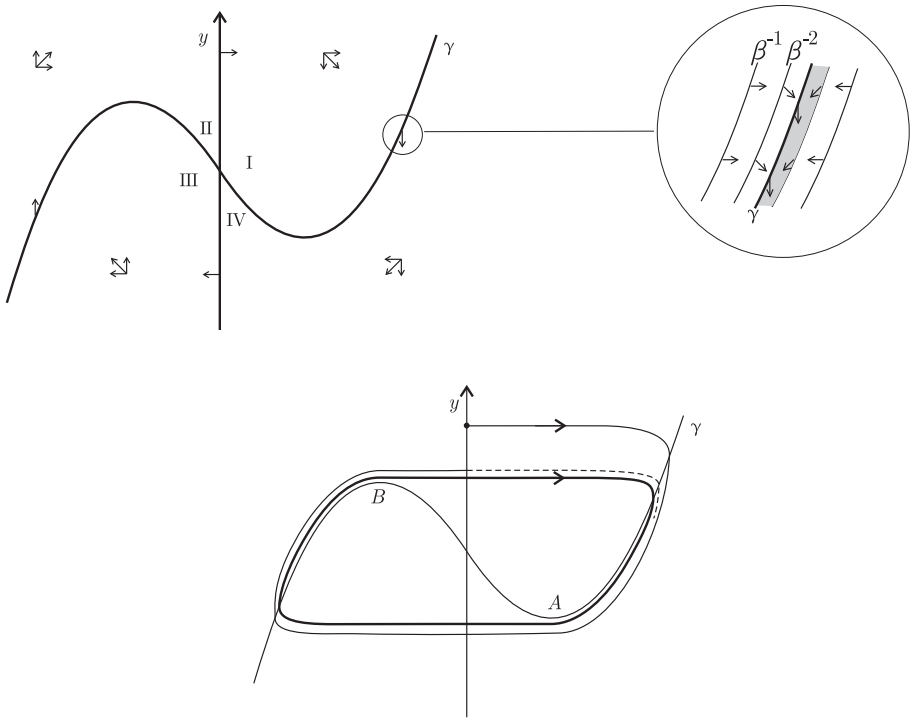

Figura 1.31: *Campo vettoriale, traiettorie e ciclo limite per l'equazione di Van der Pol con* $\beta \gg 1$.

nella quale interviene il solo parametro $\beta = \mu_0/\omega$, adimensionale e dunque significativo. La (1.5.7) è nota come *equazione di Van der Pol.*[24]

L'origine $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ è un punto di equilibrio del sistema e non ve ne sono altri. Si può dimostrare che, del tutto in generale,

Proposizione 12 *Per ogni* $\beta > 0$ *l'equazione ammette un ciclo limite stabile, cui tende asintoticamente ogni movimento con dato iniziale* $(x_0, v_0) \neq (0, 0)$.

Il bacino di attrazione è dunque in questo caso l'intero piano xv privato dell'origine. La dimostrazione, non difficile ma piuttosto laboriosa e non molto istruttiva, è riportata nell'appendice C. Qui di seguito studieremo l'equazione di Van der Pol nell'approssimazione $\beta \gg 1$ (forte smorzamento, positivo o negativo a seconda di $|x|$) e poi nell'approssimazione $\beta \ll 1$ (debole smorzamento); procederemo con metodi euristici approssimati ma nel secondo caso anche in modo rigoroso, impiegando un procedimento di tipo perturbativo (già di per sé interessante).

Il caso $\beta \gg 1$.

E' conveniente sostituire all'equazione del secondo ordine (1.5.7) un sistema di due equazioni del primo ordine, procedendo però in modo un po' diverso dall'usuale. Precisamente, dopo aver osservato che l'equazione si può scrivere nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{x} + \beta(x^3/3 - x)\right] = -x \ ,$$

[24] B. Van der Pol, *A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations*, Radio Reviews, 1, 701–710 (1920).

poniamo $\dot{x} + \beta(\frac{1}{3}x^3 - x) = \beta y$. L'equazione (1.5.7) è allora equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta\big(y - \gamma(x)\big) \\ \dot{y} = -\beta^{-1}x \end{cases} \quad , \qquad \text{con} \quad \gamma(x) = \frac{1}{3}x^3 - x \ . \tag{1.5.8}$$

Nel piano xy sono significative due curve: la retta $x = 0$ (asse y), cui è legato il segno di $\dot{y}$, e la cubica γ di equazione $y = \gamma(x)$, cui è legato il segno di $\dot{x}$; si veda la figura 1.31, alto. Queste curve dividono il piano in quattro regioni I – IV simili a quadranti, ove $\dot{x}$ e $\dot{y}$ hanno segno definito, nell'ordine $(+,-)$, $(+,+)$, $(-,+)$, $(-,-)$; si vedano le frecce in figura. L'asse y è attraversato orizzontalmente, la cubica invece è attraversata verticalmente, nella direzione indicata dalle frecce.

Usiamo ora l'ipotesi che β sia grande. In questo caso è chiaro che, al di fuori di un piccolo intorno di γ, le traiettorie sono praticamente parallele all'asse x: infatti la pendenza del campo vettoriale, e dunque delle traiettorie, è data da

$$\alpha = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\beta^{-2}\frac{x}{y - \gamma(x)} \ ,$$

pertanto lontano da γ si ha $\alpha \sim \beta^{-2} \ll 1$, ovvero si hanno traiettorie orizzontali, dirette verso destra al di sopra di γ e verso sinistra al di sotto. Ancora per $y - \gamma(x) \sim \beta^{-1}$, dunque già abbastanza vicino alla curva (si veda il dettaglio della figura), la pendenza rimane piccola, $\alpha \sim \beta^{-1}$: per avere $\alpha \sim 1$ o maggiore ($\dot{y}$ confrontabile con $\dot{x}$ o più grande) la traiettoria deve entrare in un intorno di γ ancora più piccolo, di spessore $\sim \beta^{-2}$.

Così, se prendiamo un dato iniziale come in figura 1.31, basso, vediamo che con velocità elevata, $\mathcal{O}(\beta)$, l'orbita va quasi orizzontalmente fino a γ, e solo in prossimità di γ essa comincia a deviare sensibilmente dall'orizzontale, fino ad attraversare γ verticalmente. L'orbita deve poi seguire "lentamente" γ, con velocità $\dot{x}$ e $\dot{y}$ entrambe di ordine β^{-1}, finché non giunge in prossimità del vertice A: è chiaro infatti che essa non può né riattraversare γ in verso contrario, né allontanarsi da γ verso il basso o verso destra, perché, come mostrano le frecce nel dettaglio della figura, nella zona tracciata in grigio le traiettorie sono entranti, non uscenti. La traiettoria può invece scostarsi dalla cubica, spostandosi verso sinistra, dopo aver oltrepassato il vertice A: anzi lo fa necessariamente, perchè in prossimità di A si ha $x > 0$ e dunque $\dot{y} < 0$, mentre per continuare a seguire la cubica dovrebbe essere $\dot{y} > 0$. Non appena la traiettoria, oltrepassato A, si scosta da γ, riprende il moto rapido orizzontale, questa volta rivolto verso sinistra, fino all'altro ramo della curva γ, dove si ha un nuovo attraversamento verticale (nel verso delle y crescenti). La traiettoria segue poi nuovamente la curva γ fino a B, e torna orizzontalmente sul ramo destro di γ, per infilarsi tra la traiettoria precedente e la cubica. La cosa si ripete a ogni giro, producendo un moto a spirale verso l'interno che molto rapidamente tende a un andamento limite periodico, o ciclo limite. Si vede immediatamente che il medesimo andamento limite si ha per ogni altro dato iniziale, ad esempio a destra della curva γ, o in prossimità dell'origine O, ad eccezione dell'origine che è un punto di equilibrio.

Il comportamento della variabile $x(t)$ sul ciclo limite, ovvero il comportamento "a regime" del sistema, è illustrato in figura 1.32; la figura, realistica, è stata ottenuta per integrazione numerica ($\beta = 10$). I tratti quasi verticali del grafico, ove $\dot{x}$ è grande, corrispondono ai tratti orizzontali del ciclo limite ($\dot{x} = \mathcal{O}(\beta)$); i tratti poco inclinati del grafico corrispondono invece ai tratti in cui il ciclo limite segue la curva ($\dot{x} = \mathcal{O}(\beta^{-1})$). Il periodo, si osservi, è determinato dai tratti lenti, e in unità adimensionali è proporzionale a β; in unità fisiche è proporzionale a β/ω (la "frequenza fondamentale" del moto non è così la frequenza armonica ω, ma una frequenza più bassa proporzionale a ω/β).

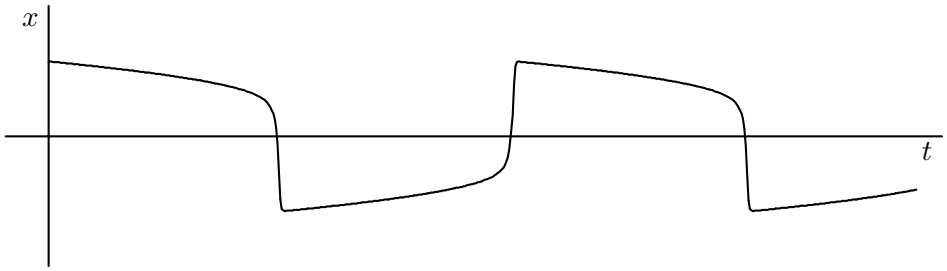

Figura 1.32: *L'andamento di $x(t)$ a regime, per grande smorzamento ($\beta = 10$).*

Studio perturbativo nel caso $\beta \ll 1$.

Studiamo ora l'equazione di Van der Pol nel caso $\beta \ll 1$, riscrivendola questa volta come sistema del primo ordine nel modo solito

$$\dot{x} = v \ , \qquad \dot{v} = -x - \beta(x^2 - 1)v \ . \tag{1.5.9}$$

Per $\beta = 0$ si ha un oscillatore armonico di pulsazione uno, pertanto per ogni dato iniziale la traiettoria nel piano di fase è un circolo che viene percorso con velocità uniforme nel periodo $T_0 = 2\pi$. Variabili naturali, per moti circolari e moti ad essi simili, non sono le coordinate cartesiane, ma le coordinate polari. Eseguiamo allora il passaggio a coordinate polari, usando tuttavia come coordinata radiale, come torna più comodo, non il raggio stesso ma l'energia; il passaggio alle nuove coordinate E, ϑ si scrive allora

$$x = \sqrt{2E}\cos\vartheta \ , \qquad v = \sqrt{2E}\sin\vartheta \ ,$$

con inverse

$$E = \frac{1}{2}(x^2 + v^2) \ , \qquad \vartheta = \arctan\frac{v}{x} \ . \tag{1.5.10}$$

Per $\beta = 0$ si ha evidentemente $\dot{E} = 0$, $\dot{\vartheta} = -1$; per $\beta \neq 0$ si trova subito, derivando le (1.5.10),[25]

$$\dot{E} = \beta f(E, \vartheta) \ , \qquad \dot{\vartheta} = -1 + \beta g(E, \vartheta) \ , \tag{1.5.11}$$

con

$$f(E, \vartheta) = 2E\sin^2\vartheta(1 - 2E\cos^2\vartheta) \ , \qquad g(E, \vartheta) = \sin\vartheta\cos\vartheta(2E\cos^2\vartheta - 1) \tag{1.5.12}$$

(l'espressione precisa di g, aggiunta qui per completezza, di fatto non giocherà alcun ruolo; l'unica cosa rilevante è che per E limitata la funzione sia limitata).

Per $\beta > 0$ piccolo la variabile radiale E è lenta, $\dot{E} = \mathcal{O}(\beta)$, mentre la variabile angolare ϑ è veloce, $\dot{\vartheta} = -1 + \mathcal{O}(\beta)$, pertanto ϑ avanza monotonamente con velocità prossima a -1, compiendo un giro in un tempo T_β prossimo al periodo imperturbato T_0, mentre nel frattempo E si è spostata di poco. La variabile lenta è quella che più interessa: la traiettoria infatti è periodica, oppure procede a spirale verso l'interno o verso l'esterno, a seconda che dopo un giro di ϑ la variabile abbia ripreso il valore iniziale, oppure sia cresciuta o diminuita.

[25] Per f la deduzione è immediata: $\dot{E}$ è la potenza delle forze dissipative, $\dot{E} = -\beta(x^2 - 1)v^2$; usando le (1.5.10) segue subito l'espressione (1.5.12) di f.

a) Un procedimento euristico. Per capire il comportamento di E, seguiamo dapprima un procedimento euristico, riservandoci di renderlo rigoroso in un secondo momento. Utilizziamo per questo un'idea tipica della teoria delle perturbazioni, interessante (con le dovute cautele) ogniqualvolta si abbia a che fare con un sistema in cui convivono variabili veloci e variabili lente. L'idea è quella di ricavare una equazione chiusa per la sola variabile lenta facendo una media sulla variabile veloce, ovvero di sostitire all'equazione vera (1.5.11) per E l'equazione approssimata, o "mediata",

$$\dot{E} = \beta\,\overline{f}(E)\ , \qquad \text{con} \qquad \overline{f}(E) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(E,\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\ .$$

Dall'espressione (1.5.12) di f si vede immediatamente che si ha

$$\overline{f}(E) = \frac{1}{2\pi}\,(bE - aE^2)\ ,$$

con a e b costanti positive; eseguendo il facile integrale si trova precisamente

$$a = \pi\ , \qquad b = 2\pi\ .$$

L'equazione risultante per E,

$$\dot{E} = \frac{\beta}{2\pi}(bE - aE^2)\ , \tag{1.5.13}$$

è del tutto elementare, e anzi l'abbiamo già analizzata studiando la crescita malthusiana corretta (paragrafo 1.1.3, equazione (1.1.9)). Ci sono con evidenza due punti di equilibrio, nell'origine e nel punto $E^* = b/a = 2$; quest'ultimo è asintoticamente stabile e qualunque dato iniziale E_0 diverso da zero vi converge per $t \to \infty$. A E^* corrisponde, nel piano xv, un ciclo limite attrattivo di raggio $\sqrt{2E^*} = 2$.

b) Il corrispondente procedimento rigoroso. Vediamo ora come si possa rendere rigoroso questo procedimento euristico, dimostrando con metodi perturbativi che

Proposizione 13 *Per β sufficientemente piccolo esiste unico nel piano xv un ciclo limite stabile β–prossimo al circolo di raggio due, di periodo prossimo a 2π, che ha come bacino di attrazione l'intero piano xv privato dell'origine.*

Rispetto alla proposizione generale 12 c'è la limitazione della validità del risultato a β piccolo, ma in compenso si localizza il ciclo limite. La dimostrazione, interessante, è una tipica dimostrazione perturbativa: si parte dal sistema imperturbato e ci si limita a controllare quello che avviene al primo ordine in β, con libertà di trascurare termini $\mathcal{O}(\beta^2)$; considerazioni di carattere generale permettono poi di concludere che i termini trascurati sono ininfluenti.

Dimostrazione. Utilizziamo le variabili di tipo polare (E,ϑ) introdotte sopra, con le relative equazioni (1.5.11). Sia $\mathcal{S}$ una qualunque semiretta uscente dall'origine, formante con l'asse x un angolo fissato $\bar{\vartheta}$; consideriamo un qualsiasi dato iniziale $(E_0,\bar{\vartheta})$ su di essa, e sia

$$\mathcal{E}_\beta(t,E_0)\ , \qquad \Theta_\beta(t,E_0)$$

la corrispondente soluzione ($\bar{\vartheta}$, fissato una volta per tutte, non vi compare). Per β piccolo l'angolo ϑ avanza monotonamente con velocità $-1+\mathcal{O}(\beta)$, pertanto compie un giro in un tempo

$$T_\beta = T_0 + \mathcal{O}(\beta)\ ;$$

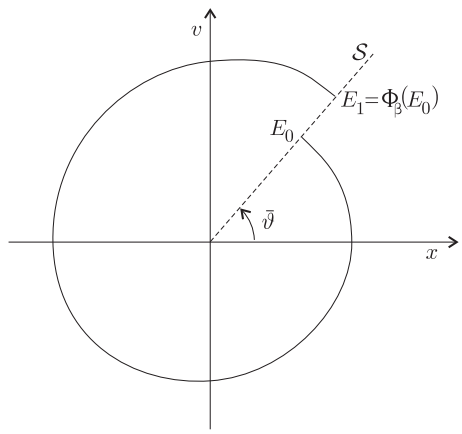

Figura 1.33: *La semiretta* $\mathcal{S}$ *e la mappa* $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *nel caso* $\beta \ll 1$.

durante questo tempo si ha evidentemente[26]

$$\mathcal{E}_\beta(t, E_0) = E_0 + \mathcal{O}(\beta) \ , \qquad \Theta_\beta(t, E_0) = \bar{\vartheta} - t + \mathcal{O}(\beta) \ .$$

Al termine del giro la traiettoria taglia nuovamente $\mathcal{S}$ in un punto E_1 prossimo a E_0; resta così ben definita una mappa $\Phi_\beta : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, tale che $E_1 = \Phi_\beta(E_0)$. La mappa è β–prossima all'identità, e la scriveremo

$$\Phi_\beta(E_0) = E_0 + \beta F_\beta(E_0) \ . \tag{1.5.14}$$

Iterando si trovano le successive intersezioni $E_2 = \Phi_\beta(E_1)$, $E_3 = \Phi_\beta(E_2)$ e così via. La ricerca di un moto periodico si riduce allora alla ricerca di un punto fisso E^*_β della mappa Φ_β, o equivalentemente di uno zero della funzione F_β. Per assincerarsi che si tratta di un ciclo limite attrattivo si dovrà poi verificare che la successione delle iterate $E_1, E_2, \ldots$ converge a E^*_β.

Si fa ora un calcolo approssimato di F_β, più precisamente uno sviluppo di Taylor nel parametro β troncato all'ordine zero; il risultato è

$$F_\beta(E) = F_0(E) + \mathcal{O}(\beta) \qquad \text{con} \qquad F_0(E) = -aE^2 + bE \ , \tag{1.5.15}$$

ove a e b sono le costanti positive introdotte sopra nel procedimento euristico. Questa espressione si ottiene così: innanzitutto rivoltiamo in forma integrale l'equazione (1.5.11) per E, scrivendo $\Phi_\beta(E_0) = E_0 + \int_0^{T_\beta} \dot{E} \mathrm{d}t$, ovvero

$$\Phi_\beta(E_0) = E_0 + \beta \int_0^{T_\beta} f(\mathcal{E}_\beta(t, E_0), \Theta_\beta(t, E_0)) \mathrm{d}t \ ;$$

per confronto con la (1.5.14) si ha allora

$$F_\beta(E_0) = \int_0^{T_\beta} f(\mathcal{E}_\beta(t, E_0), \Theta_\beta(t, E_0)) \mathrm{d}t \ .$$

Questa espressione contiene T_β e la soluzione esatta $\mathcal{E}_\beta(t, E_0), \Theta_\beta(t, E_0)$, che sono incognite. *Se però, per calcolare* F_0*, la valutiamo per* $\beta = 0$*, le incognite spariscono:* l'estremo di integrazione infatti diviene $T_0 = 2\pi$, mentre al posto della soluzione esatta si ha il moto imperturbato $\mathcal{E}_0(t, E_0) =$

[26] Si sta qui usando la sola regolarità della soluzione al variare dei parametri dell'equazione.

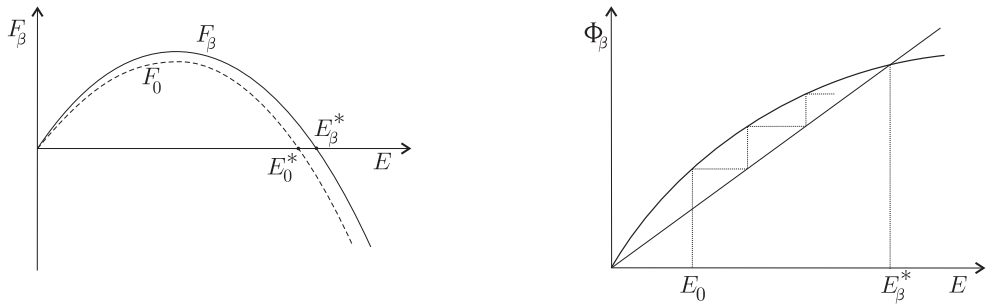

Figura 1.34: *L'andamento di F_β e di Φ_β; la convergenza asintotica delle iterate al valore limite E_β^*.*

E_0, $\Theta_0(t, E_0) = \bar{\vartheta} - t$. Si ha allora (denotando ora il generico dato iniziale E_0 semplicemente con E)

$$\begin{aligned} F_0(E) &= \int_0^{2\pi} f(E, \bar{\vartheta} - t)\, \mathrm{d}t = 2E \int_0^{2\pi} \sin^2 t (1 - 2E\cos^2 t) \mathrm{d}t \\ &= -aE^2 + bE \ , \end{aligned}$$

come nella (1.5.15).

Per $\beta = 0$ la curva F_β si riduce alla parabola $F_0(E) = -aE^2 + bE$, che ha uno zero trasverso (cioè con derivata diversa da zero) nell'origine e poi nel punto

$$E_0^* = \frac{b}{a} = 2 \ .$$

Sicuramente allora, per il teorema della funzione implicita,[27] per β piccolo F_β mantiene un unico zero trasverso in un punto E_β^* prossimo a E_0^*,

$$E_\beta^* = E_0^* + \mathcal{O}(\beta) \ .$$

Lo zero nell'origine resta con evidenza nell'origine (l'origine del piano xv è un punto di equilibrio per ogni β, pertanto si ha $F_\beta(0) = 0$ per ogni β) e altrove la funzione non può annullarsi. Un possibile andamento di F_β è rappresentato in figura 1.34, sinistra.[28] Al punto fisso $E_\beta^* = 2 + \mathcal{O}(\beta)$ della mappa corrisponde, come richiesto, un ciclo nel piano xv, prossimo al circolo di raggio 2.

Si dimostra facilmente che il ciclo è attrattivo. Precisamente, dalla forma di F_β si vede subito che, ad esempio per $E_0 < E_\beta^*$, la successione $E_0, E_1, E_2, \ldots$, $E_{i+1} = \Phi_\beta(E_i)$, è monotona crescente e limitata superiormente da E_β^*, pertanto esiste un limite $E_\infty \le E_\beta^*$; ma il limite è necessariamente un punto fisso e dunque coincide con E_β^*. L'andamento qualitativo di Φ_β e delle sue iterate, con immediata evidenza della convergenza a E_β^* della successione degli E_k, è rappresentato in figura 1.34, destra. □

[27] Infatti, scriviamo per comodità $F(\beta, E)$ al posto di $F_\beta(E)$; sappiamo che $F(0, E_0^*) = 0$ e inoltre $\frac{\partial F}{\partial E}(0, E_0^*) \neq 0$. In queste ipotesi il teorema della funzione implicita assicura che in un intorno di $\beta = 0$ l'equazione $F(\beta, E) = 0$ definisce implicitamente una funzione $E^*(\beta)$, tale che $E^*(0) = E_0^*$ e $F(\beta, E^*(\beta)) = 0$ identicamente. E' un caso particolare, si osservi, della Proposizione 11.

[28] Si intende che F_β potrebbe invece stare un po' sotto F_0, o oscillargli attorno; l'essenziale è osservare che le due funzioni (e le loro derivate) sono vicine e F_β taglia l'asse delle ascisse nell'origine e in un punto E_β^* prossimo a E_0^*, rispettivamente con derivata positiva e negativa.

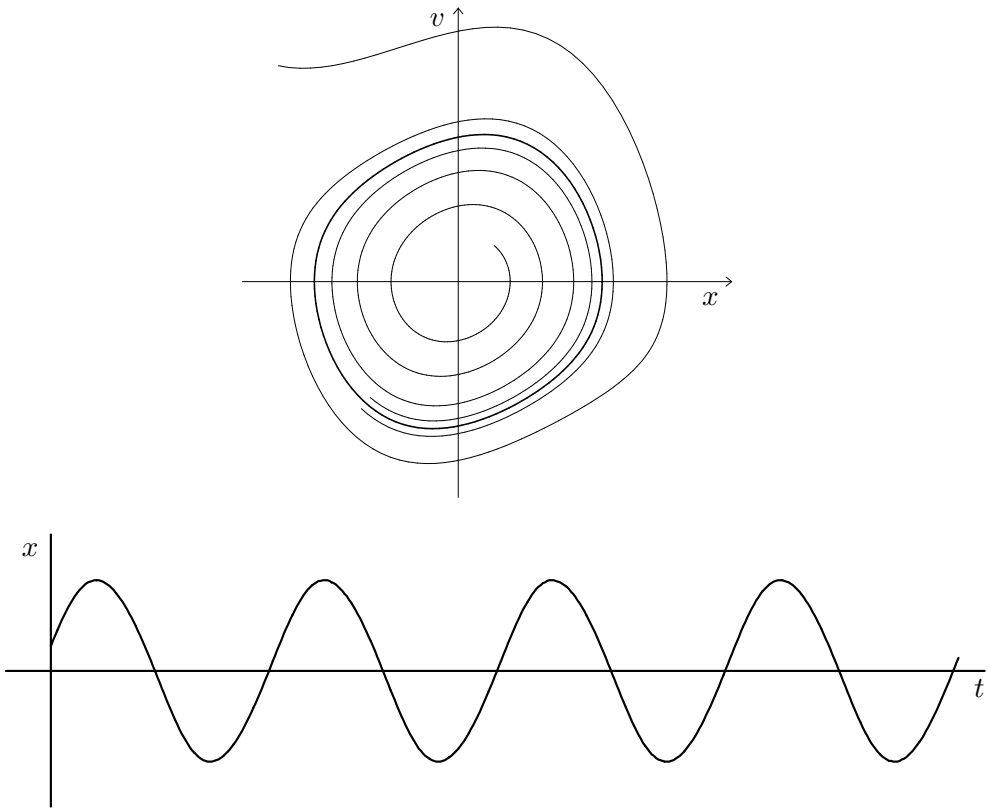

Figura 1.35: *(Alto) il comportamento dell'equazione di Van der Pol per* $\beta = 0.1$*: due traiettorie convergono al ciclo limite (curva spessa), da dentro e da fuori. (Basso): l'andamento di* $x(t)$ *a regime, sul ciclo limite. Simulazione numerica,* $\beta = 0.1$.

La figura 1.35, ottenuta mediante soluzione numerica approssimata delle equazioni del moto, mostra nella parte alta il comportamento del sistema nel piano di fase xv per $\beta = 0.1$, nella parte bassa l'andamento a regime di $x(t)$, difficilmente distinguibile da una sinusoide.

Esercizio 19 *Si classifichi l'origine del piano* xv *per il sistema (1.5.9), al variare di* β*. Si ripeta l'esercizio per l'origine del piano* xy*, per il sistema (1.5.8).*

E' interessante indagare "sperimentalmente", cioè con metodi numerici, il comportamento dell'equazione di Van der Pol al variare di β. Alcuni ritratti in fase nel piano xv, ottenuti in questo modo, sono riportati in figura 1.36.

1.5.3 La biforcazione di Hopf (cenno)

Una biforcazione che fin qui non abbiamo preso in considerazione è l'attraversamento del semiasse positivo $\mathrm{Tr}\, A$ nel diagramma di biforcazione. Tale fenomeno è possibile, ovviamente, solo per sistemi non conservativi. Un esempio banale è dato dall'oscillatore armonico smorzato, $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$: tale sistema ha come unico punto critico l'origine, che è un fuoco stabile per $0 < \mu < \omega$, e biforca in un fuoco instabile se μ diventa negativo. Un caso più interessante è quello dell'equazione di Van der Pol. Nel trattare tale equazione nel paragrafo precedente abbiamo sempre considerato solo il caso $\beta \geq 0$, ma il caso $\beta < 0$ si comprende facilmente: si vede subito infatti che l'equazione ha una

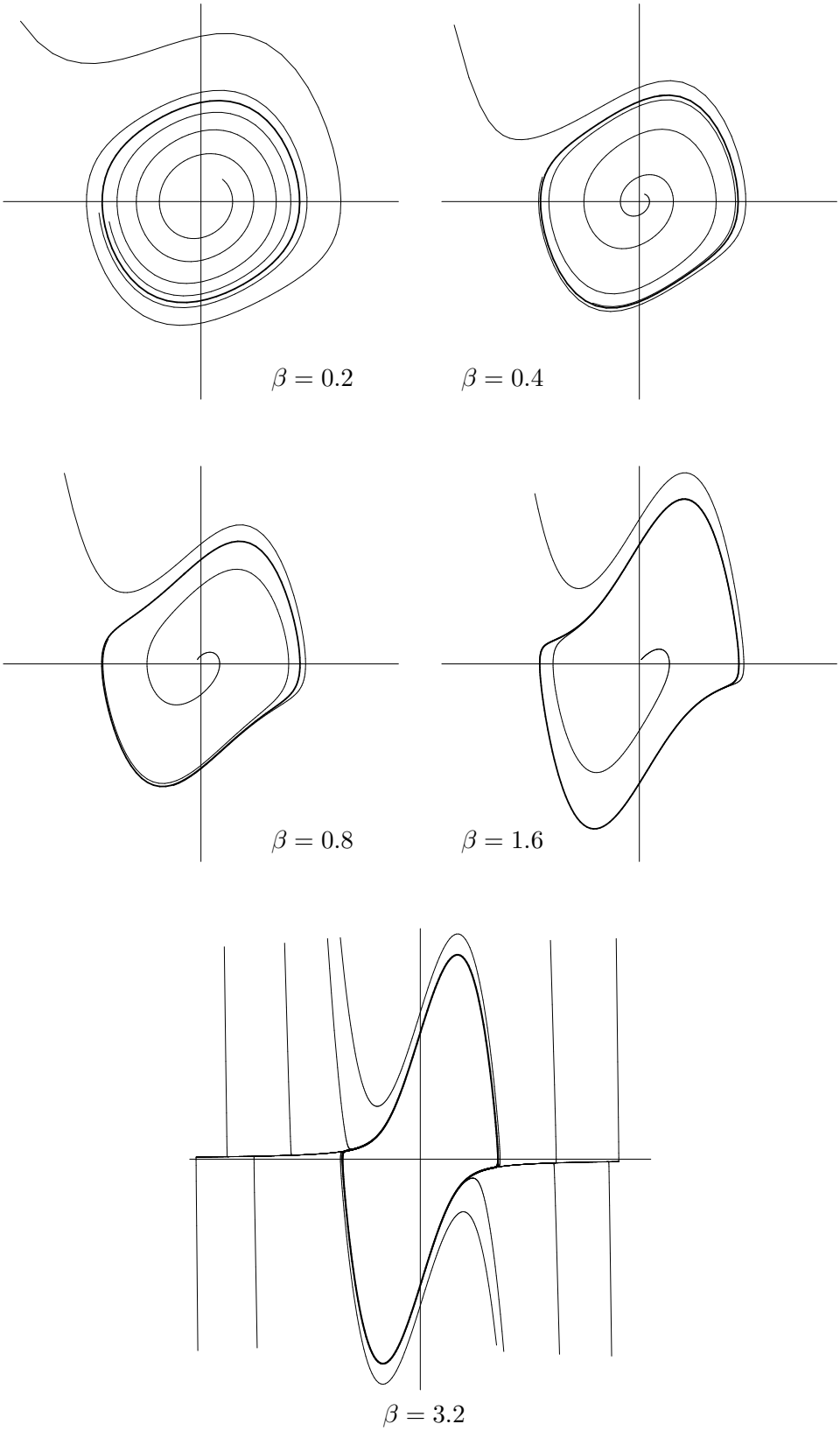

Figura 1.36: *Il ritratto in fase dell'equazione di Van der Pol, nel piano xv, per diversi* β.

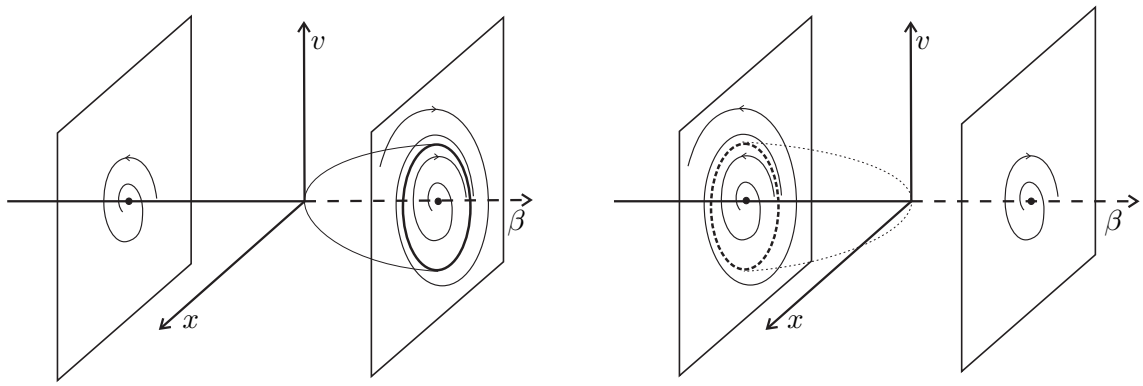

Figura 1.37: *La biforcazione di Hopf diretta e inversa*

simmetria per inversione temporale, precisamente se $(x(t), v(t))$ è soluzione del sistema (1.5.9) per un certo β, allora "il movimento all'indietro" $(\tilde{x}(t), \tilde{v}(t))$, definito da

$$\tilde{x}(t) = x(-t) \ , \qquad \tilde{v}(t) = -v(-t) \ ,$$

è ancora soluzione del sistema (1.5.9) per $\tilde{\beta} = -\beta$. In sostanza, se si cambia segno a β, si deve riflettere il ritratto in fase sull'asse x (per scambiare v con $-v$) e poi percorrere le traiettorie al contrario. Così l'origine, che per $\beta > 0$ piccolo è un fuoco instabile, per $\beta < 0$ piccolo è un fuoco stabile, mentre il ciclo limite da stabile diviene instabile (restando, per $|\beta|$ piccolo, prossimo al circolo di raggio due).

Questa simmetria dell'equazione di Van der Pol la rende non generica, come non generico è il caso esattamente lineare; corrisponentemente non generica è la biforcazione che si ottiene quando β cambia di segno. Basta però modificare un po' l'equazione di Van der Pol per rimuovere la simmetria e ottenere il comportamento generico. Un esempio facile da trattare è

$$\ddot{x} + (x^2 - \beta)\dot{x} + x = 0 \ . \tag{1.5.16}$$

Per $\beta < 0$ si ha attrito ordinario in tutto il piano xv, perciò ogni traiettoria tende asintoticamente all'origine; in particolare per $-2 < \beta < 0$ si ha un fuoco stabile. Per comprendere il caso $\beta > 0$ conviene effettuare il cambiamento di variabile (riscalamento)

$$x = \sqrt{\beta}\, \tilde{x} \ , \qquad v = \sqrt{\beta}\, \tilde{v} \ ;$$

l'equazione per $\tilde{x}$, ottenuta per sostituzione nella (1.5.16), è

$$\ddot{\tilde{x}} + \beta(\tilde{x}^2 - 1)\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = 0 \ ,$$

cioè è esattamente l'equazione di Van der Pol. Per $\beta > 0$ piccolo dunque nel piano $\tilde{x}\tilde{v}$ si ha un ciclo limite prossimo al circolo di raggio due, e corrispondentemente, nel piano xv, si ha un ciclo limite prossimo al circolo di raggio $2\sqrt{\beta}$. *Tale ciclo limite "fuoriesce" dall'origine nel momento in cui questa biforca da fuoco stabile a fuoco instabile.* Il fenomeno è illustrato in figura 1.37, sinistra; la biforcazione è chiamata *biforcazione di Hopf diretta.*

Se invece rompiamo in altro modo la simmetria dell'equazione di Van der Pol, ad esempio cambiando il segno di x^2 nella (1.5.16) così da ottenere l'equazione

$$\ddot{x} - (x^2 + \beta)\dot{x} + x = 0 \ , \tag{1.5.17}$$

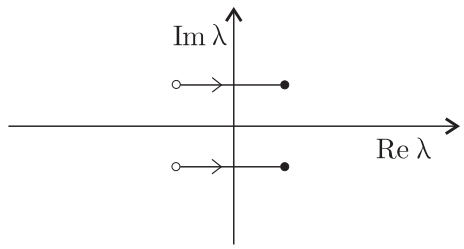

Figura 1.38: *Il comportamento degli autovalori nella biforcazione di Hopf.*

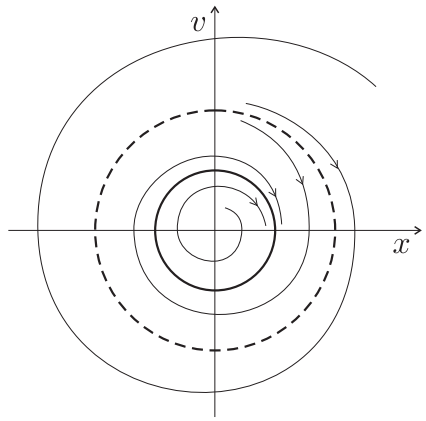

Figura 1.39: *Un sistema con una coppia di cicli limite, stabile e instabile.*

per $\beta > 0$ (piccolo) si ha questa volta un fuoco instabile senza cicli limite, mentre per $\beta < 0$ si ritrova, in un intorno $\mathcal{O}(\sqrt{|\beta|})$, l'equazione di Van der Pol con $\beta < 0$, dunque si ha un ciclo limite, questa volta instabile, di raggio prossimo a $2\sqrt{|\beta|}$. Si veda la figura 1.37, destra; la biforcazione prende il nome di *biforcazione di Hopf inversa.* La biforcazione di Hopf diretta o inversa è generica quando il punto rappresentativo di un sistema nel diagramma di biforcazione attraversa l'asse $\mathrm{Tr}\, A$ positivo, ovvero quando una coppia di autovalori complesso-coniugati attraversa l'asse immaginario;[29] si veda la figura 1.38

Esercizio 20 *Si scriva un'equazione che presenti una coppia di cicli limite, stabile e instabile, come in figura 1.39.* [Suggerimento: si cerchi prima una "equazione mediata", del tipo della (1.5.13), che dia il comportamento voluto.]

1.6 Introduzione ai moti caotici

Non appena la dimensione dello spazio delle fasi diviene maggiore di due diventano possibili, per i sistemi non lineari, comportamenti sostanzialmente diversi e più complessi di quelli ammissibili in dimensione piu bassa, sui quali abbiamo focalizzato fino ad ora la nostra attenzione. Per ottenere tale comportamento non occorrono equazioni complicate: addirittura è sufficiente aggiungere a un sistema meccanico una forzante periodica, considerando equazioni della forma

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + \varepsilon\, F(\Omega t)\ , \tag{1.6.1}$$

[29] E' generico, quando quest'ultima condizione è soddisfatta, anche per $n > 2$.

con F periodica di periodo 2π, per imbattersi, come vedremo, in moti di tipo nuovo, con caratteristiche per certi aspetti un po' sorprendenti. L'equazione (1.6.1), si osservi, è equivalente a un sistema autonomo di *tre* equazioni del primo ordine,[30]

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x,v) + \varepsilon\, F(\varphi) \\ \dot{\varphi} = \Omega\ . \end{cases} \tag{1.6.2}$$

Se f è lineare, nulla di complicato può capitare: tutto si risolve esattamente e si hanno quei fenomeni, interessanti ma elementari, noti sotto il nome di *oscillazioni forzate;* si veda, per una breve introduzione, l'appendice D. Ma basta prendere, ad esempio, un pendolo forzato con forzante sinusoidale:

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x + \varepsilon \cos \Omega t\ , \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin x + \varepsilon \cos \varphi \\ \dot{\varphi} = \Omega \end{cases}\ , \tag{1.6.3}$$

per ottenere moti qualitativamente diversi, in un certo senso (da chiarire) irregolari e imprevedibili, cui oggi si da comunemente il nome di *moti caotici.*

L'esistenza di questi "nuovi" moti fu compresa per la prima volta da Poincaré, a cavallo tra Ottocento e Novecento. Contributi decisivi sono venuti nel corso degli anni 50 del Novecento (principalmente grazie all'opera di Smale). Poi, a cominciare dal decennio successivo, questi moti si sono "visti" attraverso il nuovo strumento di allora, il calcolatore, che per la prima volta consentiva di simulare il comportamento di un sistema "difficile" mediante risoluzione numerica (approssimata) delle equazioni del moto. Pur trattandosi di argomenti matematici, lo spirito degli studi numerici si avvicina di più, per certi aspetti, a quello della fisica sperimentale che a quello della matematica tradizionale. Da allora sia i tradizionali studi analitici sia gli studi numerici hanno compiuto grandi progressi, ma ancora vi sono questioni importanti (ad esempio, se e con quali effetti i moti caotici siano presenti nel Sistema Solare) in cui la comprensione attuale è ancora insoddisfacente.

Procederemo così: nel prossimo paragrafo esamineremo, con tale atteggiamento sperimentale, il comportamento del pendolo forzato e di un altro modello tra i più studiati, un modello "a tempo discreto" noto come "mappa standard". Nel paragrafo successivo, pur non potendoci addentrare nella non facile teoria di questi fenomeni, cercheremo tuttavia di chiarire in qualche modo in che senso i nuovi moti si possano chiamare caotici.

1.6.1 Fenomenologia dei moti caotici

Consideriamo dunque il pendolo forzato con forzante sinusoidale (1.6.3). Data la periodicità del termine forzante, il dominio appropriato delle variabili x, v, φ non è $\mathbb{R}^3$ ma piuttosto $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \times S^1$, o più precisamente in $S^1 \times \mathbb{R} \times S^1$ dal momento che anche x è un angolo. Un modo molto conveniente di rappresentare il moto è allora quello di riportarsi ancora al piano xv facendo una *sezione* dello spazio tridimensionale con un piano Σ del tipo $\varphi =$ cost, ad esempio $\varphi = 0$, e restringendo l'osservazione ai tempi discreti $t_0, t_1, t_2, \ldots$ corrispondenti al passaggio della traiettoria attraverso la sezione, ovvero al passaggio di φ per lo zero; si veda la figura 1.40. In questo modo per ogni dato iniziale $(x_0, v_0) \in \Sigma$ si ottiene una successione (x_k, v_k), $k \in \mathbb{Z}$, formata dalle successive intersezioni

[30] E' indispensabile pensare il moto in uno spazio tridimensionale. Solo in tale spazio, ricordiamo, un dato iniziale determina univocamente il moto, e in particolare traiettorie diverse non si possono intersecare.

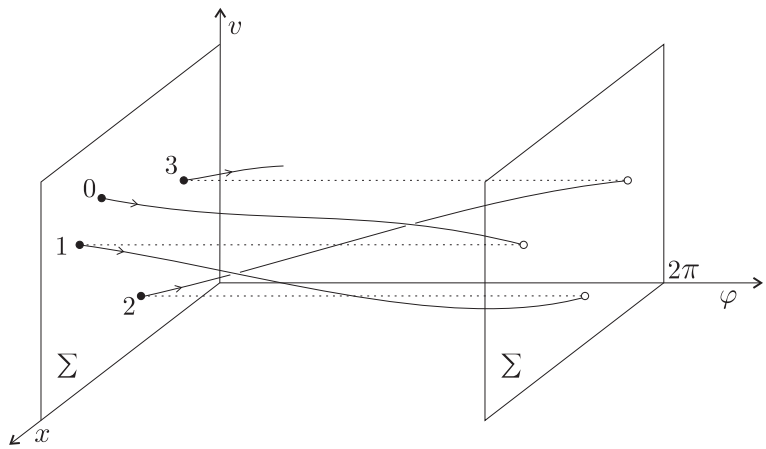

Figura 1.40: *Flusso continuo e sezione di Poincaré per il pendolo forzato.*

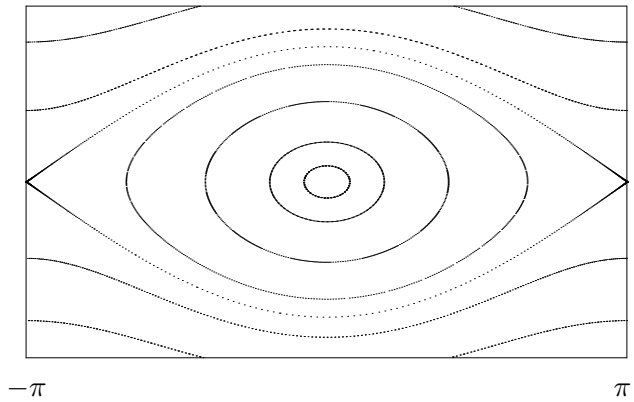

Figura 1.41: *La sezione di Poincaré per il pendolo forzato per* $\varepsilon = 0$, $\omega = 1/\sqrt{2}$.

con Σ della traiettoria uscente da (x_0, v_0). Accanto al flusso continuo $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ resta così definita una mappa $\Phi : \Sigma \to \Sigma$, tale che $(x_{k+1}, v_{k+1}) = \Phi(x_k, v_k)$. Questa mappa, o sistema a tempo discreto, è detta *sezione di Poincaré* del sistema continuo. Nel caso del pendolo forzato, o comunque di un sistema con forzante periodica, dal momento che φ avanza uniformemente con velocità Ω, ci si riduce in pratica a osservare il sistema a intervalli regolari di tempo $t_k = 2k\pi/\Omega$.

Consideriamo innanzitutto la situazione limite $\varepsilon = 0$. In tal caso la forzante non esiste, e la mappa Φ si riduce alla mappa al tempo $\tau = 2\pi/\Omega$ per il pendolo ordinario. Il ritratto in fase del sistema a tempo discreto è pertanto identico a quello solito del pendolo, salvo che le traiettorie non sono curve continue ma successioni discrete di punti che corrono, e in generale si addensano, sulle traiettorie continue.[31] Si veda la figura 1.41. Per $\varepsilon = 0$ la mappa eredita dal flusso la conservazione dell'energia, ovvero ammette la costante del moto $E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$, pertanto tutte le intersezioni (x_k, v_k) che seguono un dato iniziale (x_0, v_0) stanno su una medesima curva di livello della funzione E.

[31] Nel caso eccezionale in cui il periodo T del pendolo (per il dato iniziale prescelto) sia commensurabile con il tempo di osservazione τ, la successione (x_k, v_k), $k \in \mathbb{Z}$, è periodica e dunque composta da un numero finito di punti. In generale non lo è (il periodo T dipende infatti con continuità dall'energia E, e genericamente $T(E)/\tau$ non è razionale), e allora la successione è composta da infiniti punti diversi, che si dimostrano riempire densamente la traiettoria del sistema continuo (la curva di livello dell'energia).

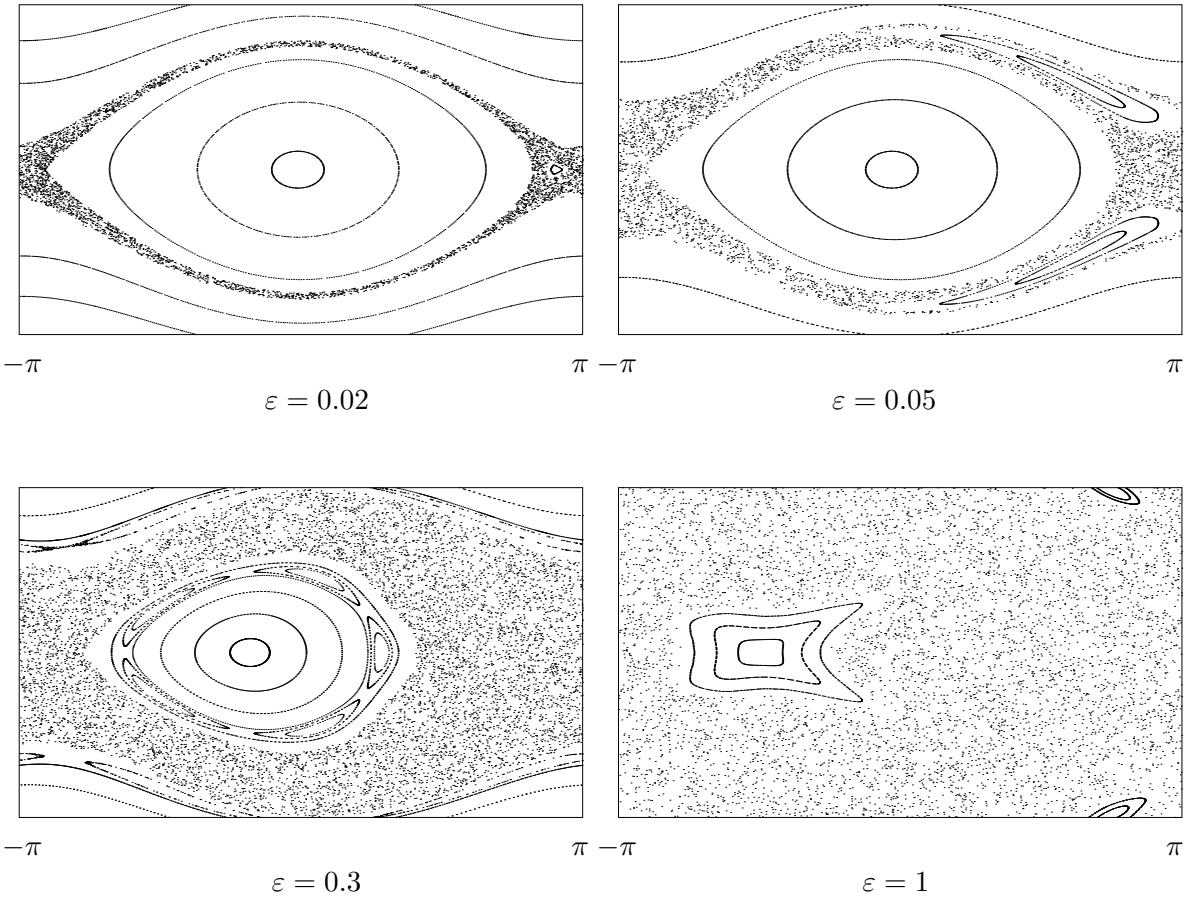

Figura 1.42: *La sezione di Poincaré per il pendolo forzato, per* $\omega = 1/\sqrt{2}$, $\Omega = 1$ *e diversi valori di* ε.

La situazione muta sostanzialmente non appena si prenda $\varepsilon \neq 0$, anche piccolo. Si guardi la figura 1.42, che mostra la sezione di Poincarè per il sistema con $\omega = 1/\sqrt{2}$, $\Omega = 1$, per valori crescenti di ε tra 0.02 e 1. Il sistema, a causa del termine forzante, non conserva più l'energia: tuttavia per ε piccolo (primi due riquadri in alto), se si prendono dati iniziali non troppo vicini alle separatrici del pendolo, si vede bene che punti appartenenti a una medesima traiettoria giacciono ancora su una medesima curva, *come se esistesse ancora nel sistema una costante del moto.* Se però si prende un dato iniziale (x_0, v_0) prossimo alle separatrici, si ottengono movimenti significativamente diversi: le successive intersezioni (x_k, v_k) vanno a riempire non una curva, ma una regione bidimensionale di area positiva, dando l'idea che invece la costante del moto non esista. Tali moti, qualitativamente nuovi, sono detti *moti caotici,* e la regione da essi occupata è detta essa stessa *regione caotica;* per contro, la regione riempita da curve regolari è detta *regione ordinata,* e i moti che vi si svolgono sono chiamati *moti ordinati.* Aumentando ε, la misura della regione caotica cresce fino a diventare preponderante. In ogni riquadro, tutti i punti presenti nella regione caotica (tra i 4 000 e gli 8 000, a seconda del riquadro) provengono da una singola traiettoria.

La situazione vera in realtà è più complicata di quello che le figure suggeriscono: un'analisi sufficientemente accurata mostrerebbe che anche tra le curve regolari della regione ordinata si trovano sottili regioni caotiche, così sottili da confondersi con curve ma in realtà di spessore non nullo. Viceversa anche nella regione caotica, se si fa attenzione, si individuano *isole* di moti ordinati (che al loro interno, se si guardasse bene, conterrebbero altre regioni caotiche...). E' un comportamento d'insieme non facile da cogliere, che richiede una certa riflessione e un po' di immaginazione. Il primo ad averne una visione chiara (e anche l'unico per un certo tempo) fu Poincaré.

Diversi altri modelli presentano una fenomenologia analoga. Anzi, invece di studiare una mappa Φ dedotta come sezione di Poincaré di un sistema a tempo continuo, si può scrivere direttamente un sistema a tempo discreto, dipendente da un parametro ε, che al pari del pendolo forzato ammetta una costante del moto per $\varepsilon = 0$ e la perda per $\varepsilon > 0$. Un esempio significativo, molto studiato, è la cosiddetta *mappa standard*, che agisce nel modo seguente:

$$(x, v) \mapsto \Phi(x, v) = (x + v \mod 2\pi,\ v + \varepsilon \sin x)\ ;$$

come per il pendolo la coordinata x è da pensarsi periodica di periodo 2π (lo spazio delle fasi non è il piano ma il cilindro). Per $\varepsilon = 0$, v stessa è costante e il ritratto in fase consiste in linee orizzontali. Per $\varepsilon > 0$ il ritratto cambia in modo non banale e compaiono moti caotici, poco visibili per ε piccolo ma sempre più vistosi al crescere di ε. Una selezione di immagini si trova in figura 1.43; è impressionante, e difficilmente immaginabile senza figure come queste, la complessità della dinamica per una mappa apparentemente così semplice.

1.6.2 Considerazioni sui moti caotici

La fenomenologia dei moti caotici è varia e complessa, ben al di là dei due esempi riportati nel paragrafo precedente. La teoria, a sua volta, è difficile e fuori dalla portata di queste note. Ci limitiamo allora a poche osservazioni, permettendoci anche l'uso di un linguaggio non accurato come la materia richiederebbe.

Divergenza esponenziale delle traiettorie vicine.

Quando abbiamo commentato il teorema di dipendenza regolare delle soluzioni di un'equazione differenziale dal dato iniziale (proposizione 3) abbiamo messo in evidenza la dipendenza continua delle soluzioni dal dato iniziale, scrivendo in particolare un'espressione, la formula (1.2.2), che per

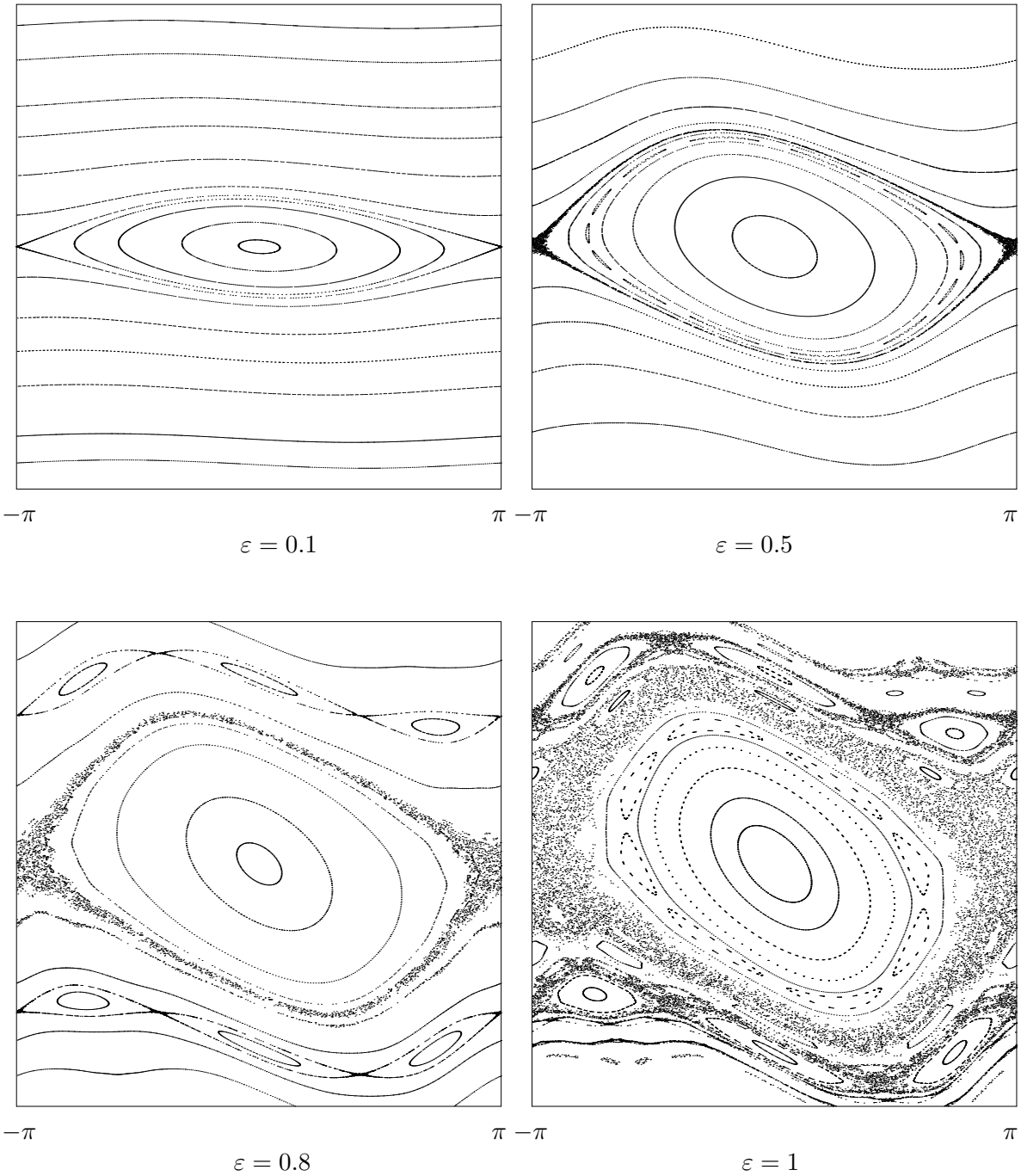

Figura 1.43: *Il ritratto in fase per la "mappa standard", per diversi valori di ε. La scala delle ordinate per tutti i riquadri è $-3 \leq v \leq 3$.*

ogni t dà una stima della distanza massima al tempo t tra due traiettorie in termini della distanza iniziale; in notazione più agile la (1.2.2) si può riscrivere

$$d(t) \leq C\, e^{\lambda|t|}\, d_0 \ . \tag{1.6.4}$$

Come abbiamo a suo tempo osservato (si veda il commento che segue la proposizione 3), in corrispondenza agli equilibri instabili gli esponenziali sono effettivamente presenti, e di conseguenza la stima (1.6.4) non è migliorabile. In quegli esempi tuttavia il problema riguardava un singolo punto. *Ciò che caratterizza i sistemi caotici è che questo tipo di comportamento non riguarda più punti o traiettorie in qualche modo eccezionali, ma si allarga a una regione di area positiva.*

La divergenza esponenziale si può definire con precisione, in modo quantitativo, nel modo seguente. Consideriamo un dato iniziale $\mathbf{x}_0$ e il movimento che ne segue $\Phi^t(\mathbf{x}_0)$, $t \in \mathbb{R}$. Consideriamo poi un secondo dato iniziale $\mathbf{x}_0'$ spostato di una quantità variabile η, nella direzione di un prefissato vettore unitario $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{x}_0' = \mathbf{x}_0 + \eta\, \mathbf{u} \ .$$

Confrontiamo il movimento $\Phi^t(\mathbf{x}_0')$ con il precedente, e per ogni $t > 0$ poniamo

$$\alpha(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \lim_{\eta \to 0} \frac{\|\Phi^t(\mathbf{x}_0 + \eta \mathbf{u}) - \Phi^t(\mathbf{x}_0)\|}{\eta} \ ;$$

α ha il significato di coefficiente di dilatazione delle distanze all'istante t, nella direzione di $\mathbf{u}$, per il dato iniziale $\mathbf{x}_0$. Dire che si ha crescita esponenziale delle distanze, per le traiettorie con dato iniziale spostato in direzione di $\mathbf{u}$, vuol dire che $\alpha(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ cresce in qualche modo esponenzialmente con t:

$$\alpha(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \simeq \text{cost}\, e^{\chi t} \ .$$

Formalmente l'esponente χ si definisce nel modo seguente:

$$\chi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \alpha(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \ ;$$

$\chi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ è detto *esponente di Ljapunov* del sistema nel punto $\mathbf{x}_0$, relativo alla direzione di $\mathbf{u}$.[32] Sia

$$\chi_{\max}(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{u}} \chi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \ ;$$

non sarebbe difficile vedere che sostanzialmente tutti i vettori $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, più precisamente tutti ad eccezione di un sottospazio di dimensione inferiore a n, danno proprio $\chi_{\max}$. Dove $\chi_{\max} > 0$, si dice che si ha divergenza esponenziale delle traiettorie vicine, o anche "dipendenza sensibile dal dato iniziale". L'esponente $\chi_{\max}$ si presta a essere usato come definizione stessa di sistema caotico:

Definizione 9 *Un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ si dice caotico se $\chi_{\max}(\mathbf{x}) > 0$ in un sottoinsieme di $\mathcal{D}$ di misura di Lebesgue positiva. La regione in cui $\chi_{\max} > 0$ è detta essa stessa regione caotica.*

Le conseguenze della divergenza esponenziale sono abbastanza drammatiche: in pratica, se c'è un'incertezza δ sul dato iniziale, si perde ogni controllo sui moti, vanificando il teorema di Cauchy che in linea di principio assicura il determinismo, dopo un tempo

$$t \sim \frac{1}{\chi_{\max}} \ \log \frac{1}{\delta} \ .$$

[32] Si dimostra (Oseledec, 1968; un teorema difficile) che il limite esiste per ogni $\mathbf{u}$ "quasi ovunque", cioè per ogni $\mathbf{x}_0$ a meno di un insieme di misura di Lebesgue nulla.

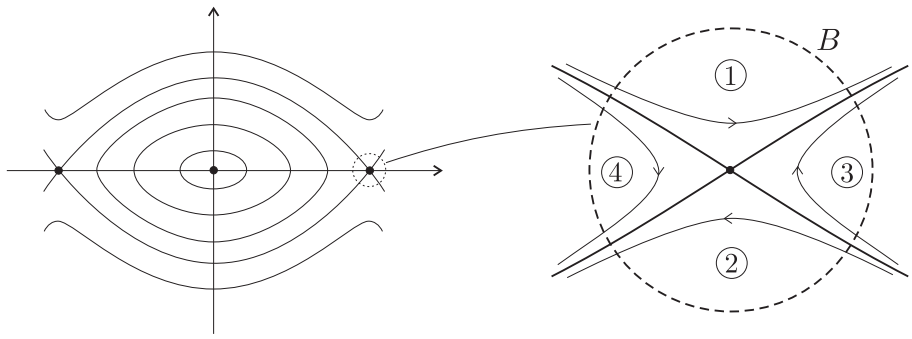

Figura 1.44: *Moti del pendolo a $\varepsilon = 0$, per dati iniziali prossimi al punto di equilibrio instabile: (1) rotazioni antiorarie, (2) rotazioni orarie, (3) librazioni che partono in verso antiorario, (4) librazioni che partono in verso orario.*

In pratica, l'approccio "meccanico" al problema, basato sull'idea di cercare e trovare soluzioni, buono per tempi brevi, per tempi lunghi è privo di prospettive. Al suo posto si deve sostituire un approccio di tipo statistico. Il ramo della matematica che si occupa di queste cose è la *teoria ergodica,* o più in generale la *teoria dei sistemi dinamici.* Si tratta di problemi *molto* interessanti, ma decisamente al di fuori della portata di queste note.

Dinamica simbolica casuale.

In alcuni casi, e tra essi vi è il pendolo forzato, è possibile dimostrare alcune proprietà di caoticità particolarmente forti. Consideriamo il pendolo forzato con ε comunque piccolo, e sia B una qualunque palla centrata attorno al punto di equilibrio instabile $(\pi, 0)$. Se fosse $\varepsilon = 0$, dovremmo distinguere in B quattro regioni, divise dalle separatrici, corrispondenti a quattro tipi diversi di moto: le rotazioni orarie, le rotazioni antiorarie, le librazioni che partono in verso orario, quelle che partono in verso antiorario; si veda la figura 1.44. Le rotazioni, ricordiamo, hanno energia $E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 - \cos x$ superiore all'energia $E^* = E(0, \pi) = \omega^2$ del punto di equilibrio instabile, le librazioni hanno energia inferiore a E^*. *La presenza del termine forzante, per quanto piccolo, è in grado di confondere le quattro regioni:* ad esempio una rotazione oraria, nel corso di un giro, può perdere energia e trasformarsi in una librazione, o viceversa; pertanto se un giro è stato compiuto in senso orario, il giro successivo potrebbe essere sia orario che antiorario. Possiamo convenire di rappresentare con i due simboli "O" e "A" i giri compiuti, rispettivamente, in verso orario e antiorario; a ogni dato iniziale $\mathbf{x}_0 \in B$ resta allora associata una sequenza binaria: ad esempio, la stringa "$OAOOA\ldots$" indica che il primo giro è orario, il secondo antiorario, il terzo e il quarto sono orari, il quinto antiorario... Per $\varepsilon = 0$ (escludendo i dati iniziali *esattamente* sulle separatrici) le uniche stringhe possibili, associate alle quattro regioni sopra messe in evidenza, sono

regione 1	:	$A\ A\ A\ A$ ...
regione 2	:	$O\ O\ O\ O$ ...
regione 3	:	$A\ O\ A\ O$ ...
regione 4	:	$O\ A\ O\ A$ ...

Si può dimostrare che per $\varepsilon > 0$ tutte le stringhe sono possibili: precisamente

Proposizione 14 *Se ε è abbastanza piccolo,*[33] *allora per ogni scelta di una stringa a due simboli $\sigma_k = O, A$, $k \in \mathbb{Z}$, esiste un dato iniziale $\mathbf{x}_0 \in B$ che la realizza.*

Così, se immagino un moto che faccia, ad esempio, tre giri orari, due antiorari, poi uno orario e due orari per mille volte, poi ancora cento antiorari e da allora giri per sempre in verso orario, sono certo che esiste in B un dato iniziale $\mathbf{x}_0$ che lo produce. (Nell'asserzione compare $k \in \mathbb{Z}$, e non $k \in \mathbb{N}$, perchè anche il passato si può scegliere arbitrariamente.)

La caratterizzazione dei moti ottenuta associando a ciascuno di essi, in modo biunivoco, una stringa di caratteri presa da un alfabeto finito di n simboli (qui i due simboli O e A), è uno strumento tipico di indagine nella teoria dei sistemi dinamici; il termine associato è *dinamica simbolica.* Per il pendolo forzato tutte le stringhe sono realizzate, e la dinamica simbolica è casuale. Merita attenzione il fatto che tale complessità di comportamento non richiede né equazioni del moto particolarmente complicate né un numero elevato di variabili: tre variabili, mosse da equazioni dall'aria innocente come le (1.6.2), sono sufficienti. Non tutti i sistemi caotici (nel senso della definizione 9) ammettono dinamica simbolica casuale; perché ciò avvenga occorre una certa uniformità nella divergenza esponenziale. Sono tuttavia nozioni complesse, sulle quali non indagheremo ulteriormente.

[33] La dimostrazione è di tipo perturbativo, per questo si chiede che ε sia piccolo.

APPENDICI

A Una funzione di Ljapunov per l'oscillatore armonico smorzato

Per esercizio costruiamo qui una funzione di Ljapunov per l'oscillatore armonico smorzato,

$$\dot{x} = v \ , \qquad \dot{v} = -\omega^2 x - 2\mu v = 0 \ , \qquad \mu > 0 \ , \tag{A.1}$$

che soddisfi le ipotesi (a) e (b') della proposizione 6 (paragrafo 1.2.4), senza che vi sia bisogno di invocare, per dimostrare la stabilità asintotica dell'origine, l'ipotesi piu debole (b").

Dall'equazione (A.1) si ricava subito, come sappiamo, che l'energia (per unità di massa)

$$E(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

ha derivata di Lie non positiva:

$$\mathcal{L}E = -2\mu v^2 \leq 0 \ .$$

Ciò non basta a soddisfare l'ipotesi (b'), perché $\mathcal{L}E$ si annulla su tutto l'asse x e non solo nell'origine. Consideriamo allora, accanto a E, la funzione

$$F(x,v) = \frac{1}{2}(v + 2\mu x)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \ ,$$

che al pari di E ha un minimo stretto nell'origine. Si trova subito che risulta, questa volta,

$$\mathcal{L}F = -2\mu\omega^2 x^2 \ ;$$

neanche F dunque soddisfa l'ipotesi (b') del teorema di Ljapunov, ma per il motivo opposto: la sua derivata di Lie si annulla, questa volta, in tutto l'asse v. Si comprende allora che una buona funzione di Ljapunov, che soddisfa sia (a) che (b'), è

$$\mathcal{W}(x,v) = E(x,v) + F(x,v) \ ,$$

per la quale risulta

$$\mathcal{L}\mathcal{W} = \mathcal{L}E + \mathcal{L}F = -2\mu(v^2 + \omega^2 x^2) \ .$$

La costruzione di $\mathcal{W}$ si basa sulla scelta, per così dire, indovinata di F, che è una specie di energia (nome che in verità si potrebbe estendere a tutte le funzioni che per $\mu = 0$ si riducono ad E), la cui dissipazione però è proporzionale a x^2 anziché a v^2. Un'interpretazione di F è suggerita dalla seguente considerazione: poiché l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato può scriversi nella forma $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x} + 2\mu x) = -\omega^2 x$, è naturale considerare la variabile $y = \omega^{-1}(\dot{x} + 2\mu x)$; si vede allora immediatamente che y segue la medesima equazione di x, cioè $\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0$, e la sua "energia" $\frac{1}{2}(\dot{y}^2 + \omega^2 y^2)$ è proprio F.

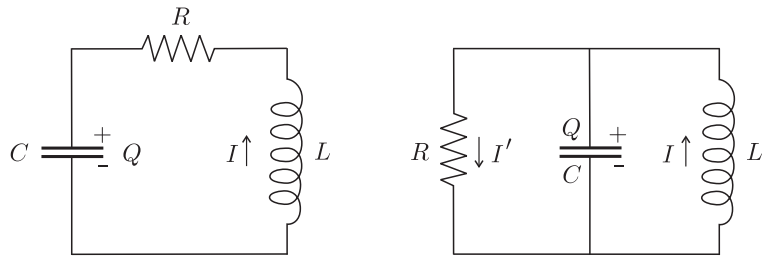

Figura 1.45: *Due diverse realizzazioni elettriche dell'oscillatore armonico smorzato.*

C'è qualche cosa di più. La figura 1.45 mostra due possibili realizzazioni elettriche dell'oscillatore armonico smorzato, ottenute mettendo assieme un condensatore, un'induttanza e un resistore. Per entrambi i circuiti l'induttanza L gioca il ruolo di massa, mentre l'inversa C^{-1} della capacità gioca il ruolo di costante elastica. Se denotiamo con Q la carica del condensatore, non è difficile vedere che in entrambi i casi l'equazione del moto è quella dell'oscillatore armonico smorzato

$$\ddot{Q} + 2\mu\,\dot{Q} + \omega^2\,Q = 0 \ ,$$

con $\omega^2 = 1/LC$ e

$$2\mu = \frac{R}{L} \ , \qquad 2\mu = \frac{1}{RC}$$

rispettivamente per il circuito di sinistra e per quello di destra.

L'energia "fisica" in entrambi i sistemi è somma di quella magnetica $\frac{1}{2}LI^2$, ove I denota la corrente che scorre nell'induttanza, e di quella elettrostatica $\frac{1}{2}C^{-1}Q^2$, corrispondenti rispettivamente al termine cinetico e al termine potenziale dei sistemi meccanici. Per il circuito di sinistra si ha $I = \dot{Q}$, e corrispondentemente

$$E = \frac{L}{2}\dot{Q}^2 + \frac{1}{2C}Q^2 \ ;$$

questa è la consueta energia (non per unità di massa) attribuita all'oscillatore armonico. Per il circuito di destra si ha invece

$$I = \dot{Q} + I', \qquad I' = \frac{Q}{RC} \ ,$$

e l'energia corrispondente

$$E = \frac{L}{2}\Big(\dot{Q} + \frac{1}{RC}\,Q^2\Big) + \frac{1}{2C}Q^2 \ ,$$

fatta l'appropriata corrispondenza di simboli e divisa per la "massa" L, coincide con la funzione F introdotta sopra.

B Classificazione dei punti critici: il caso di autovalori nulli o coincidenti

Aggiungiamo qui poche considerazioni sul comportamento del sistema lineare

$$\dot{\mathbf{x}} \;=\; A\,\mathbf{x} \ , \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \ , \tag{B.1}$$

quando il punto $(\mathrm{Tr}\,A, \det A)$ rappresentativo della matrice A nel diagramma di biforcazione (figura 1.15) si trova su una delle curve critiche del diagramma, precisamente sull'asse $\det A = 0$ oppure

sulla parabola $\Delta = (\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4 \det A = 0$; in quest'ultimo caso comprenderemo anche l'origine $\mathrm{Tr}\, A = \det A = 0$.

a) La curva $\det A = 0$*, per* $\mathrm{Tr}\, A \neq 0$.

La trattazione è semplice perché, al pari dei nodi e dei punti di sella, la matrice A è diagonalizzabile. Più precisamente, in questo caso esistono due autovalori reali $\lambda_1 = \mathrm{Tr}\, A \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$, con autovettori $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$ indipendenti che si possono prendere reali. Il sistema ammette allora le soluzioni particolari $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}^{(2)}$, combinando le quali si ottiene l'integrale generale nella forma

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}^{(1)} + C_2 \mathbf{u}^{(2)} \ .$$

La direzione di $\mathbf{u}^{(1)}$ è dilatante o contraente, a seconda del segno di $\lambda_1 = \mathrm{Tr}\, A$; la direzione di $\mathbf{u}^{(2)}$ è neutra, e l'asse $\mathbf{u}^{(2)}$ si decompone in un continuo di punti critici. Si hanno pertanto i ritratti in fase tracciati in figura 1.46. Per $\lambda_1 > 0$ l'origine è punto di equilibrio instabile per tempi positivi, mentre per $\lambda_1 < 0$ il punto è stabile (ma non asintoticamente stabile); il comportamento ovviamente si inverte per tempi negativi.

- La stabilità può venir meno, o mutarsi in stabilità asintotica, non solo per variazioni arbitrariamente piccole di $\det A$ (passaggio a nodo o a colle), ma anche semplicemente aggiungendo alla (B.1) opportuni termini non lineari: per convincersene basta considerare l'esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = a x_2^3 \end{cases} \quad , \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

  Con evidenza si ha stabilità asintotica per $a < 0$, instabilità per $a > 0$. Questa mancanza di "robustezza" delle proprietà di stabilità quando si passa dal caso lineare al caso non lineare rende nel complesso poco interessante il caso $\det A = 0$.

b) La curva $\Delta = 0$.

Questo caso è più delicato perché vi sono due autovalori coincidenti $\lambda = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, A$ e di conseguenza, in generale, la matrice A non possiede due ma un solo autovettore (il secondo autovettore esiste solo nel caso particolare in cui A sia multipla dell'identità, $A = \lambda I$). Un esempio di tali matrici è dato da

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \ ;$$

il vettore $\mathbf{u} = (1, 0)$ è autovettore con autovalore λ e per $a \neq 0$ non ne esistono altri (indipendenti da $\mathbf{u}$). Possiamo limitarci a trattare questo caso: si vede infatti immediatamente che ad esso ci si può sempre ricondurre con un banale cambio di coordinate, precisamente una rotazione che porti l'asse x_1 a coincidere con la direzione di $\mathbf{u}$ (l'elemento di matrice A_{21} è allora necessariamente nullo, e sulla diagonale compaiono i due autovalori coincidenti).[34]

Siamo così condotti a considerare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 + a x_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2 \ . \end{cases}$$

[34] Anzi, per $a \neq 0$, il riscalamento $x_2 = a^{-1} x_2'$ conduce alla forma ancor più particolare $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (forma di Jordan).

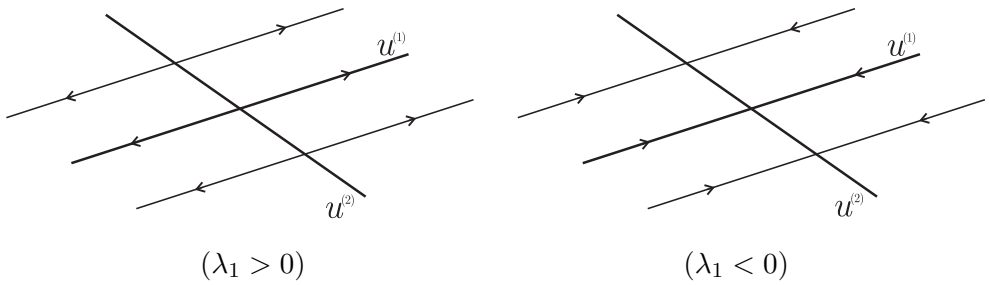

Figura 1.46: *Il caso* $\det A = 0$, $\operatorname{Tr} A \neq 0$.

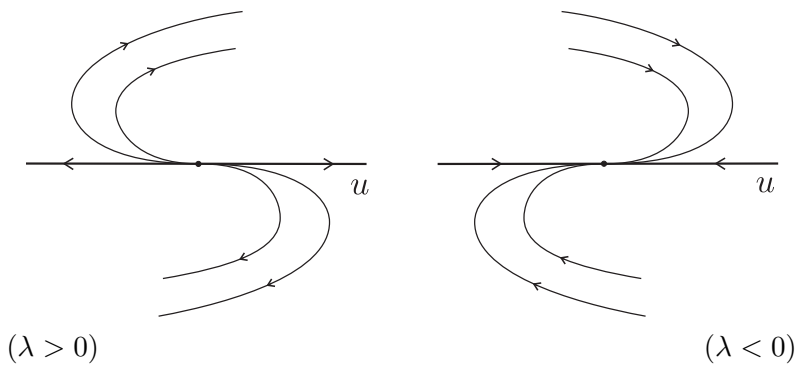

Figura 1.47: *Il caso* $\Delta = 0$, $a \neq 0$.

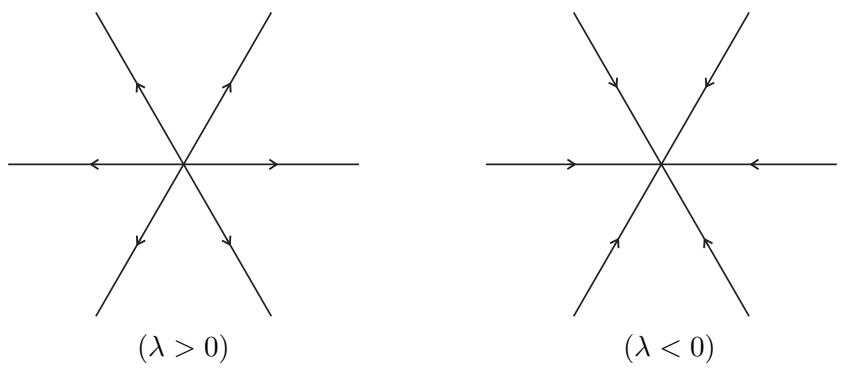

Figura 1.48: *Il caso* $\Delta = 0$, $a = 0$ *(*$A = \lambda I$*)*

La seconda equazione si risolve immediatamente e dà

$$x_2(t) = x_2^o e^{\lambda t};$$

la prima diviene allora un'equazione lineare forzata, precisamente $\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2^o e^{\lambda t}$, e se ne trova facilmente la soluzione,

$$x_1(t) = (x_1^o + a x_2^o t) e^{\lambda t} \ .$$

L'andamento qualitativo dei moti è riportato in figura 1.47, per $a > 0$. Si osservi che le traiettorie sono tangenti nell'origine all'autovettore $\mathbf{u}$. Il comportamento è in un certo senso intermedio tra quello del fuoco e quello del nodo; al pari di questi due casi si ha la stabilità asintotica nel futuro per $\lambda = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, A < 0$, nel passato per $\mathrm{Tr}\, A > 0$.

Infine per $a = 0$ la matrice A è proporzionale all'identità, pertanto ogni vettore $\mathbf{u}$ è autovettore e ogni semiretta uscente dall'origine è invariante; l'andamento è quello riportato in figura 1.48.

Resta da considerare l'origine del diagramma di biforcazione, ovvero matrici del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{B.2}$$

cui ci si può sempre ricondurre nel modo indicato sopra. Per $a = 1$ si ha il caso ben noto del moto libero, per $a \neq 0$ qualsiasi si vede immediatamente che il comportamento è sostanzialmente identico (il caso $a = 0$ è evidentemente banale). Si osservi che l'asse x_1 si decompone in un continuo di punti critici. Il sistema lineare è instabile sia per tempi positivi che per tempi negativi, ma il comportamento può mutare per aggiunta di termini non lineari.

Esercizio 21 *si trovino degli esempi di sistemi non lineari con A della forma (B.2), tali che si abbia: (a) stabilità per tutti i tempi; (b) stabilità non asintotica per soli tempi positivi; (c) stabilità asintotica per tempi positivi.*

C Complementi sull'equazione di Van der Pol

C.1 Una realizzazione elettrica di un'equazione di tipo Van der Pol

Vediamo qui come sia naturale introdurre equazioni nonlineari del tipo della (1.5.5), con coefficiente di attrito $\mu(x)$ negativo per piccoli segnali e positivo per grandi segnali, non appena si prenda un amplificatore e si riporti opportunamente in ingresso il segnale in uscita (con "reazione positiva").

La figura 1.49 mostra un circuito elettrico con in parallelo un'induttanza, un condensatore e un componente non lineare; quest'ultimo si suppone obbedire a una legge del tipo

$$I = f(V)/R \ , \tag{C.1}$$

avendo indicato con $V = V_b - V_a$ la differenza di potenziale ai suoi capi, con I la corrente che lo attraversa (positiva se nel verso della freccia; $I = I_2$ nella figura), e con R una costante; per $f(V) = V$ si ha eccezionalmente un componente lineare, precisamente un resistore di resistenza R.

Dalla (C.1) assieme alle consuete equazioni dei due componenti lineari ($\dot{I}_1 = -V/L$ per l'induttanza, $\dot{V} = (I_1 - I_2)/C$ per il condensatore) si ricava senza difficoltà per V l'equazione

$$\ddot{V} + \mu(V)\dot{V} + \omega^2 V = 0 \ , \qquad \mu(V) = \frac{1}{RC} f'(V) \ , \tag{C.2}$$

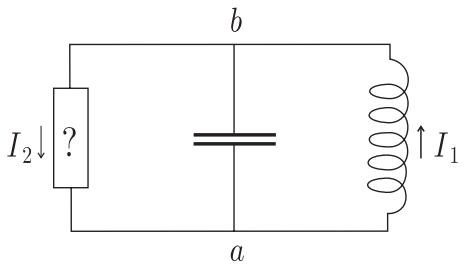

Figura 1.49: *Un circuito elettrico con un componente non lineare*

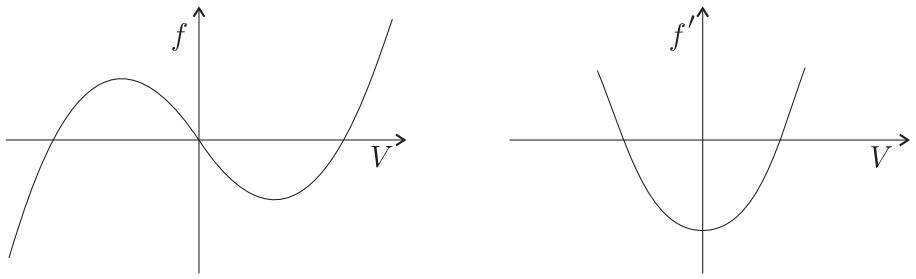

Figura 1.50: *L'aspetto qualitativo di f che serve per produrre un ciclo limite.*

ove si è posto $\omega^2 = 1/(LC)$ e si è denotata con f' la derivata prima di f.

Nel caso lineare $f(V) = V$ si ha un oscillatore armonico smorzato e corrispondentemente, per $t \to \infty$, si ha il comportamento asintotico banale $V(t) \to 0$. Lo stesso comportamento si trova con evidenza per ogni f monotona crescente (basta usare l'energia $\frac{1}{2}\dot{V}^2 + \frac{\omega^2}{2}V^2$ come funzione di Lyapunov). Per avere il fenomeno del ciclo limite occorre una f sostanzialmente diversa, del tipo "a doppia gobba" come la cubica γ che abbiamo introdotto nello studio dell'equazione, in modo da avere pendenza f' negativa per $|V|$ piccolo e positiva per $|V|$ grande; si veda la figura 1.50.

Il tratto a pendenza negativa attorno all'origine comporta il fatto curioso che la corrente scorre in direzione opposta alla differenza di potenziale. Ma in questo modo si immette energia nel circuito (cosa evidentemente necessaria per $|V|$ piccolo, se vogliamo un ciclo limite), e dunque il componente non lineare deve contenere un amplificatore. Con semplificazione drastica, intendiamo qui per amplificatore un elemento di circuito con tre connessioni esterne — un "ingresso" A, una "uscita" B, e una connessione comune C, si veda la figura 1.51 — tale che, se indichiamo con

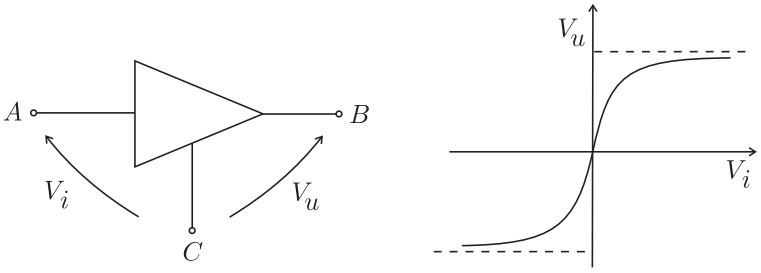

Figura 1.51: *L'amplificatore ideale, con ingresso, uscita e terminale comune; l'andamento di V_u come funzione di V_i.*

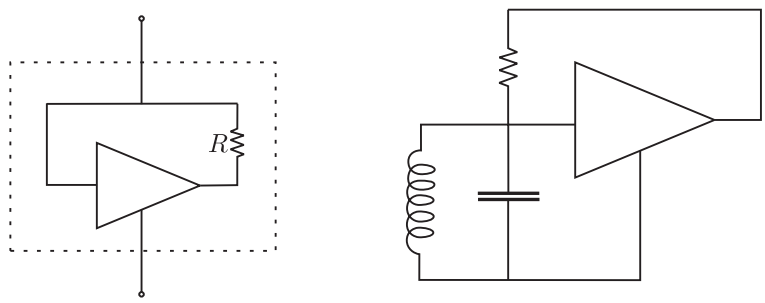

Figura 1.52: *Sinistra: la costruzione del componente non lineare; destra: il circuito completo.*

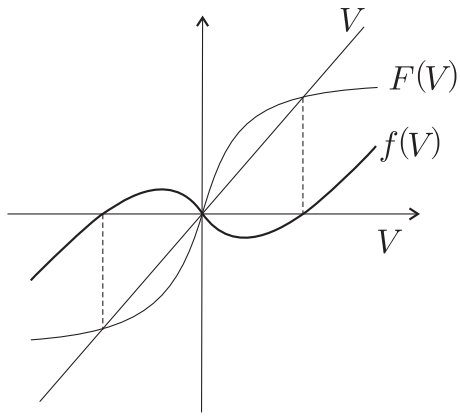

Figura 1.53: *La funzione* $f(V) = V - F(V)$.

$V_i = V_A - V_C$ e $V_u = V_B - V_C$ le tensioni in ingresso e in uscita,

- V_u è funzione della sola V_i, $V_u = F(V_i)$, con F monotona crescente della forma qualitativa indicata in figura 1.51; la pendenza $F'(V)$ si suppone maggiore di uno per per $|V|$ piccolo, mentre per $|V|$ grande F "satura" a due valori opposti $\pm V_{\max}$.
- La corrente in ingresso è trascurabile.

Il numero $\alpha = F'(0) > 1$ è detto guadagno dell'amplificatore per piccoli segnali. (L'alimentazione, pensata interna al dispositivo, non è rappresentata.)

Con questo componente ideale costruiamo il componente non lineare a due connessioni esterne, da inserire nel circuito di figura 1.49, nel modo indicato in figura 1.52, sinistra; il circuito completo è disegnato, in modo equivalente, nella parte destra della figura. Poiché $V = V_i$, si ha $V_u = F(V)$, e dunque $I_2 = (V - F(V))/R$. Per confronto con la (C.1) si vede allora che la funzione f è

$$f(V) = V - F(V) \ ,$$

e il suo grafico ha la forma qualitativa voluta; si veda la figura 1.53. In particolare si ha, come richiesto, $f'(0) = 1 - \alpha < 0$.

Il parametro μ_0 che compare nella (1.5.6) è, a meno del segno, il valore del coefficiente $\mu(x)$ per $x = 0$; qui è allora

$$\mu_0 = -\frac{f'(0)}{RC} = \frac{\alpha - 1}{RC} \ ,$$

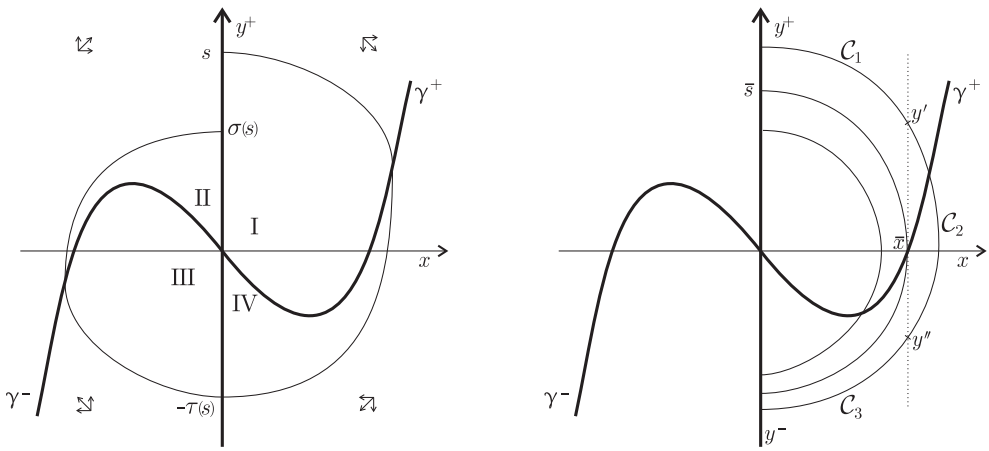

Figura 1.54: *Sinistra: le due mappe σ e $\tau : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Destra: a illustrazione del Lemma 15.*

e corrispondentemente il parametro adimensionale $\beta = \mu_0/\omega$ è

$$\beta = \sqrt{\frac{L}{C}}\,\frac{\alpha - 1}{R} \ .$$

Per β piccolo (piccolo guadagno o grande R, per fissati L e C) l'oscillatore lavora in zona quasi lineare: l'uscita è quasi sinusoidale, la frequenza è prossima a $1/\sqrt{LC}$. Per β grande lavora invece in zona non lineare (in saturazione): l'onda è deformata e la frequenza è proporzionale a ω/β, ovvero (supponendo $\alpha \gg 1$) a $\frac{R}{\alpha L}$.

C.2 Dimostrazione dell'esistenza di un ciclo limite per ogni $\beta > 0$

Dimostriamo qui la proposizione 12. Ci serviamo per questo delle coordinate x e $y = v + \beta\gamma(x)$, ove $\gamma(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, introdotte nello studio approssimato del caso $\beta \gg 1$; in tali coordinate le equazioni del moto, ricordiamo, sono

$$\dot{x} = \beta\big(y - \gamma(x)\big) \ , \qquad \dot{y} = -\beta^{-1}x \ . \tag{C.3}$$

Come già si è osservato, la cubica γ e l'asse y dividono il piano xy in quattro regioni I–IV (figura 1.31 e 1.54) nelle quali $\dot{x}$ e $\dot{y}$ hanno segno definito, nell'ordine $(+,-)$, $(+,+)$, $(-,+)$, $(-,-)$; ciò è già sufficiente a garantire che ciascuna traiettoria con origine nel semiasse y positivo, che denotiamo y^+, taglia successivamente γ^+, y^-, γ^- (con ovvio significato dei simboli), poi ancora y^+, e così via. Ha senso allora considerare lla mappa $\sigma : \ y^+ \to y^+$, corrispondente al primo ritorno della traiettoria su y^+ (sezione di Poincaré).

Se usiamo una variabile $s \in \mathbb{R}^+$ come coordinata su y^+, e teniamo conto che le traiettorie non si possono intersecare, è chiaro che per ogni s vi sono tre sole possibilità:

i) $\sigma(s) = s$, la traiettoria si chiude;

ii) $\sigma(s) > s$, e allora $s < \sigma(s) < \sigma^2(s) < \cdots$, ovvero la traiettoria procede a spirale verso l'esterno.

iii) $\sigma(s) < s$, e allora $s > \sigma(s) > \sigma^2(s) > \cdots$, ovvero la traiettoria procede a spirale verso l'interno.

Accanto alla mappa $\sigma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, corrispondente a un giro completo dell'orbita, è utile considerare una mappa $\tau : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ corrispondente a mezzo giro: precisamente, se l'orbita di origine $(0, s) \in y^+$ taglia per la prima volta y^- in $(0, -s')$, $s' > 0$, poniamo $\tau(s) = s'$. La simmetria delle equazioni mostra che σ si ottiene componendo due volte τ, ovvero $\sigma(s) = \tau(\tau(s))$; le tre possibilità sopra considerate corrispondono allora rispettivamente a $\tau(s) = s$, $\tau(s) > s$, e $\tau(s) < s$.

Poniamo ora $\delta(s) = \frac{1}{2}(\tau(s)^2 - s^2)$, e dimostriamo il seguente

Lemma 15 *Esiste un valore $\bar{s}$, tale che: (a) $\delta(s) > 0$ per $0 < s \le \bar{s}$; (b) $\delta(s)$ è strettamente decrescente per $s \ge \bar{s}$; (c) $\delta(s)$ tende a $-\infty$ per $s \to +\infty$.*

Dimostrazione. Per ogni $s > 0$, sia t_s il tempo al quale la traiettoria di origine $(0, s)$ taglia per la prima volta l'asse y^-; introduciamo la funzione $W(x, y) = \frac{1}{2}(\beta^{-2}x^2 + y^2)$, e osserviamo che risulta

$$\delta(s) = W(0, y_s(t_s)) - W(0, s) = \int_0^{t_s} \dot{W}(x_s(t), y_s(t))\,\mathrm{d}t \ , \tag{C.4}$$

ove $(x_s(t), y_s(t))$ indica il movimento con dato iniziale $(0, s)$. Dalle equazioni del moto (C.3) si ottiene subito $\dot{W} = \beta^{-2}x\dot{x} + y\dot{y} = -\beta^{-1}x\gamma(x)$, perciò

$$\delta(s) = -\beta^{-1} \int_0^{t_s} x_s(t)\gamma(x_s(t))\,\mathrm{d}t \ .$$

Sia ora $\bar{s} > 0$ il punto di y^+ tale che la traiettoria uscente da $(0, \bar{s})$ taglia l'asse x nel suo punto di intersezione $(\bar{x}, 0)$ con γ^+ (figura 1.54, destra); per $\gamma(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ risulta evidentemente $\bar{x} = \sqrt{3}$. E' chiaro che, se $s \le \bar{s}$, allora si ha $\gamma(x_s(t)) \le 0$ per $0 \le t \le t_s$. In tali condizioni l'integrale nella (C.4) risulta positivo, e questo basta per il punto (a).

Per il punto (b), la stima dell'integrale è poco più complicata: prendiamo una traiettoria uscente da $(0, s)$ con $s > \bar{s}$; dividiamola in tre curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$, a seconda che sia $x_s(t) < \bar{x}$, $x_s(t) \ge \bar{x}$, e poi ancora $x_s(t) < \bar{x}$ (si veda la figura), e scriviamo

$$\delta(s) = \int_{\mathcal{C}_1} \dot{W}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathcal{C}_2} \dot{W}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathcal{C}_3} \dot{W}\,\mathrm{d}t \ .$$

Per il primo integrale è possibile sostituire x a t come variabile indipendente; usando $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\dot{x} = (y - \gamma(x))^{-1}$ si trova subito

$$\int_{\mathcal{C}_1} \dot{W}(x_s(t), y_s(t))\,\mathrm{d}t = -\beta^{-2} \int_0^{x_1} \frac{x\,\gamma(x)}{\mathcal{Y}_s(x) - \gamma(x)}\mathrm{d}x \ ,$$

ove si è indicata con $\mathcal{Y}_s(x)$ la curva implicitemente definita dal movimento $(x_s(t), y_s(t))$. E' evidente da questa espressione che il contributo di $\mathcal{C}_1$ è positivo e decrescente al crescere di s (si osservi che $\mathcal{Y}_s(x)$ per ogni x è crescente con s). In modo del tutto analogo si vede che anche il contributo di $\mathcal{C}_3$ è positivo (attenzione al verso di percorrenza di $\mathcal{C}_3$), e decrescente con s. Per il secondo integrale possiamo invece usare y come variabile indipendente, e scrivere

$$\int_{\mathcal{C}_2} \dot{W}\,\mathrm{d}t = -\int_{y'}^{y''} \gamma(\mathcal{X}_s(y))\,\mathrm{d}y \ ,$$

ove $\mathcal{X}_s(y)$ è la curva implicitamente definita dal movimento in esame, e gli estremi di integrazione sono ordinati in modo che sia $y'_s < y''_s$ (cioè in ordine opposto al verso di percorrenza; ciò spiega il

segno meno). Si vede allora che il contributo di $\mathcal{C}_2$ è negativo, e crescente in modulo per s crescente: infatti, a fissato y, $\mathcal{X}_s(y)$ cresce con s (la traiettoria è più esterna), perciò anche γ cresce, e inoltre il dominio di integrazione in y si allarga. Ciò basta per concludere che $\delta(s)$, per $s \geq \bar{s}$, è decrescente (strettamente), come asserito in (b).

Infine, poiché al crescere di s la traiettoria si sposta verso destra a piacere (per tutti i punti di γ^+, con ascissa x comunque grande, passa una traiettoria che proviene da y^+ con s sufficientemente grande, e interseca l'asse delle ascisse a destra di x) è anche chiaro che $\delta(s) \to -\infty$ per $s \to +\infty$.

□

Dal lemma si deduce all'istante che esiste un unico zero s^* di δ in $\mathbb{R}^+$, e dunque un'unica orbita periodica. Che poi tale orbita sia globalmente attrattiva è del tutto evidente: ad esempio per $0 < s < s^*$ si ha $\delta(s) > 0$, e dunque la successione $\sigma^k(s)$ è crescente; il suo limite è necessariamente invariante (come segue dalla continuità di δ), e dunque coincide con s^*. In modo analogo si ragiona per $s > s^*$. La dimostrazione della proposizione 12 è così conclusa.

D Le oscillazioni forzate

Trattiamo qui alcuni semplici esempi di sistema lineare non autonomo, precisamente l'oscillatore armonico, con o senza smorzamento, "forzato" mediante l'aggiunta di un termine $F(t)$ nell'equazione del moto. La linearità, come si vedrà, fa sì che tutto si risolva esattamente senza incontrare particolari difficoltà (si confronti col comportamento, ben più complicato, del pendolo forzato).

D.1 L'oscillatore armonico con forzante sinusoidale

Il modello più semplice è quello di un oscillatore armonico con forzante sinusoidale:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = C \cos \Omega t \ . \tag{D.1}$$

L'equazione è lineare non omogenea, perciò l'integrale generale si trova aggiungendo all'integrale generale dell'omogenea associata, $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, una qualunque soluzione particolare. E' spontaneo cercare una soluzione particolare con la stessa periodicità della forzante,

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$$

(φ ha il significato di differenza tra la fase della forzante e quella della soluzione; quest'ultima senza perdita di generalità è stata presa nulla). Sostituendo nell'equazione si trova subito

$$(-\Omega^2 + \omega^2)\, A \cos(\Omega t + \varphi) = C \cos \Omega t \ ,$$

pertanto si ottiene una soluzione per

$$\varphi = 0 \ , \qquad A = \frac{C}{\omega^2 - \Omega^2} \ ,$$

purché però risulti $\omega^2 \neq \Omega^2$. L'integrale generale della (D.1) è corrispondentemente

$$x(t) = \frac{C}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t + a \cos \omega t + b \sin \omega t \ , \tag{D.2}$$

con a e b costanti arbitrarie determinate dalle condizioni iniziali. Il moto risulta così sovrapposizione di due oscillazioni di frequenza ω e Ω e in generale non è periodico;[35] si veda la figura 1.55.

[35] Lo è se e solo se le frequenze ω e Ω sono in rapporto razionale.

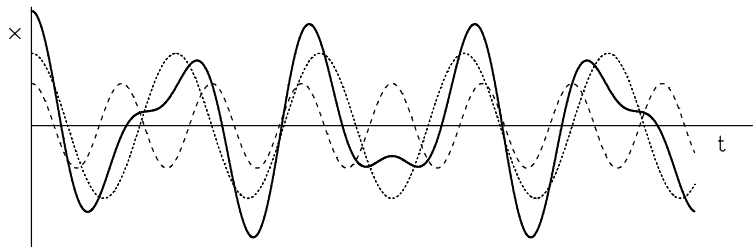

Figura 1.55: *La soluzione $x(t)$ (linea continua) come sovrapposizione di due oscillazioni di frequenza diversa (linee tratteggiata e punteggiata).*

Un'espressione più interessante si ottiene introducendo nella (D.2), al posto delle costanti arbitrarie a e b, i dati iniziali x_0 e v_0. E' immediato verificare che risulta $a = x_0 - C/(\omega^2 - \Omega^2)$, $b = v_0/\omega$, e dunque si ottiene per la soluzione l'espressione

$$x(t) \;=\; \frac{C}{\omega^2 - \Omega^2}\,(\cos\Omega t - \cos\omega t) + x_l(t)\ , \tag{D.3}$$

ove si è indicato con

$$x_l(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

il moto libero che vi sarebbe con le medesime condizioni iniziali, in assenza di forzante. Questa espressione è interessante perché mostra la soluzione come sovrapposizione del moto libero e di un termine aggiuntivo, che possiamo chiamare *termine forzato*, che è indipendente dai dati iniziali dell'oscillatore e proporzionale all'ampiezza C della forzante.

La (D.3) può anche essere utilizzata per studiare il caso $\Omega = \omega$ (caso *risonante*, con risonanza "1–1"). Ad ogni t fissato, infatti, la (D.3) ammette limite per $\Omega \to \omega$, precisamente

$$x(t) \;=\; \frac{C}{2\omega}\ t\ \sin\omega t + x_l(t)\ , \tag{D.4}$$

e come ci assicura il teorema di continuità delle soluzione al variare dei parametri (proposizione 4), tale limite è sicuramente soluzione dell'equazione (D.1) per $\Omega = \omega$. La verifica diretta che la (D.4) è soluzione naturalmente si può fare ed anzi è facilissima, ma in linea di principio non è necessaria. Si noti che la continuità per $\Omega \to \omega$ non traspare invece dalla (D.2), ove son tenuti fissi non i dati iniziali ma le costanti a e b.

L'espressione (D.4) mostra che per $\Omega = \omega$ l'ampiezza delle oscillazioni cresce indefinitamente, cosicché il comportamento asintotico per $t \to \infty$ è qualitativamente diverso dal caso $\Omega \neq \omega$ (e ciò non è in contrasto con il teorema di esistenza e unicità, perché questo garantisce la continuità rispetto ai parametri per ogni tempo fissato). E' questo l'esempio più semplice di un fenomeno importante, chiamato *risonanza*; con questo nome ci si riferisce, in generale, alla presenza di rapporti razionali tra le frequenze che intervengono in un sistema (qui $\Omega/\omega = 1$) e agli effetti talvolta "drammatici" che ne conseguono. L'effetto della risonanza è, in questo caso, la comparsa nella soluzione di un termine non periodico o *secolare,* importante per tempi lunghi (da ciò il nome) anche in caso di ampiezza C della forzante molto piccola.

E' interessante analizzare la soluzione (D.4) in prossimità della risonanza, ovvero quando $\Omega \simeq \omega$, $\Omega \neq \omega$. Limitiamoci a considerare il termine forzato (ovvero la soluzione per i dati iniziali $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$). Quando le pulsazioni sono vicine, è spontaneo introdurre la loro media $\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\Omega + \omega)$

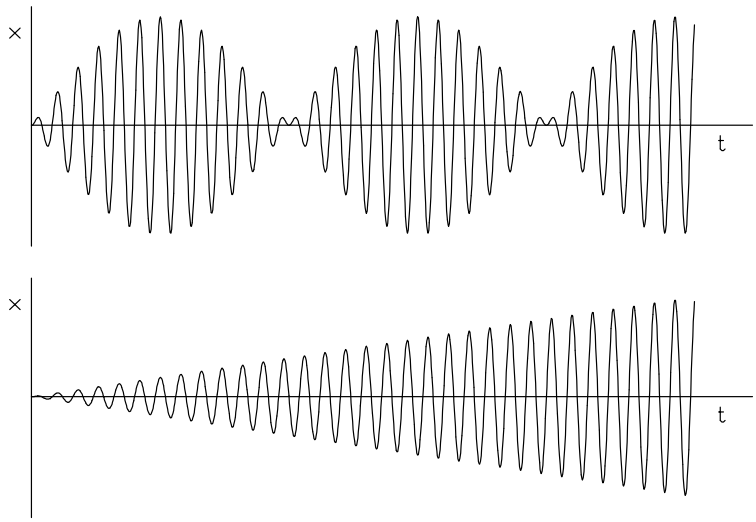

Figura 1.56: *Battimenti e risonanza.*

e il loro scarto $\varepsilon = \frac{1}{2}(\Omega - \omega)$; sostituendo $\Omega = \overline{\omega} + \varepsilon$ e $\omega = \overline{\omega} - \varepsilon$ nella soluzione si trova subito l'espressione assai interessante

$$x(t) = \mathcal{A}(t) \sin \overline{\omega} t \ , \qquad \mathcal{A}(t) = \frac{C}{2\varepsilon\overline{\omega}} \sin \varepsilon t \ ,$$

in cui la soluzione appare come un'*oscillazione modulata*, cioè il prodotto di un'oscillazione relativamente rapida di pulsazione $\overline{\omega}$ (*portante*) per una ampiezza $\mathcal{A}(t)$ lentamente variabile con frequenza ε(*modulante*). È questo il fenomeno dei *battimenti,* tipico della sovrapposizione di oscillazioni di frequenza poco diversa, e comunemente usato per accordare gli strumenti musicali: il lieve disaccordo di due note si percepisce distintamente come un'oscillazione ritmica, o battimento, della modulante, il cui periodo diventa sempre più lungo al decrescere del disaccordo, e non si ode più quando le due frequenze sono uguali. La figura 1.56 illustra il fenomeno dei battimenti e il passaggio alla risonanza esatta quando, per $\Omega \to \omega$ (cioè $\varepsilon \to 0$), il periodo dell'oscillazione lenta tende all'infinito, mentre l'ampiezza dell'oscillazione modulata cresce linearmente col tempo.

D.2 Il caso smorzato

Abbiamo visto sopra che per un oscillatore armonico non smorzato, forzato con un termine sinusoidale, l'ampiezza delle oscillazioni può essere molto elevata quando le due frequenze sono vicine, e addirittura diverge, per $t \to \infty$, nel caso di risonanza. Tale comportamento singolare scompare, come ora vedremo, in presenza di attrito viscoso.

Consideriamo dunque l'equazione

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x \ = \ C \cos \Omega t \qquad \omega, \mu > 0 \ , \tag{D.5}$$

e procedendo come nel caso non smorzato, cerchiamo ancora una soluzione particolare armonica con la stessa frequenza del termine forzante, ovvero

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) \ ,$$

con A e φ costanti da determinare. Procedendo per sostituzione, si trova subito l'equazione, da risolvere identicamente in t,

$$(\omega^2 - \Omega^2)A\cos(\Omega t + \varphi) - 2\mu\Omega A\sin(\Omega t + \varphi) = C\cos\Omega t \ .$$

Il modo più semplice di procedere, anche se forse non il più spontaneo, è quello di scrivere il coseno al secondo membro come

$$\cos\Omega t = \cos(\Omega t + \varphi - \varphi) = \cos(\Omega t + \varphi)\cos\varphi + \sin(\Omega t + \varphi)\sin\varphi \ ,$$

dopodiché è facile uguagliare i coefficienti di $\cos(\Omega t + \varphi)$ e $\sin(\Omega t + \varphi)$ al primo e secondo membro. Segue facilmente la soluzione

$$A = \frac{C}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2}} \ , \qquad \tan\varphi = -\frac{2\mu\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \ , \tag{D.6}$$

con determinazione dell'angolo tra $-\pi$ e 0. Si osservi che la soluzione trovata ha significato anche in caso di risonanza, $\Omega = \omega$; in tal caso è $\varphi = -\pi/2$.

Alla soluzione particolare (D.6) così ottenuta si deve aggiungere l'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla (D.5); questo termine tuttavia non è molto interessante, almeno per tempi lunghi, perché come sappiamo ogni soluzione del problema non forzato tende a zero (a ritmo esponenziale) per $t \to \infty$. Ci focalizziamo allora sulla soluzione particolare trovata, ovvero sul comportamento a regime.

La (D.6) mostra immediatamente che, al variare di ω, l'ampiezza A ha un massimo per $\omega = \Omega$ e che tale massimo vale $C/(2\mu\Omega)$, e dunque è tanto più elevato quanto più piccolo è il coefficiente di attrito. Inoltre, lo sfasamento φ, al variare di ω e Ω, varia con continuità tra 0 e $-\pi$ (lo sfasamento è sempre negativo, ossia le oscillazioni ritardano rispetto alla forza agente). Con evidenza, la divergenza di A a regime, per $\mu \to 0$ in risonanza, corrisponde al fatto che per $\mu = 0$ in risonanza le oscillazioni forzate hanno ampiezza che cresce indefinitamente col tempo.

Esercizio 22 *si studi l'andamento dell'ampiezza A per fissato ω al variare di Ω.*

Esercizio 23 *si scriva l'integrale generale della (D.5) per $\Omega = \omega$ e $\mu < \omega$, facendo riferimento esplicito ai dati iniziali x_0 e v_0. Si osservi che per $\mu \to 0$ a t fissato non vi sono divergenze, ma si riottiene la (D.4).*

Esercizio 24 *si determini il moto di un oscillatore armonico, con o senza attrito viscoso, soggetto a una forza dipendente dal tempo della forma seguente: (a) $F(t) = Ce^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$; (b) $F(t) = Ce^{-\lambda t}\cos\Omega t$; (c) $F(t) = Ct$, con le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.*

Applicazione: l'oscillatore forzato come "filtro".

E' innanzitutto evidente che se conosciamo n soluzioni particolari $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ della (D.1) o della (D.5), corrispondenti alle forzanti $F_1(t), \ldots F_n(t)$, allora $x(t) = x_1(t) + \cdots + x_n(t)$ è soluzione della medesima equazione, corrispondente alla forzante $F(t) = F_1(t) + \cdots + F_n(t)$. Consideriamo allora in particolare l'equazione (D.5), supponendo che $F(t)$ sia somma di n termini sinusoidali $F_k(t) = C_k\cos(\Omega_k t + \psi_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Con banale generalizzazione di quanto visto a proposito

della (D.5), si vede che una soluzione particolare (anzi, la soluzione di regime) corrispondente al singolo termine F_k è $x_k(t) = A_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k)$, ove

$$A_k \;=\; \frac{C_k}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega_k^2)^2 + 4\mu^2\Omega_k^2}}\,, \qquad \varphi_k \;=\; \psi_k - \arctan\frac{2\mu\Omega_k}{(\omega^2 - \Omega_k^2)}$$

(la generalizzazione sta solo nella presenza della fase $\psi_k \neq 0$). La soluzione di regime della (D.5) corrispondente a $F(t) = F_1(t) + \cdots F_n(t)$ è allora sovrapposizione di n moti armonici, precisamente

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k)\,.$$

Nel caso μ sia molto piccolo (rispetto a tutte le frequenze in gioco), l'ampiezza di ciascuno di questi moti dipende sensibilmente, oltre che dall'ampiezza C_k del corrispondente termine forzante, anche dalla frequenza propria ω dell'oscillatore: in particolare, per $\omega = \Omega_l$ (e ampiezze C_k non eccessivamente diverse tra loro), risulta $A_l \gg A_k$, $k \neq l$, cosicché $x(t)$ segue praticamente la sola forzante F_l. In questa particolare situazione di risonanza, l'oscillatore si comporta come un filtro, che risponde selettivamente (tanto più selettivamente, quanto più piccolo è μ) alle sollecitazioni esterne, può selezionarne una, e ad esempio seguirne il lento variare dell'ampiezza nel tempo. Sostanzialmente su questo principio si basano i circuiti di sintonia dei comuni apparecchi radio (alla manopola della sintonia corrisponde la variazione di ω; il lento variare dell'ampiezza della forzante è il segnale che si vuol ricevere.) Viceversa, se si desidera una risposta "piatta" che non privilegi molto una particolare frequenza, è molto utile avere un coefficiente di attrito elevato.

Capitolo 2

Meccanica lagrangiana

2.1 Introduzione

Vi sono due problemi che conducono spontaneamente al formalismo lagrangiano nell'ambito della meccanica di Newton: il problema dell'espressione delle equazioni in un sistema di coordinate arbitrario e il problema, strettamente connesso, dell'eliminazione delle reazioni vincolari nei sistemi vincolati. Tali problemi si pongono già per sistemi costituiti da un solo punto materiale, pertanto li illustreremo qui in questo caso semplice, rinviando ai prossimi paragrafi la trattazione generale. Un ulteriore importante motivo di interesse per il formalismo lagrangiano è la sua connessione con altre discipline come la geometria e l'ottica, o con problemi di ottimizzazione, attraverso la cosiddetta *formulazione variazionale* delle leggi della meccanica; a questo aspetto della meccanica lagrangiana dedicheremo gli ultimi paragrafi del capitolo.

2.1.1 Il punto materiale in coordinate arbitrarie

L'equazione di Newton per un punto P di massa m soggetto a una forza $\mathbf{F}(P, \mathbf{v}, t)$ dipendente dalla sua posizione, dalla sua velocità ed eventualmente dal tempo si scrive, come è noto,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \ . \tag{2.1.1}$$

A questa equazione vettoriale corrispondono tre equazioni scalari: se x, y, z sono le coordinate cartesiane ortogonali di P in un fissato sistema di riferimento di origine O e assi x, y, z con versori $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, la (2.1.1) è equivalente al sistema

$$m\ddot{x} = F_x(P, \mathbf{v}, t) \ , \qquad m\ddot{y} = F_y(P, \mathbf{v}, t) \ , \qquad m\ddot{z} = F_z(P, \mathbf{v}) \ , \tag{2.1.2}$$

ove F_x, F_y e F_z denotano le componenti di $\mathbf{F}$ nel sistema fissato, ovvero $F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x$ eccetera. Queste equazioni, come è noto, sono invarianti per una classe abbastanza vasta di trasformazioni di coordinate — le cosiddette trasformazioni galileiane — che comprendono le traslazioni e le rotazioni del sistema di riferimento e anche il passaggio a sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto al sistema di partenza: cambiando coordinate in questa classe, le nuove equazioni del moto per le nuove coordinate mantengono ancora la forma semplice (2.1.2).

La forma (2.1.2) delle equazioni invece si perde se si passa a sistemi di coordinate più generali, come ad esempio le coordinate cilindriche o polari. Mettiamoci per semplicità nel piano e cerchiamo le equazioni del moto analoghe alle (2.1.2) in coordinate polari piane r, ϑ; il legame tra queste

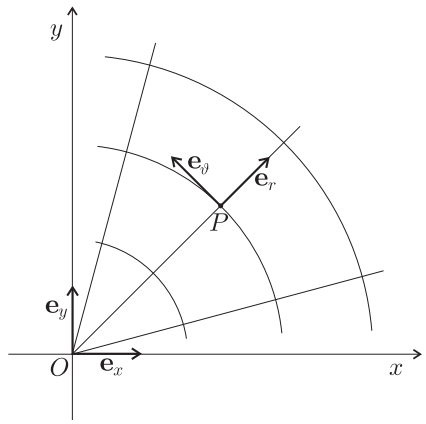

Figura 2.1: *Il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari nel piano.*

coordinate e le coordinate cartesiane, ricordiamo, è

$$x = r\cos\vartheta \ , \qquad y = r\sin\vartheta \ .$$

Per ricavare dalla (2.1.1) due equazioni scalari per r e ϑ dobbiamo proiettarla questa volta non lungo $\mathbf{e}_x$ e $\mathbf{e}_y$, ma lungo i versori $\mathbf{e}_r$ e $\mathbf{e}_\vartheta$ tangenti alle nuove lineee coordinate (versore *radiale* e *trasverso,* figura 2.1). Le componenti radiale e trasversa di $\mathbf{a}$, denotate a_r e a_ϑ, si sanno essere[1]

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 \ , \qquad a_\vartheta = r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} \ ; \tag{2.1.3}$$

posto allora $F_r = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_r$, $F_\vartheta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_\vartheta$, le equazioni del moto prendono la forma, *diversa dalle (2.1.2),*

$$m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\vartheta}^2 \ , \qquad mr\ddot{\vartheta} = F_\vartheta - 2m\dot{r}\dot{\vartheta} \ .$$

E' spontaneo allora chiedersi se non esista una forma più generale della (2.1.2), che risulti invariante sotto *qualsiasi* cambiamento di coordinate. Il problema, in termini generali, si può impostare così: anticipando una notazione che useremo sistematicamente piu avanti, poniamo $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = (x, y, z)$; del tutto in generale, un cambiamento di coordinate da x, y, z a coordinate qualsiasi $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ — la notazione è tradizionale — è una mappa regolare[2]

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{q}) \ ,$$

o equivalentemente

$$x = x(q_1, q_2, q_3) \ , \qquad y = y(q_1, q_2, q_3) \ , \qquad z = z(q_1, q_2, q_3) \ ,$$

[1]Il modo più semplice per determinare a_r e a_ϑ è quello di scrivere il vettore posizione del punto P come $P - O = r\mathbf{e}_r$; velocità e accelerazione di P si trovano derivando rispetto al tempo: usando le relazioni, frequentemente utili,

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta \ , \qquad \dot{\mathbf{e}}_\vartheta = -\dot{\vartheta}\mathbf{e}_r \ ,$$

si trova subito $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta$ e poi $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})\,\mathbf{e}_\vartheta$, che dà le (2.1.3). Le espressioni per $\dot{\mathbf{e}}_r$ e $\dot{\mathbf{e}}_\vartheta$ seguono subito da

$$\mathbf{e}_r = \cos\vartheta\mathbf{e}_x + \sin\vartheta\mathbf{e}_y \ , \qquad \mathbf{e}_\vartheta = -\sin\vartheta\mathbf{e}_x + \cos\vartheta\mathbf{e}_y \ ,$$

derivando rispetto al tempo.

[2]Escludiamo qui per semplicità i cambiamenti di coordinate dipendenti dal tempo.

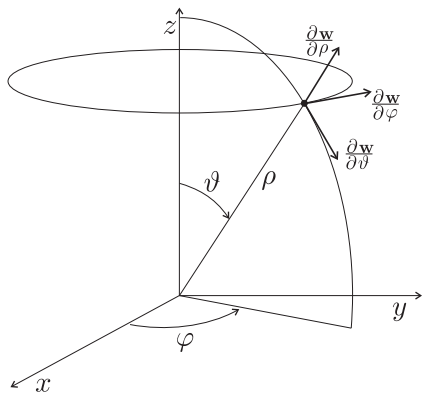

Figura 2.2: *Il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari sferiche.*

da un qualche aperto $U \subset \mathbb{R}^3$ (il dominio di $\mathbf{q}$) alla sua immagine $\mathbf{w}(U)$ contenuta in $\mathbb{R}^3$ (il dominio di $\mathbf{w}$), tale che la matrice jacobiana

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix}$$

abbia rango 3 ovvero determinante non nullo; quest'ultima condizione assicura, almeno localmente, che il cambio di coordinate sia un *diffeomorfismo,* cioè una mappa regolare invertibile con inversa regolare (come è necessario perche un cambio di coordinate possa chiamarsi tale). Come è noto, la condizione sul determinante significa che i tre vettori le cui componenti formano le colonne della matrice jacobiana,

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h} = \frac{\partial x}{\partial q_h}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_h}\mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_h}\mathbf{e}_z \ , \qquad h = 1,2,3 \ ,$$

sono linearmente indipendenti, ovvero costituiscono una base in $\mathbb{R}^3$. Ciascun vettore $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h}$ risulta tangente alla h–esima *linea coordinata,* ovvero alla linea che si ottiene lasciando variare la sola q_h; la figura 2.2 mostra la situazione per le comuni coordinate polari sferiche $(q_1,q_2,q_3) = (\rho,\vartheta,\varphi)$ definite da

$$x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi \ , \qquad y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi \ , \qquad z = \rho \cos\vartheta \ . \tag{2.1.4}$$

Esercizio 25 *Per le coordinate polari sferiche definite sopra si scrivano i tre vettori* $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \varphi}$ *tangenti alle linee coordinate e si determini dove la matrice jacobiana* $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial(\rho,\vartheta,\varphi)}$ *ha una caduta di rango (cioè dove le coordinate* non *sono buone).*

Si capisce ora che la via generale per ottenere dall'equazione vettoriale di Newton tre equazioni differenziali scalari per le incognite $q_h(t)$, $h = 1,2,3$, è quella di proiettare l'equazione, punto per punto, sulle tre direzioni tangenti alle linee coordinate, scrivendo

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h} = 0 \ , \qquad h = 1,2,3 \ . \tag{2.1.5}$$

Vedremo nel prossimo paragrafo che questa scrittura, opportunamente sviluppata, conduce a equazioni del moto che *comunque si siano scelte le coordinate hanno una medesima forma,* quella appunto delle equazioni di Lagrange. Prima di procedere tuttavia vale la pena di vedere che equazioni simili alle (2.1.5) si presentano anche nella dinamica del punto vincolato.

2.1.2 Il punto materiale vincolato

Veniamo allora al problema delle equazioni del moto per un punto vincolato. Cominciamo con l'aspetto cinematico del problema, nel caso di un punto su una assegnata superficie $\mathcal{Q}$ (*varietà vincolare*, o *spazio delle configurazioni*). Ricordiamo che una superficie $\mathcal{Q}$ può essere definita in forma implicita, tramite un'equazione $F(x, y, z) = 0$ con F regolare e tale che il suo gradiente ∇F non si annulli su $\mathcal{Q}$, oppure in forma parametrica. Come è noto dall'analisi, per ogni superficie definita in modo implicito è sempre possibile dare localmente una rappresentazione parametrica della forma

$$x = x(q_1, q_2) \ , \qquad y = y(q_1, q_2) \ , \qquad z = z(q_1, q_2) \ , \tag{2.1.6}$$

o con notazione compatta

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(q_1, q_2) \ , \tag{2.1.7}$$

ove $(q_1, q_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$, con U aperto.[3] In particolare la superficie ammette piano tangente in ogni punto e la matrice jacobiana 3×2

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \end{pmatrix}$$

ha rango 2; ciò significa che la coppia di vettori $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h}$, $h = 1, 2$, ciascuno dei quali è tangente alla linea coordinata che si ottiene facendo variare la sola coordinata q_h, costituisce in ogni punto $\mathbf{w} \in \mathcal{Q}$ una base per il piano tangente $T_{\mathbf{w}}\mathcal{Q}$ alla superficie $\mathcal{Q}$ in $\mathbf{w}$. Ogni vettore tangente si può allora rappresentare come combinazione lineare di tali due vettori (figura 2.3). Per i vettori tangenti useremo la notazione[4] $\delta\mathbf{w}$, denotando corrispondentemente le loro componenti sui vettori della base con δq_h, $h = 1, 2$; scriveremo dunque

$$\delta\mathbf{w} = \sum_{h=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h} \delta q_h \ . \tag{2.1.8}$$

Il vettore $\delta\mathbf{w} \in T_{\mathbf{w}}\mathcal{Q}$ viene anche detto *spostamento virtuale* (nel senso di spostamento a priori possibile, compatibile col vincolo, da distinguersi dallo spostamento effettivo realizzato in un certo moto che passa per $\mathbf{w}$). Le coordinate locali q_1, q_2 sono dette *coordinate libere* (in contrapposizione alle x, y, z che sono legate da $F(x, y, z) = 0$).

Esempio Si consideri il pendolo sferico, ovvero un punto materiale soggetto al vincolo $F(x, y, z) = 0$, con $F = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$; la condizione $\nabla F \neq 0$ sulla sfera $F = 0$ è soddisfatta. Nella semisfera superiore (o inferiore) si possono usare $q_1 = x$ e $q_2 = y$ come coordinate libere; le equazioni parametriche corrispondentemente sono

$$x = q_1 \ , \qquad y = q_2 \ , \qquad z = \sqrt{R^2 - q_1^2 - q_2^2} \ , \tag{2.1.9}$$

[3] Una rappresentazione possibile (benché non sempre la più conveniente) si ottiene dal teorema della funzione implicita: se ad esempio in un punto si ha $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, allora la superficie si può descrivere localmente come il grafico di una funzione $z = f(x, y)$, con una opportuna f; in tal caso le (2.1.6) sono date da $x = q_1$, $y = q_2$, $z = f(q_1, q_2)$.

[4] La notazione porta a confondere i vettori tangenti con "quantità piccole", o con i differenziali. E' una confusione piacevole visto che le regole per operare su di essi, a cominciare dalla (2.1.8), sono le stesse. Il modo corretto di leggere la (2.1.8) è di riguardarla come applicazione tangente (o derivata) $D\mathbf{w}$ alla applicazione (2.1.7); $D\mathbf{w}$ è una applicazione lineare da $T_{\mathbf{q}}U$ a $T_{\mathbf{w}(\mathbf{q})}\mathcal{Q}$, che manda il vettore $\delta\mathbf{q}$ di componenti δq_1, δq_2 nel vettore $\delta\mathbf{w}$, ed è rappresentata in coordinate dalla matrice $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2)}$.

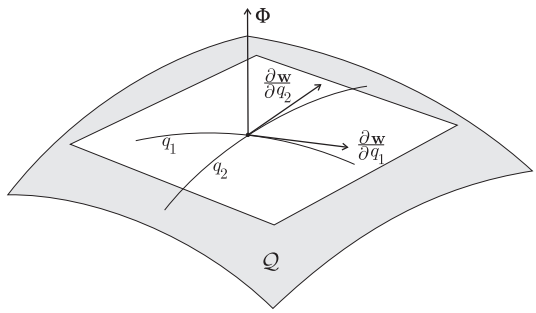

Figura 2.3: *Il punto materiale vincolato a una superficie.*

e la matrice jacobiana $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2)}$ ha rango 2 per $z > 0$. Sull'equatore ($z = 0$) tale scelta delle coordinate libere non è più lecita, perché viene meno la differenziabilità delle (2.1.9). Una diversa scelta, generalmente preferita, delle coordinate libere, è data dagli angoli ϑ e φ delle coordinate sferiche; in questo caso le equazioni parametriche si scrivono

$$x = R\sin\vartheta\cos\varphi\ , \qquad y = R\sin\vartheta\sin\varphi\ , \qquad z = R\cos\vartheta$$

(si tratta evidentemente delle (2.1.4), con $\rho = R$). Si verifica facilmente che la condizione sul rango è soddisfatta ovunque, tranne che sui poli ($\vartheta = 0, \pi$).

Consideriamo infine il caso di un punto vincolato a muoversi su una assegnata curva $\mathcal{Q}$. Questa può essere definita implicitamente tramite una coppia di equazioni $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ (figura 2.4), con funzioni F e G indipendenti, precisamente tali che, su $\mathcal{Q}$, la matrice jacobiana 2×3

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

abbia rango 2, ovvero che i vettori ∇F, ∇G siano linearmente indipendenti;[5] in tal caso la posizione del punto P sulla curva è individuata da una sola coordinata libera, diciamo q_1, e si ha per la curva la rappresentazione parametrica $x = x(q_1)$, $y = y(q_1)$, $z = z(q_1)$, ovvero $\mathbf{w} = \mathbf{w}(q_1)$, con la proprietà $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_1} \neq 0$. Un facile esempio è il pendolo piano di lunghezza l, sospeso all'origine di un riferimento cartesiano xyz. Se il pendolo è vincolato al piano verticale xy, con asse y verticale ascendente, e ϑ denota come di consueto l'angolo tra il semiasse y negativo e il pendolo, il vincolo si scrive tramite le due equazioni

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0\ , \qquad z = 0\ ,$$

mentre la rappresentazione parametrica ($\vartheta = q_1$) è evidentemente

$$x = l\sin\vartheta\ , \qquad y = -l\cos\vartheta\ , \qquad z = 0\ .$$

Si vede allora che, da un punto di vista cinematico, i due casi ora considerati di punto vincolato a una curva o a una superficie si presentano in modo formalmente analogo a quello del punto non vincolato, descritto in coordinate arbitrarie: in ogni caso la posizione del punto P si esprime localmente (cioè in un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$) nella forma parametrica

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(q_1, \ldots, q_n)\ , \tag{2.1.10}$$

[5] La condizione sta al posto della precedente $\nabla F \neq 0$; essa comporta che le due superfici $F = 0$, $G = 0$ siano separatamente ben definite, e inoltre che esse si intersechino trasversalmente (i due vettori ∇F e ∇G, ad esse ortogonali, non sono mai paralleli; figura 2.4).

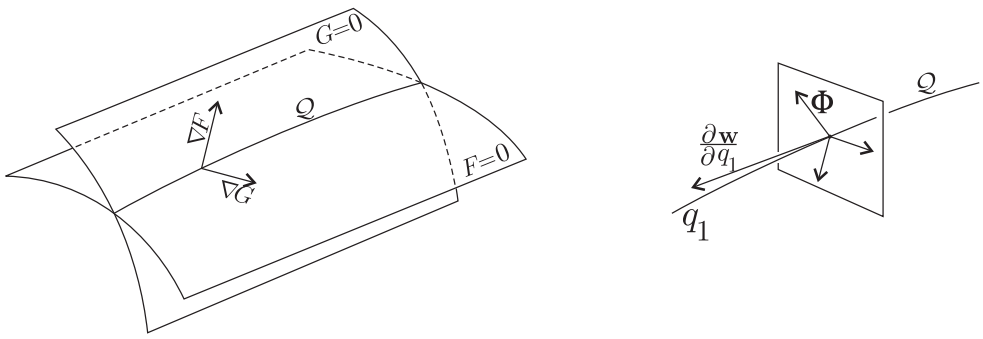

Figura 2.4: *Il punto materiale vincolato a una curva.*

mediante tre funzioni regolari, essendo nei tre casi $n = 1$, $n = 2$ o $n = 3$; inoltre, i vettori $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h}$, $h = 1, \ldots, n$, tangenti alle linee coordinate, sono linearmente indipendenti. Si dice che n è il *numero dei gradi di libertà del sistema.*

Veniamo ora alla dinamica. Mentre nel caso di un punto libero l'uso dell'equazione di Newton non presenta problemi, e conduce immediatamente alle equazioni del moto (2.1.5), nel caso di punto vincolato è indispensabile tener conto dell'azione esercitata dal dispositivo fisico che realizza il vincolo, ovvero mantiene il punto P sulla varietà vincolare $\mathcal{Q}$. La prima ipotesi che si fa è che il dispositivo agisca tramite una forza $\mathbf{\Phi}$ che si aggiunge alle altre forze presenti. Per distinguere, queste si dicono *forze attive,* mentre $\mathbf{\Phi}$ si dice *reazione vincolare.* Se $\mathbf{F}$ denota la risultante delle forze attive, l'equazione di Newton si scrive allora

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi} \ .$$

Mentre $\mathbf{F}$ *va pensata nota a priori* (uno dei dati del problema), $\mathbf{\Phi}$ *invece non lo è:* a tutti gli effetti $\mathbf{\Phi}$ va pensata come un'incognita, che si aggiunge al moto da determinare.

- Consideriamo ad esempio il problema di un punto P di massa m appoggiato ad un pavimento orizzontale. Già sappiamo che sul punto si esercita la forza peso $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$. Se dunque osserviamo che P non si muove, e ammettiamo che valga l'equazione di Newton nella forma $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}$, sarà evidentemente $\mathbf{\Phi} = -\mathbf{F}$: ovvero il pavimento reagisce alla sollecitazione del peso esercitando sul punto una forza (reazione vincolare) $\mathbf{\Phi}$ che bilancia esattamente la forza peso. In particolare dunque la reazione vincolare "si adatta" alla sollecitazione, e non può essere nota a priori anche conoscendo ogni dettaglio costitutivo del pavimento. Di più: in generale $\mathbf{\Phi}$ dipende anche dalla velocità del punto P.[6] Ciò risulta evidente, ad esempio, nel caso semplice di un punto in moto uniforme su una circonferenza orizzontale, in presenza della sola gravità $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$: è noto che in questo caso l'accelerazione è puramente radiale ($a_\vartheta = 0$) e che si ha $a_r = -r\dot{\vartheta}^2$; dunque da $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}$ segue $\mathbf{\Phi} = -m\dot{\vartheta}^2 r\mathbf{e}_r - \mathbf{F}$.

[6] Il fatto che la reazione vincolare non sia puramente posizionale, ma dipenda in generale dal movimento (tipicamente, come nell'esempio che segue, dal quadrato della velocità), pone dei problemi non banali, se si vuole costruire un modello fisico di vincolo, ovvero di dispositivo che non per magia, ma obbedendo alle leggi della meccanica, sia in grado di fornire di volta in volta la reazione vincolare necessaria a rendere il moto conforme al vincolo. Per un'introduzione a questo problema (piuttosto trascurato nella letteratura: non se ne trova traccia nei testi classici), si veda V.I. Arnold *Metodi matematici della meccanica classica, Editori Riuniti (Roma)* e G. Gallavotti, *Meccanica Elementare,* Boringhieri (Torino, 1980). L'idea di fondo, pur non facile da conciliare con la necessità di forze dipendenti dalla velocità, è tuttavia quella intuitiva, cioè che il vincolo sia realizzato da dispositivi dotati di elevata rigidità (moduli elastici grandi, al limite infiniti), in grado di reagire con forze arbitrariamente grandi a impercettibili deformazioni.

Un semplice bilancio tra il numero delle equazioni a disposizione (tre, corrispondenti all'equazione vettoriale di Newton) e il numero delle incognite (tre per Φ, n per il movimento) mostra che il problema non è risolubile se non si hanno a disposizione delle informazioni ulteriori sul dispositivo che realizza il vincolo: mancano, per il vincolo a una superficie o a una curva, rispettivamente $n = 2$ o $n = 1$ equazioni. Il metodo lagrangiano si applica al caso in cui i vincoli siano, come si dice, *ideali,* e permette di scrivere sempre esattamente n equazioni per il movimento $P = P(t)$, nelle quali non compare esplicitamente la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}$; una volta determinato il movimento $\mathbf{w}(t)$, e di conseguenza l'accelerazione $\mathbf{a}(t)$, la reazione vincolare, se richiesta, si determina mediante la relazione $\mathbf{\Phi} = m\mathbf{a} - \mathbf{F}$.

Una definizione generale di vincolo ideale sarà introdotta in un prossimo paragrafo. Nel caso semplice qui considerato di un punto materiale vincolato a una superficie o a una curva assegnata, il vincolo viene detto ideale se la superficie o la curva sono lisce, cioè se la reazione vincolare nel punto $\mathbf{w} \in \mathcal{Q}$ è sempre esattamente perpendicolare alla superficie o alla curva in $\mathbf{w}$ (figure 2.3 e 2.4). Ricordando che denotiamo con $\delta\mathbf{w}$ un generico vettore tangente a $\mathcal{Q}$ in $\mathbf{w}$, la condizione suddetta si esprime analiticamente nella forma

$$\mathbf{\Phi} \cdot \delta\mathbf{w} = 0 \tag{2.1.11}$$

per tutti i vettori tangenti $\delta\mathbf{w}$, o equivalentemente mediante le n condizioni ($n = 1$ o 2)

$$\mathbf{\Phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h} = 0 \qquad \forall h \ . \tag{2.1.12}$$

Si vede così che la condizione di idealità del vincolo fornisce il numero esatto di equazioni mancanti a rendere determinato il problema. Di più: si vede subito che grazie alla condizione (2.1.12), se si procede come per il punto materiale libero proiettando l'equazione di Newton su ciascuno dei vettori tangenti di base $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h}$, la reazione vincolare Φ esce di scena e si ottengono esttamente $n = 2$ o 1 equazioni per il movimento: si trova subito infatti

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h} = 0 \qquad \forall h \ . \tag{2.1.13}$$

Per confronto con la (2.1.5), che coincide formalmente con la (2.1.13) pur di porre $n = 3$, si vede così che anche per la dinamica (e non solo per la cinematica) il caso del punto vincolato a una linea liscia o a una superficie liscia è analogo a quello del punto non vincolato descritto in coordinate arbitrarie, essendo diverso nei diversi casi soltanto il numero n dei gradi di libertà.

2.1.3 Moti relativi e vincoli mobili

Le considerazioni svolte sopra per il moto di un singolo punto si estendono a due altri problemi interessanti. Il primo e più significativo è il problema dei moti relativi: come scrivere correttamente le equazioni del moto in un sistema di riferimento mobile, ad esempio un sistema di riferimento rotante con velocità angolare ω attorno all'asse z del sistema fisso. Come vedremo in dettaglio nel prossimo paragrafo, in ambito lagrangiano non c'è bisogno di inventare "forze apparenti" come la forza centrifuga o la forza di Coriolis, per fingere che il sistema mobile sia inerziale: basterà scrivere un cambiamento di coordinate dipendente dal tempo, nell'esempio

$$x = q_1 \cos\omega t - q_2 \sin\omega t, \qquad y = q_1 \sin\omega t + q_2 \cos\omega t, \qquad z = q_3 \ ,$$

e procedere esattamente come illustrato sopra, proiettando l'equazione di Newton in ciascun punto lungo tre vettori $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h}$ tangenti alle tre linee coordinate nella loro configurazione istantanea, esattamente come sopra, ignorando il fatto che per effetto della dipendenza da t le linee coordinate

si muovono. Le corrette equazioni del moto (già includenti i termini correttivi associati alle forze apparenti) verranno da sé, esattamente come nel caso indipendente dal tempo.

Il secondo problema, chiaramente correlato, è quello dei vincoli mobili: ad esempio il caso di un pendolo sferico di raggio R il cui punto di sospensione C, anzichè essere fisso, si muova lungo l'asse verticale z di moto assegnato, $z_C = z_C(t)$. L'equazione del vincolo si scrive allora nella forma $F(x, y, z, t) = 0$ con

$$F(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + (z - z_C(t))^2 - R^2 \ ,$$

mentre la rappresentazione parametrica del moto, usando come sopra gli angoli ϑ, φ delle coordinate polari sferiche, si scriverà

$$x = R \sin\vartheta \cos\varphi \ , \qquad y = R \sin\vartheta \sin\varphi \ , \qquad z = z_C(t) + R \cos\vartheta \ .$$

Non c'è sostanziale differenza rispetto al caso di vincoli fissi: anche qui si dovrà proiettare l'equazione di Newton nelle due direzioni tangenti alla superficie della sfera (nella sua configurazione istantanea), facendo riferimento ai due vettori tangenti alle linee coordinate $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \varphi}$. Anche la nozione di vincolo ideale resta inalterata: la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}$ deve essere perpendicolare alla sfera (nella sua configurazione istantanea); il fatto che la sfera si muove semplicemente si ignora.

2.2 Sistemi eventualmente vincolati di N punti materiali

2.2.1 Vincoli olonomi e coordinate libere

Dopo aver illustrato nel paragrafo precedente lo scopo del formalismo lagrangiano, e aver in particolare introdotto la nozione di vincolo e coordinate libere per un singolo punto materiale, veniamo ora al caso generale di un numero (finito) qualsiasi di punti materiali. Senza praticamente alcun fastidio includiamo il caso di coordinate dipendenti dal tempo e di vincoli mobili. Consideriamo pertanto N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ e introduciamo per le loro coordinate cartesiane la notazione compatta

$$\mathbf{w} \ = \ (w_1, \ldots, w_{3N}) \ = \ (x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N) \ ;$$

l'unico vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{3N}$ rappresenta così in modo completo la configurazione di tutto il sistema.

In assenza di vincoli un cambiamento di coordinate da $\mathbf{w}$ a nuove coordinate $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $n = 3N$, eventualmente dipendente dal tempo, si scrive

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{q}, t) \ .$$

La matrice jacobiana $\frac{\partial w_i}{\partial q_h}$ si suppone avere ovunque e a ogni istante determinante diverso da zero, cosicché almeno localmente il cambiamento di coordinate è un diffeomorfismo; la stessa condizione assicura anche che i vettori $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h}$, $h = 1, \ldots, n$, tangenti ciascuno a una delle linee coordinate, sono linearmente indipendenti e conseguentemente forniscono una base locale in $\mathbb{R}^{3N}$.

Per quanto riguarda i sistemi vincolati, diamo innanzitutto una definizione:

Definizione 10 *Si dice che un sistema di N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ è soggetto a r vincoli* olònomi, $1 \leq r < 3N$, *se l'insieme delle configurazioni* $\mathbf{w}$ *accessibili al sistema soddisfa r equazioni della forma*

$$F^{(s)}(\mathbf{w}, t) \ = \ 0 \ , \qquad s = 1, \ldots, r \ , \tag{2.2.1}$$

ove $F^{(1)}, \ldots, F^{(r)}$ sono funzioni regolari e indipendenti, precisamente tali che sia

$$\text{rango}\left(\frac{\partial F^{(s)}}{\partial w_j}\right) = r \tag{2.2.2}$$

per ogni configurazione accessibile, ovvero dove la (2.2.1) è soddisfatta.

Resta così definita, per ogni tempo t, una varietà $\mathcal{Q}$ di dimensione $n = 3N - r$, immersa in $\mathbb{R}^{3N}$ (più precisamente, una sottovarietà di $\mathbb{R}^{3N}$); $\mathcal{Q}$ è chiamata *varietà vincolare* o *spazio delle configurazioni,* mentre n è detto *numero dei gradi di libertà* del sistema vincolato.

Come insegna l'analisi, la condizione (2.2.1) consente di introdurre, almeno localmente, una rappresentazione parametrica di $\mathcal{Q}$, cioè di esprimere le coordinate $w_1, \ldots, w_{3N}$ in funzione di n opportuni parametri o *coordinate libere* $q_1, \ldots, q_n$ e del tempo: precisamente[7]

$$w_i = w_i(q_1, \ldots, q_n, t) \ , \qquad i = 1, \ldots, 3N \ , \tag{2.2.3}$$

con $w_1, \ldots, w_{3N}$ tali che

$$\text{rango}\left(\frac{\partial w_i}{\partial q_h}\right) = n \ . \tag{2.2.4}$$

La parametrizzazione in generale è solo locale, cioè copre solo una porzione di $\mathcal{Q}$, costituendone, si dice, una *carta* (come le carte geografiche, nelle quali una porzione di superficie terrestre è riprodotta in una porzione di piano). All'occorrenza si può sempre ricoprire $\mathcal{Q}$ con diverse carte che si sovrappongono ai margini, costruendo, si dice, un *atlante* di $\mathcal{Q}$ (come i comuni atlanti geografici); in questo modo, componendo rappresentazioni locali, si costruisce una rappresentazione globale del sistema. Solo eccezionalmente si ottiene una singola rappresentazione parametrica globale, cioè un atlante costituito da un'unica carta. Nel seguito ci atterremo al punto di vista locale, ma si tenga presente che ogni cosa ammette in realtà un'estensione globale.

Il significato della proprietà (2.2.4) è che gli n vettori

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h} \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ ,$$

tangenti alle linee coordinate in un generico punto $\mathbf{w} \in \mathcal{Q}$, sono una base per lo spazio tangente a $\mathcal{Q}$ in $\mathbf{w}$. Un generico vettore tangente alla varietà vincolare $\mathcal{Q}$, nella sua configurazione istantanea a un qualunque tempo fissato, verrà denotato con $\delta\mathbf{w}$, e potremo scrivere

$$\delta\mathbf{w} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h} \delta q_h \ , \tag{2.2.5}$$

con δq_h coefficienti arbitrari.

Del tutto in generale, comprendendo insieme il caso vincolato e quello non vincolato, faremo riferimento alla seguente

Definizione 11 *Si dice che un sistema di N punti materiali costituisce un* sistema olonomo locale *a $n \leq 3N$ gradi di libertà, se la sua configurazione $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{3N}$ è espressa localmente nella forma parametrica (2.2.3), mediante funzioni $w_1, \ldots, w_{3N}$ regolari soddisfacenti la (2.2.4).*

[7] Infatti, in virtù del teorema della funzione implicita, si possono sempre prendere come coordinate libere n opportune delle coordinate $w_1, \ldots, w_{3N}$; tale scelta tuttavia non è sempre la più conveniente.

Il caso $n = 3N$ corrisponde evidentemente al caso di un cambiamento di coordinate in assenza di vincoli ($r = 0$); in questo caso la varietà vincolare $\mathcal{Q}$ è l'intero spazio, e anche lo spazio tangente coincide con tutto $\mathbb{R}^{3N}$. Nel caso non vincolato la (2.2.5) ha senso e va intesa come espressione di un qualunque vettore di $\mathbb{R}^{3N}$ nella base locale $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h}$, $h = 1, \ldots, n$, formata dai vettori tangenti alle $n = 3N$ linee coordinate.

Nel linguaggio dei punti materiali la rappresentazione parametrica si esprime nella forma, equivalente alla (2.2.3),

$$P_i \;=\; P_i(q_1, \ldots, q_n, t) \;, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{2.2.6}$$

(non stiamo facendo altro che prendere a tre a tre le componenti di $\mathbf{w}$). Corrispondentemente si introduce il cosiddetto *spostamento virtuale dell'i–esimo punto*

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h \;, \qquad i = 1, \ldots, N \;, \tag{2.2.7}$$

nient'altro che una terna di componenti di $\delta\mathbf{w}$ (allineando gli N spostamenti virtuali degli N punti si riottiene evidentemente l'intero vettore tangente $\delta\mathbf{w}$: ovvero $\delta\mathbf{w} = (\delta w_1, \ldots, \delta w_{3N}) = (\delta P_1, \ldots, \delta P_N)$).

Esempio Si consideri un sistema di due punti P_1 e P_2 vincolati a mantenere distanza d fissata; il vincolo si esprime nella forma $F = 0$, con $F = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - d^2$. Si hanno dunque $n = 5$ coordinate libere. Una scelta possibile è data dalle tre coordinate cartesiane di P_1 e dai due angoli ϑ e φ delle coordinate sferiche del vettore $(P_2 - P_1)$. Una scelta più conveniente dal punto di vista delle equazioni di moto che ne conseguono è quella di prendere, al posto delle coordinate cartesiane di P_1, le coordinate cartesiane del baricentro.

2.2.2 Vincoli anolònomi (cenno)

Per completezza di informazione, facciamo qui cenno ai cosiddetti vincoli *anolonomi*, se non altro per spiegare la terminologia sopra introdotta. Consideriamo il caso di un singolo vincolo espresso dall'equazione $F(\mathbf{w}) = 0$; per semplicità lo abbiamo supposto fisso. Differenziando si ottiene la relazione

$$f_1(\mathbf{w})\,\mathrm{d}w_1 + \cdots + f_{3N}(\mathbf{w})\,\mathrm{d}w_{3N} = 0 \;, \tag{2.2.8}$$

ove si è posto $f_i = \frac{\partial F}{\partial w_i}$; in questa forma, l'equazione del vincolo appare piuttosto come una limitazione agli spostamenti consentiti dal vincolo. Questa relazione differenziale è sostanzialmente equivalente all'equazione finita, o intera, $F = 0$, che da essa resta determinata a meno di una costante additiva in F. (Più precisamente, alla forma differenziale (2.2.8) corrisponde una famiglia di vincoli scritti in forma finita $F(\mathbf{w}) = 0$, con le diverse F che differiscono solo per una costante.)

Naturalmente, non ogni limitazione agli spostamenti della forma (2.2.8) dà luogo, per integrazione, a una equazione in forma intera: perché ciò avvenga (almeno localmente) devono essere soddisfatte le condizioni di chiusura

$$\frac{\partial f_i}{\partial w_j} = \frac{\partial f_j}{\partial w_i} \;, \qquad i, j = 1, \ldots, 3N,$$

eventualmente dopo aver moltiplicato la (2.2.8) per un fattore integrante.[8] In questo caso il vincolo

[8] Si deve infatti tener conto del fatto che la (2.2.8) è equivalente a $g_1(\mathbf{w})\mathrm{d}w_1 + \cdots + g_{3N}(\mathbf{w})\mathrm{d}w_{3N} = 0$, se si pone $g_j(\mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{w}) f_j(\mathbf{w})$, $i = 0, \ldots, 3N$, con $\lambda(\mathbf{w}) \neq 0$. Così, perchè alla (2.2.8) corrisponda una forma intera è necessario e sufficiente che esista F le cui derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial w_i}$ siano proporzionali alle f_i con un fattore $\lambda(\mathbf{w})$ che viene detto *fattore integrante*.

continua a chiamarsi olonomo (si usa talora anche l'espressione *semiolonomo*). In effetti, la parola "olonomo" significa proprio che il vincolo è esprimibile con una "legge intera" (da ὅλος = intero, νόμος = legge). Vincoli non interi sono chiamati *anolonomi.*

L'espressione differenziale (2.2.8) si può equivalentemente riscrivere usando le velocità, precisamente

$$f_1\dot{w}_1 + \cdots + f_{3N}\dot{w}_{3N} \ ;$$

il vincolo in tal caso appare come una limitazione alle velocità ammissibili.

Un esempio di vincolo che si scrive spontaneamente in forma differenziale, ma che tuttavia risulta olonomo, è dato dalla condizione di puro rotolamento di un disco su una guida. Consideriamo un disco di raggio R appoggiato all'asse x; allora la sua configurazione è individuata dalle due coordinate x, φ, dove x è l'ascissa del centro C del disco, coincidente con quella del punto A del disco istantaneamente a contatto con la guida, e φ l'angolo tra un prefissato raggio solidale col disco e la verticale discendente, preso ad esempio in senso antiorario. Se però si impone il vincolo di puro rotolamento (cioè che il punto A del disco abbia velocità nulla) si ha la condizione ulteriore

$$\mathrm{d}x + R\mathrm{d}\varphi = 0 \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \dot{x} + R\dot{\varphi} = 0 \ .$$

La forma differenziale esprimente il vincolo è però chiusa e il vincolo si può scrivere nella forma intera

$$x + R\varphi - c = 0 \ ,$$

con c costante arbitraria (determinata, si osservi, una volta assegnato un dato iniziale). Il sistema è pertanto un sistema olonomo a un grado di libertà, e come coordinata libera è naturale prendere, indifferentemente, x o φ.

Alcuni semplici esempi di vincoli anolonomi sono riportati in appendice A.

2.2.3 Vincoli ideali

A. Nozione di vincolo ideale. Consideriamo un sistema olonomo a n gradi di libertà costituito da N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$, e siano le (2.2.3) le equazioni parametriche che esprimono la posizione di ciascun punto materiale in funzione delle coordinate libere $q_1, \ldots, q_n$ e del tempo. Per determinare il movimento $P_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, o equivalentemente $\mathbf{w}(t)$, dobbiamo determinare le n funzioni incognite $q_h(t)$, $h = 1, \ldots, n$. Supporremo che il sistema si muova, conformemente ai vincoli, sotto l'azione di un sistema di *forze attive* $\mathbf{F}_i$, una per ciascun punto materiale, e inoltre di *reazioni vincolari* $\mathbf{\Phi}_i$, ancora una per ciascun punto. Le forze attive si suppongono essere funzioni note della posizione e della velocità dei punti ed eventualmente del tempo,

$$\mathbf{F}_i(P_1, \ldots, P_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N, t) \qquad \text{ovvero} \qquad \mathbf{F}_i(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, t) \ ,$$

mentre le reazioni vincolari sono incognite (tali però da rendere il moto ad ogni istante conforme ai vincoli). Il sistema delle equazioni di Newton per gli N punti materiali si scrive allora

$$m_i\mathbf{a}_i \ = \ \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i \ , \qquad i = 1, \ldots, N \ , \tag{2.2.9}$$

e si è confrontati con il problema di ottenere, a partire da queste, un sistema di n equazioni "pure", cioè che non contengano le reazioni vincolari, in modo che il movimento ne resti determinato.

Un elementare conteggio di numero di equazioni e incognite mostra che il problema è indeterminato, se non si pongono restrizioni sulla natura delle reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}$: le (2.2.9) costituiscono

infatti un sistema di sole $3N$ equazioni scalari, mentre le incognite, includendo le $3N$ componenti delle reazioni vincolari, sono $3N + n$. Le n equazioni mancanti non si possono cercare nei principi generali della dinamica, che abbiamo già usato, ma devono necessariamente provenire da qualche assunzione *a priori* sul tipo di reazioni vincolari che il dispositivo fisico realizzante il vincolo è in grado di produrre. Ciò non stupisce se si pensa che, ad esempio, un punto materiale vincolato a una superficie si muove in modo ben diverso (pur conformemente al vincolo, e a parità di forze attive) a seconda che la superficie sia liscia o in vario modo scabra.

Vediamo dunque alla nozione di *vincolo ideale,* nella quale si generalizza al caso di più punti materiali quanto visto nel caso di un punto solo.

Definizione 12 *Si dice che un sistema olonomo di N punti materiali è soggetto a vincoli ideali, se l'insieme delle reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_1, \ldots, \mathbf{\Phi}_N$ a priori ammissibili è caratterizzato dalla condizione*

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Phi}_i \cdot \delta P_i \; = \; 0 \tag{2.2.10}$$

per ogni possibile scelta degli spostamenti virtuali $\delta P_1, \ldots \delta P_N$.

La quantità a sinistra dell'uguale è detta tradizionalmente *lavoro virtuale* delle reazioni vincolari; la condizione di idealià (2.2.10) si esprime allora dicendo che il dispositivo che fisicamente realizza il vincolo è in grado di produrre tutte e sole le reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_1, \ldots, \mathbf{\Phi}_n$ che compiono lavoro virtuale nullo per tutti gli spostamenti virtuali pensabili.

Usando la (2.2.7), e tenendo conto dell'arbitrarietà delle δq_h, la (2.2.10) si traduce nelle condizioni indipendenti

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Phi}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = 0 \; , \qquad h = 1, \ldots, n \; , \tag{2.2.11}$$

che sono esattamente in numero di n, cioè tante quante ne servono per rendere determinato il problema.[9]

- La (2.2.10) ha una forte analogia con quanto già visto nel caso di un solo punto materiale, che appare chiara se introduciamo il vettore

  $$\mathbf{\Psi} = (\Psi_1, \ldots, \Psi_{3N}) = (\mathbf{\Phi}_1, \ldots, \mathbf{\Phi}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$$

  nel quale sono accostate una dopo l'altra le componenti delle reazioni vincolari, esattamente come le coordinate dei punti vanno a comporre $\mathbf{w}$. Con questa notazione la condizione di idealità si scrive

  $$\mathbf{\Psi} \cdot \delta \mathbf{w} = 0 \qquad \text{per ogni scelta del vettore tangente } \delta \mathbf{w} \; ,$$

  o ancora

  $$\mathbf{\Psi} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h} = 0 \; , \qquad h = 1, \ldots, n \; .$$

  Si vede così che *anche nel caso di N punti materiali la condizione di idealità del vincolo si esprime come ortogonalità della reazione vincolare, più precisamente di $\mathbf{\Psi}$, alla varietà vincolare $\mathcal{Q}$.*

[9] Si osservi che in assenza di vincoli gli spostamenti virtuali $\delta P_1, \ldots, \delta P_N$ sono essi stessi indipendenti, e dalla (2.2.11) si deduce che tutte le reazioni vincolari sono nulle, come ci si aspetta.

In modo del tutto equivalente, nella nozione di vincolo ideale si può far riferimento a tutte le possibili velocità $\mathbf{u}_i$ dei punti materiali a priori compatibili con i vincoli (a ogni tempo fissato, se mobili) dette *velocità virtuali:*

$$\mathbf{u}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h \ ,$$

con $\dot{q}_1, \dots \dot{q}_n$ arbitrari;[10] allora i vincoli sono ideali se si annulla la potenza delle reazioni vincolari per tutte le scelte delle velocità virtuali $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Phi}_i \cdot \mathbf{u}_i = 0 \ , \qquad \forall \ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N \ . \tag{2.2.12}$$

- A proposito della definizione di vincolo ideale, vale la pena di sottolineare un fatto che a prima vista può sfuggire. Ragioniamo, per semplicità, nel caso di un punto vincolato a una superficie fissa. La condizione di idealità implica, come si è appena osservato, che per ogni moto effettivo la reazione vincolare non compie lavoro; tuttavia, l'annullarsi del lavoro per ogni moto effettivo non implica l'idealità del vincolo. Infatti perché il lavoro effettivo sia nullo basta che la reazione vincolare suscitata da ciascun particolare moto (che è diversa da moto a moto), sia di volta in volta ortogonale a quel solo moto. Invece per l'idealità occorre l'ortogonalità alla superficie, cioè non solo alla velocità effettiva del moto in esame, ma a tutte le velocità a priori compatibili con i vincoli, o velocità virtuali.

B. Idealità del vincolo di rigidità.

Un esempio importante di vincolo ideale è il vincolo di rigidità, che si esprime imponendo che per ogni coppia di punti P_i, P_j la distanza $\|P_i - P_j\|$ resti costante (si veda, per questioni generali sui sistemi rigidi che qui si danno per note, l'appendice B). Più precisamente, si dimostra senza difficoltà che il vincolo è ideale se si suppone che esso sia fisicamente realizzato mediante forze interne che a due a due soddisfano il principio di azione e reazione (forze opposte e centrali):

Proposizione 16 *Si consideri un sistema rigido costituito da N punti materiali $P_1, \dots, P_N$, e siano $\mathbf{\Phi}_1, \dots, \Phi_N$ le reazioni vincolari che si accompagnano a un fissato moto. Supponiamo sia*

$$\mathbf{\Phi}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{i,j} \ ,$$

con le $\mathbf{F}_{i,j}$ soddisfacenti il principio di azione e reazione:

$$\mathbf{F}_{i,j} = -\mathbf{F}_{j,i} \ , \qquad \mathbf{F}_{i,j} \quad \text{parallelo a} \quad (P_i - P_j) \ .$$

Allora il vincolo è ideale.

Dimostrazione. Ci limitiamo per semplicità al caso di due soli punti materiali, essendo la generalizzazione del tutto elementare; l'ipotesi sulle reazioni vincolari si riduce in tal caso a

$$\mathbf{\Phi}_2 = -\mathbf{\Phi}_1 \ , \qquad \mathbf{\Phi}_1 \quad \text{parallelo a} \quad (P_1 - P_2) \ .$$

[10] Nel caso di vincoli fissi, le velocità effettivamente realizzate in un certo moto corrispondono a una particolare scelta delle velocità virtuali. Nel caso di vincoli mobili non è più così per la presenza di componenti non tangenti alla varietà vincolare (si pensi a un punto fermo su un piano che si solleva).

Per definizione di sistema rigido si ha $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_1 - P_2)^2 = 0$, e quindi per ogni moto a priori possibile (cioè per qualsiasi velocità $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ compatibili con il vincolo) si ha $(P_1 - P_2) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0$; segue immediatamente che la potenza delle reazioni vincolari si annulla:

$$\mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{\Phi}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{\Phi}_1 \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0 \ .$$

□

E' importante osservare che *le ipotesi sulle forze che realizzano il vincolo sono le stesse ipotesi per cui valgono le equazioni cardinali*

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{\mathrm{ext}} \ , \qquad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{N}^{\mathrm{ext}} \ ,$$

ove $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{M}$ denotano la quantità di moto e il momento angolare del sistema, mentre $\mathbf{R}^{\mathrm{ext}}$ e $\mathbf{N}^{\mathrm{ext}}$ denotano la risultante e il momento risultante delle forze esterne al sistema (in questo caso, di tutte le forze attive). In effetti, si può dimostrare (si veda l'appendice B) che *per i corpi rigidi le equazioni cardinali sono equivalenti all'idealità del vincolo.* Ritorneremo su questo punto dopo aver introdotto le equazioni di Lagrange. Il fatto che il vincolo di rigidità sia ideale, ovvero che la potenza delle reazioni vincolari sia nulla, corrisponde anche al fatto ben noto nell'ambito della meccanica Newtoniana che le forze interne dei sistemi rigidi (a differenza di quanto avviene per sistemi di N punti non rigidi) non contribuiscono all'energia potenziale.

- L'esempio del vincolo di rigidità mostra in particolare come sia importante richiedere, nella (2.2.10) o (2.2.12), che il lavoro o la potenza virtuale *complessiva* delle reazioni vincolari sia nulla, senza che debba essere necessariamente $\mathbf{\Phi}_i \cdot \delta P_i = 0$ o $\mathbf{\Phi}_i \cdot \mathbf{u}_i = 0$ separatamente per ogni punto.

2.3 Energia cinetica, lavoro ed energia potenziale

Il nostro scopo qui è di determinare l'espressione dell'energia cinetica, del lavoro e (per sistemi conservativi) dell'energia potenziale in termini delle coordinate libere $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ e delle corrispondenti velocità $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$, dette anche *velocità generalizzate*.

2.3.1 Energia cinetica

Le equazioni parametriche (2.2.3) e (2.2.6) forniscono la configurazione $\mathbf{w}$ del sistema e la posizione di ciascun punto P_i come funzioni di $\mathbf{q}$ ed eventualmente del tempo; corrispondentemente per le velocità $\dot{w}_i$, $i = 1, \ldots, 3N$ e $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, N$, si ha

$$\dot{w}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t)\ \dot{q} + \frac{\partial w_i}{\partial t}(\mathbf{q}, t) \ , \qquad \mathbf{v}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t)\ \dot{q} + \frac{\partial P_i}{\partial t}(\mathbf{q}, t) \tag{2.3.1}$$

(si osservi che nel caso dipendente dal tempo il vettore $\dot{\mathbf{w}}$ *non* è tangente alla varietà vincolare per la presenza del termine $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$).

Per quanto riguarda l'energia cinetica K del sistema, si ha la facile

Proposizione 17 *Per un sistema olonomo di N punti materiali l'energia cinetica espressa in funzione delle coordinate libere ha la forma*

$$K = K_2 + K_1 + K_0 \tag{2.3.2}$$

con K_2, K_1 e K_0 polinomi di grado rispettivamente 2, 1 e 0 in $\dot{\mathbf{q}}$:

$$K_2 = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}(\mathbf{q},t)\,\dot{q}_h\dot{q}_k\ , \qquad K_1 = \sum_{h=1}^{n} b_h(\mathbf{q},t)\,\dot{q}_h\ , \qquad K_0 = \frac{1}{2}\,c(\mathbf{q},t)\ . \tag{2.3.3}$$

I coefficienti a_{hk}, b_h, c sono dati da

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial q_k} \qquad b_h = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial t}\ , \qquad c = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial t}\ . \tag{2.3.4}$$

Infine la matrice $a = (a_{hk})$ è simmetrica e definita positiva.[11]

La matrice a è chiamata *matrice cinetica.* Il fatto che essa sia definita positiva gioca un ruolo molto importante in tutta la meccanica di Lagrange. Una conseguenza particolarmente rilevante che invocheremo più volte, è che essa ha determinante diverso da zero (più precisamente positivo, come ricordato sopra nella nota) e dunque è invertibile. Nel caso particolare, ma importante, in cui le (2.2.3), (2.2.6) non contengano esplicitamente il tempo (cambio di coordinate indipendente dal tempo, vincoli fissi), si ha $K_1 = K_0 = 0$, cosicché K è una forma quadratica omogenea (definita positiva).

Dimostrazione. Sostituendo l'espressione (2.3.1) di $\mathbf{v}_i$ nella consueta espressione dell'energia cinetica $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$ si trova

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \Big[\sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\,\dot{q}_h\dot{q}_k + 2\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial t}\,\dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial t}\Big]\ ;$$

scambiando le sommatorie e facendo le posizioni (2.3.4) segue subito per K l'espressione cercata.

Per quanto riguarda le proprietà della matrice cinetica a, la simmetria è evidente data la simmetria del prodotto scalare. Per dimostrare che è definita positiva bisogna provare che si ha $K_2 > 0$ per ogni scelta di $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$. Per questo poniamo

$$\mathbf{v}_i^* = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\,\dot{q}_h$$

(sono le velocità "a tempo bloccato": $v_i = v_i^* + \frac{\partial P_i}{\partial t}$). Risulta con evidenza $K_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{v}_i^*)^2$; ma in virtù della condizione (2.2.4) sul rango della matrice $\frac{\partial w_i}{\partial q_h}$ si ha che se $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$, allora le velocità $\mathbf{v}_i^*$ non possono essere tutte nulle, dunque $K_2 > 0$. □

[11] Ricordiamo che una matrice A simmetrica si dice definita positiva se risulta $A\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} > 0$ per ogni $\mathbf{u} \neq 0$. Si dimostra che A è definita positiva se e solo se ogni suo minore diagonale (compresa naturalmente A stessa) ha determinante positivo; da questa proprietà, o direttamente dalla definizione, segue immediatamente che se A è definita positiva, allora ogni suo minore diagonale è anch'esso definito positivo. Un'altra condizione necessaria e sufficiente è che tutti gli autovalori di A (che per A simmetrica sono reali) siano positivi. Per una matrice A simmetrica 2×2 si vede immediatamente che essa è definita positiva se $\det A > 0$ e inoltre gli elementi diagonali (che necessariamente sono concordi se $\det A > 0$) sono positivi. Viceversa il solo fatto che sia $\det A > 0$ non basta a dire che A è definita positiva, come mostra il banale controesempio

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

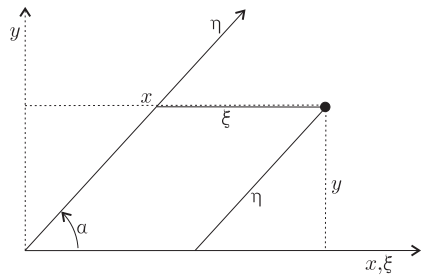

Figura 2.5: *Le coordinate cartesiane oblique* ξ, η.

Esercizio 26 *Si scriva l'energia cinetica per un punto materiale in coordinate polari piane e polari sferiche.* Risposta: per le coordinate polari piane si ha

$$K(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) \ ; \tag{2.3.5}$$

per le coordinate polari sferiche si ha

$$K(\rho, \vartheta, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2 + \rho^2 \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) \ . \tag{2.3.6}$$

Esercizio 27 *Si scriva l'energia cinetica per il pendolo sferico di lunghezza R.* Risposta:

$$K = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2)$$

(basta prendere l'espressione di K in coordinate sferiche e imporre il vincolo $\rho = R$).

In questi esercizi l'energia cinetica non contiene termini misti nelle velocità (la matrice cinetica è diagonale). E' facile vedere che ciò è dovuto al fatto che le linee coordinate si intersecano ortogonalmente. Viceversa:

Esercizio 28 *Si consideri un punto materiale vincolato a un piano; si utilizzino, al posto dei consueti assi ortogonali x e y, un asse ξ coincidente con l'asse x e un asse η formante con l'asse ξ un fissato angolo α (figura 2.5), e si scriva l'energia cinetica.* Risposta: dalle facili relazioni $x = \xi + \eta\cos\alpha$, $y = \eta\sin\alpha$, segue subito

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + 2\cos\alpha\,\dot{\xi}\dot{\eta}) \ . \tag{2.3.7}$$

Esercizio 29 *Si scriva l'energia cinetica per un sistema di due punti materiali soggetti ai vincoli di giacere su un piano e di mantenere distanza fissata d; si utilizzino come coordinate libere: (a) le coordinate cartesiane x_1, y_1 di P_1 e l'angolo ϑ tra il vettore $P_2 - P_1$ e l'asse x; (b) le coordinate X, Y del baricentro e il medesimo angolo ϑ.* Risposta: nel caso (a) si ha

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2[d^2\dot{\vartheta}^2 - 2d(\dot{x}_1\sin\vartheta - \dot{y}_1\cos\vartheta)\dot{\vartheta}] \ ,$$

con $m = m_1 + m_2$; nel caso (b) si trova l'espressione, assai piu semplice,

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}\mu\, d^2\dot{\vartheta}^2 \ ,$$

con $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$; μ è detta *massa ridotta* del sistema. E' tutto come se avessimo una massa m libera e una massa μ su una circonferenza, tra loro indipendenti.

Esercizio 30 *Si scriva l'energia cinetica di un punto materiale vincolato al piano xy, in un sistema cartesiano ruotante uniformemente con velocità angolare ω attorno all'asse z:*

$$x(X,Y,t) = X\cos\omega t - Y\sin\omega t \ , \qquad y(X,Y,t) = X\sin\omega t + Y\cos\omega t \ .$$

Risposta: si trova $K = K_2 + K_1 + K_0$ con

$$K_2 = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \ , \qquad K_1 = m\omega(X\dot{Y} - \dot{X}Y) \ , \qquad K_0 = \frac{1}{2}m\omega^2(X^2 + Y^2) \ .$$

Esercizio 31 *Si scriva l'energia cinetica per il* pendolo centrifugo, *ovvero un pendolo semplice il cui piano di oscillazione ruota uniformemente con velocità angolare ω attorno a un asse verticale passante per il punto di sospensione.* Risposta: basta considerare l'energia cinetica per il pendolo sferico e imporre l'ulteriore vincolo $\varphi = \omega t$ (e quindi $\dot{\varphi} = \omega$); si ottiene

$$K = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sin^2\vartheta) \ .$$

Altri esercizi focalizzati sul calcolo di energia cinetica si trovano nell'Eserciziario annesso a questo testo.

2.3.2 Forze, lavoro, energia potenziale

Consideriamo un sistema olonomo e sia $\mathbf{F}_i$ la forza attiva agente sull'i-esimo punto materiale, $i = 1, \ldots, N$; la quantità

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i \ ,$$

ovvero il lavoro delle forze attive corrispondente agli spostamenti virtuali $\delta P_1, \ldots, \delta P_N$, è detta *lavoro virtuale* delle forze attive.

Proposizione 18 *Risulta*

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \delta P_i = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h \ ,$$

ove si è posto

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{2.3.8}$$

Dimostrazione. Basta usare la (2.2.7) e scambiare le sommatorie. □

In particolare, nel caso di forze posizionali conservative, si sa che esiste una funzione energia potenziale $V(P_1, \ldots, P_N, t)$ tale che

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V \ ,$$

avendo denotato con ∇_i il gradiente ristretto alle tre coordinate x_i, y_i, z_i del punto i–esimo.

Proposizione 19 *Posto $\widehat{V}(\mathbf{q}, t) = V(\mathbf{w}(\mathbf{q}, t), t)$, risulta*

$$Q_h(\mathbf{q}, t) \ = \ -\frac{\partial \widehat{V}}{\partial q_h} \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ .$$

Dimostrazione. Basta applicare la regola di derivazione di una funzione composta. □

Per un singolo punto materiale Q_h è proprio la proiezione di $\mathbf{F}$ in direzione dell'h–esima linea coordinata. Ma intesa opportunamente la cosa resta vera anche per N punti: se infatti allineiamo tutte le forze attive in un unico vettore

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{3N}) = (\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_N) \in \mathbb{R}^{3N} \ ,$$

allora si vede bene che si ha

$$Q_h = \boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_h} \ ;$$

similmente, il lavoro è dato da $\boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot \delta \mathbf{w}$ o equivalentemente da $\mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{q}$, avendo posto $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$, mentre il legame tra forze e energia potenziale si scrive

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = -\nabla V = -\Big(\frac{\partial V}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial w_{3N}}\Big)$$

e corrispondentemente

$$\mathbf{Q} = -\nabla \widehat{V} = -\Big(\frac{\partial \widehat{V}}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial \widehat{V}}{\partial q_n}\Big) \ .$$

Le quantità $Q_1, \ldots, Q_n$, che a tutti gli effetti sostituiscono le forze nel formalismo lagrangiano, prendono il nome di *forze generalizzate,* o anche *componenti lagrangiane della sollecitazione.*

Senza timore di confusione, per semplificare la notazione indicheremo nel seguito con V, anzichè con $\widehat{V}$, l'energia potenziale espressa in funzione delle coordinate libere.

2.4 Le equazioni di Lagrange

2.4.1 Deduzione delle equazioni

Consideriamo un sistema olonomo a n gradi di libertà costituito da N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ di massa $m_1, \ldots, m_N$, soggetto ad assegnate forze attive $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_N$ ed eventualmente a vincoli ideali. Si ha allora il sistema delle equazioni di Newton

$$m_i \mathbf{a}_i \ = \ \mathbf{F}_i + \boldsymbol{\Phi}_i \ , \qquad i = 1, \ldots, N \ , \tag{2.4.1}$$

dove le $\boldsymbol{\Phi}_i$ sono le reazioni vincolari, incognite esse stesse come già si è discusso. Sfruttando l'ipotesi di idealità dei vincoli, si eliminano facilmente le reazioni vincolari così da ottenere esattamente n equazioni pure: infatti moltiplicando la (2.4.1) per $\frac{\partial P_i}{\partial q_h}$ e sommando su i si ha

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i - \boldsymbol{\Phi}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = 0 \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ ;$$

grazie all'idealità del vincolo, ovvero alla (2.2.11), le reazioni vincolari scompaiono. Usando la definizione (2.3.8) di Q_h si ottiene poi immediatamente

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = Q_h \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ .$$

Da questa relazione segue la fondamentale

Proposizione 20 *Sia dato un sistema olonomo di N punti materiali a n gradi di libertà, soggetto a un assegnato sistema di forze attive $\mathbf{F}_i$, $i = 1, \ldots, N$, ed eventualmente a vincoli ideali. Allora le coordinate libere $q_1, \ldots, q_n$ soddisfano le equazioni*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial K}{\partial q_h} = Q_h \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{2.4.2}$$

Le (2.4.2) sono dette equazioni di Lagrange "in forma generale".

Dimostrazione. La dimostrazione si riduce alla verifica della identità

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial K}{\partial q_h} \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ ; \tag{2.4.3}$$

$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, ricordiamo, è l'energia cinetica espressa in funzione delle coordinate libere e delle corrispondenti velocità generalizzate, secondo le (2.3.2)–(2.3.4). Anzi in virtù dell'additività dell'energia cinetica, cioè $K = \sum_{i=1}^{N} K_i$ ove $K_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è l'energia dell'i–esimo punto materiale (espressa in funzione delle coordinate libere), basta verificare l'identità (2.4.3) separatamente per ciascun punto P_i:

$$m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K_i}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial K_i}{\partial q_h} \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ .$$

A tal fine, essendo $\mathbf{a}_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t}$, si usa anzitutto l'identità

$$m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\Big) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \ ; \tag{2.4.4}$$

si osserva poi che valgono le relazioni, verificate più avanti,

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \ , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_h} \tag{2.4.5}$$

(per ricordare: la prima è *come se* si dividesse sopra e sotto per $\mathrm{d}t$; la seconda è uno scambio di derivata parziale e totale). La conclusione è immediata: sostituendo nella (2.4.4) segue infatti

$$\begin{aligned} m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} &= m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h}\Big) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_h} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\Big(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i\Big) - \frac{\partial}{\partial q_h}\Big(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i\Big) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K_i}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial K_i}{\partial q_h} \ . \end{aligned}$$

Restano da verificare le (2.4.5). La prima di esse segue immediatamente dalla (2.3.1) derivando rispetto a $\dot{q}_h$; la seconda deriva da un elementarissimo lemma, che qui enucleiamo in termini generali per usi futuri:

Lemma 21 *Per una generica funzione $f(\mathbf{q}, t)$ vale l'identità*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \tag{2.4.6}$$

(ovvero derivata totale e parziale si possono scambiare).

Il lemma è dimostrato sotto. Lo si applica qui prendendo per f, componente per componente, la velocità $\mathbf{v}_i$. Ciò conclude la dimostrazione della proposizione. □

Dimostrazione del lemma. Si usa la formula di derivazione di una funzione composta:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial q_h}\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial t}\Big) = \frac{\partial}{\partial q_h}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

(in sostanza, lo scambio lecito nell'ordine di derivazione parziale comporta la possibilità di scambiare tra loro anche derivata parziale e derivata totale). □

Nel caso particolarmente significativo di forze posizionali derivanti da energia potenziale, come corollario si deduce immediatamente la seguente

Proposizione 22 *Per un sistema olonomo a n gradi di libertà con energia cinetica $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, soggetto a forze conservative derivanti dall'energia potenziale $V = V(\mathbf{q}, t)$, le coordinate libere $q_1, \ldots, q_n$ soddisfano le equazioni*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \ , \qquad , h = 1, \ldots, n \tag{2.4.7}$$

dove $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è definita da

$$L = K - V \ .$$

Ci riferiremo a queste equazioni come a equazioni di Lagrange "in forma propria", o semplicemente equazioni di Lagrange.

Dimostrazione. In queste ipotesi si ha, come si è già visto, $Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h}$; risulta inoltre $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} = 0$ e dunque la conclusione è immediata. □

Si vede così che in questo caso le equazioni di Lagrange si esprimono in termini di una sola funzione L, che viene detta *funzione di Lagrange* del sistema, o *lagrangiana*. Useremo a volte per le equazioni di lagrange anche la scrittura compatta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \ .$$

E' interessante considerare anche il caso "misto" $Q_h = Q'_h + Q''_h$, ove le Q'_h sono conservative, precisamente $Q'_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h}$, mentre le Q''_h sono del tutto generiche. In tal caso è evidente che le equazioni di Lagrange prendono la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = Q''_h \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ , \tag{2.4.8}$$

con $L = K - V$.

Le quantità $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$ che entrano nelle equazioni di lagrange giocano un ruolo importante in tutta la meccanica lagrangiana. Una tipica notazione, che useremo in diverse occasioni, è

$$p_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ ; \tag{2.4.9}$$

p_h è detto *momento coniugato* a q_h. L'idea di momento coniugato generalizza in un certo senso la comune nozione di momento lineare e di momento angolare, cui si riduce nei casi più semplici.

2.4.2 Semplici esempi

Vediamo qui alcuni esempi elementari di sistemi lagrangiani.

Esempio Punto materiale in coordinate cartesiane x, y, z.
L'energia cinetica K è evidentemente $K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$; se $V(x, y, z)$ è l'energia potenziale, la lagrangiana è

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

e ne seguono le comuni equazioni di Newton; i momenti coniugati $p_x = m\dot{x}\,, \ldots,\ p_z = m\dot{z}$ sono con evidenza le tre componenti della quantità di moto.

Esempio Punto materiale in coordinate cilindriche r, φ, z.
Si ha $K = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$. Indicando ancora con V l'energia potenziale, espressa però in funzione delle variabili r, ϑ, z, si ha allora

$$L(r, \vartheta, z, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2) - V(r, \vartheta, z)$$

e le equazioni di Lagrange risultano essere

$$m\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0\ , \qquad mr^2\ddot{\vartheta} + 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0\ , \qquad m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0\ .$$

I momenti coniugati sono $p_r = m\dot{r}$ (componente radiale della quantità di moto), $p_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta}^2$ (componente z del momento angolare), $p_\vartheta = m\dot{z}$ (componente z della quantità di moto).

Esempio Punto materiale in coordinate sferiche ρ, ϑ, φ.
L'energia cinetica K è data dalla (2.3.6); se $V(\rho, \vartheta, \varphi)$ denota l'energia potenziale, la lagrangiana è $L = K - V$ e le equazioni di Lagrange sono

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\vartheta}^2 - m\rho\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0\ , \qquad m\rho^2\ddot{\vartheta}^2 + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\vartheta} - 2m\rho^2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0$$
$$m\rho^2\sin^2\vartheta\ddot{\varphi}^2 + 2m\rho\sin^2\vartheta\dot{\rho}\dot{\varphi} + 2m\rho^2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0\ .$$

Si vede subito che p_ρ è la componente radiale della quantità di moto, p_φ è la componente z del momento angolare, mentre p_ϑ dà il modulo della proiezione del momento angolare sul piano xy.

In questi esempi l'energia cinetica non contiene termini misti nelle velocità (la matrice cinetica è diagonale). Corrispondentemente, ciascuna equazione di Lagrange contiene una sola derivata seconda.

Esempio Punto materiale in un piano, descritto con coordinate cartesiane ξ, η non ortogonali.
Dall'espressione (2.3.7) di K, se $V(\xi, \eta)$ è l'energia potenziale, la lagrangiana è $L = K - V$ e le equazioni di Lagrange sono

$$m\ddot{\xi} + m\cos\alpha\ddot{\eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0\ , \qquad m\cos\alpha\ddot{\xi} + m\sin^2\alpha\ddot{\eta} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0\ .$$

Altri esempi di determinazione di lagrangiane ed equazioni di Lagrange si trovano nell'Eserciziario annesso a queste note.

2.4.3 Sistemi lagrangiani generali

Le equazioni di Lagrange (2.4.7) sono state qui dedotte a partire da un problema di meccanica: precisamente abbiamo considerato un sistema olonomo di N punti materiali, eventualmente soggetto a vincoli ideali, che si muove sotto l'effetto di un assegnato sistema di forze attive. In questo contesto a partire dalle equazioni di Newton abbiamo dedotto le equazioni di Lagrange. Equazioni di questa forma tuttavia sono interessanti anche al di fuori della meccanica: come vedremo più avanti nei paragrafi dedicati al calcolo delle variazioni, equazioni del tipo delle (2.4.7) intervengono naturalmente in problemi di geometria, o di ottica geometrica, o in generale in problemi di ottimizzazione quando la variabile su cui ottimizzare non è un numero ma una funzione. In generale però per problemi che esulano dalla meccanica dei sistemi di punti materiali, la funzione di Lagrange L non avrà la forma $L = K - V$, con K della forma (2.3.2), ma potrà essere una funzione qualsiasi delle n funzioni incognite, delle loro derivate prime e della variabile indipendente ($\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ e t, nel caso meccanico). I sistemi lagrangiani per cui si può scrivere $L = K - V$, con K della forma (2.3.2), sono chiamati *sistemi lagrangiani meccanici,* o anche *naturali,* mentre gli altri sono detti *sistemi lagrangiani generali.* Nei prossimi paragrafi ci occuperemo principalmente dei sistemi meccanici, ma di tanto in tanto introdurremo qualche commento sul caso generale, mettendo occasionalmente in evidenza qualche proprietà delle equazioni di Lagrange valida anche nel caso generale.

2.4.4 Forma normale delle equazioni di Lagrange

Per quanto visto sino ad ora le equazioni di Lagrange, nella loro forma (2.4.2) o (2.4.7), sono uguaglianze certamente soddisfatte nel corso del moto. Qui facciamo un passo in più, mostrando che nel caso meccanico le equazioni (2.4.2), e di conseguenza le (2.4.7), hanno la forma di equazioni differenziali del secondo ordine per le incognite $q_1(t), \ldots, q_n(t)$, che grazie alle proprietà della matrice cinetica si possono sempre mettere in forma normale. Ciò è fondamentale perché allora si applica il teorema di Cauchy sull'esistenza e unicità delle soluzioni: i dati iniziali determinano il movimento (e di conseguenza anche le reazioni vincolari), e dunque le equazioni di Lagrange (2.4.2) o (2.4.7) si possono ben dire le equazioni del moto del sistema. Precisamente:

Proposizione 23 *Nel caso meccanico le equazioni di Lagrange (2.4.2) sono equivalenti a un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine della forma*

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ , \tag{2.4.10}$$

con $\mathbf{f}$ *data da*

$$\mathbf{f} = a^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{g}) \ , \tag{2.4.11}$$

ove

$$g_h = \sum_{jk} \Big(\frac{\partial a_{hk}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_h} \Big) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_k \Big(\frac{\partial b_h}{\partial q_k} - \frac{\partial b_k}{\partial q_h} + \frac{\partial a_{hk}}{\partial t} \Big) \dot{q}_k + \frac{\partial b_h}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial q_h} \ ; \tag{2.4.12}$$

per ogni assegnato dato iniziale $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$ *restano univocamente determinati il movimento* $\mathbf{q}(t)$ *e il sistema di reazioni vincolari* $\Phi_1(t), \ldots, \Phi_N(t)$ *soddisfacenti la condizione di idealità (2.2.7).*

L'espressione precisa di g_h, qui aggiunta per completezza, non sarà per noi molto rilevante; l'unica sua caratteristica essenziale è di contenere $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ e t, ma non le derivate seconde $\ddot{\mathbf{q}}$ delle funzioni

incognite. Il sistema del secondo ordine (2.4.10) si può come sempre riscrivere equivalentemente come sistema di $2n$ del primo ordine, della forma

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \ , \qquad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) \ . \tag{2.4.13}$$

Dimostrazione. Dall'espressione (2.3.2) di K si vede subito che si ha

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}(\mathbf{q}, t)\dot{q}_k + b_h(\mathbf{q}, t) \ ;$$

è allora immediato verificare che risulta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial K}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}(\mathbf{q}, t)\ddot{q}_k + g_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

con $g_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ funzione opportuna delle variabili $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, t ma non di $\ddot{\mathbf{q}}$ (in altre parole: i termini contenenti derivate seconde delle q_h provengono solo dal termine K_2, e appaiono nella forma sopra indicata). Un calcolo elementare mostra che g_h ha proprio la forma (2.4.12). Pertanto le equazioni di Lagrange si presentano nella forma

$$a(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ ;$$

da questa espressione, grazie all'invertibilità della matrice cinetica, segue la (2.4.10) con $\mathbf{f}$ come nella (2.4.11). L'unicità del moto per fissati dati iniziali è consequenza del teorema di Cauchy di esistenza e unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali. Che le reazioni vincolari per ciascun moto restino a loro volta determinate è un'ovvia conseguenza dell'equazione di Newton per ciascun punto materiale, riscritta nella forma $\mathbf{\Phi}_i = m_i\mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i$. □

- Utilizzando i momenti coniugati p_h, le n equazioni di Lagrange si scrivono spontaneamente come sistema di $2n$ equazioni della forma

  $$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ , \qquad \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ , \qquad h = 1, \ldots, n$$

  (a sinistra è la definizione stessa di p_h, a destra è l'equazione di lagrange). *Le equazioni a sinistra però non sono in forma normale,* non essendo risolte rispetto alle $\dot{q}$. Viene spontaneo allora un modo alternativo a quello esposto sopra per ottenere $2n$ equazioni in forma normale: invertire le prime n equazioni esplicitando $\dot{\mathbf{q}}$ in funzione di $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ e t, e sostituire poi $\dot{\mathbf{q}}$ nel secondo gruppo di equazioni. Si ottiene in questo modo un sistema di $2n$ equazioni in cui le variabili fondamentali non sono più posizioni e velocità, ma posizioni e momenti. Nasce di qui una formulazione della meccanica, alternativa alla meccanica lagrangiana, interessantissima e particolarmente ricca di frutti, detta *meccanica hamiltoniana.* Di essa in queste note non ci occuperemo.

Esercizio 32 *Si portino in forma normale le equazioni di Lagrange relative agli esempi riportati nel paragrafo 2.4.2, facendo attenzione in particolare all'ultimo di essi.*

Si osservi che grazie alla (2.2.4) a ogni dato iniziale $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$ corrisponde biunivocamente un dato iniziale $(\mathbf{w}_0, \dot{\mathbf{w}}_0)$ — o eqivalentemente $(P_{0,1}, \ldots, P_{0,N}, \mathbf{v}_{0,1}, \ldots, \mathbf{v}_{0,N})$ — *compatibile con i vincoli,* ovvero con $\mathbf{w}_0$ sulla varietà vincolare e $\dot{\mathbf{w}}_0$ tangente ad essa. Tenendo presente questo fatto si può anche riformulare la proposizione 23 nel modo seguente:

Proposizione 24 *Sia dato un sistema olonomo di N punti materiali a n gradi di libertà, soggetto a un assegnato sistema di forze attive $\mathbf{F}_i$, $i = 1, \ldots, N$, e siano assegnate condizioni iniziali di posizione e velocità compatibili con i vincoli. Allora esiste un'unica scelta delle reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_i$ soddisfacenti la condizione di idealità (2.2.7), tale che il moto dei punti, soggetti alle equazioni di Newton $m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i$, sia compatibile con i vincoli. Tale moto soddisfa le equazioni di Lagrange (2.4.2) ed è da esse individuato.*

Si verifica immediatamente che per i sistemi lagrangiani generali, indipendentemente dalla forma di L, le equazioni (2.4.7) costituiscono comunque un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine per $q_1(t), \ldots, q_n(t)$, lineare in $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$: precisamente un sistema della forma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\, \ddot{q}_k + g_h = 0 \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ ,$$

con un'opportuna $g_h = g_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. La condizione perché tale sistema si possa mettere in forma normale è che il determinante hessiano di L rispetto alle $\dot{q}_h$ non sia nullo,

$$\det\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\Big) \neq 0 \ ;$$

per i sistemi naturali la matrice $\big(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\big)$ altro non è che la matrice cinetica $a = (a_{hk})$.

2.4.5 Equazioni di Lagrange e corpi rigidi

Come si è visto nel paragrafo 2.2.3-B, il vincolo di rigidità per un sistema di N punti materiali, nelle usuali ipotesi fisiche in cui valgono le equazioni cardinali, è un vincolo ideale. Per tali sistemi valgono dunque le equazioni di Lagrange, e questo è un fatto con evidenza significativo. In effetti, non è difficle vedere (appendice B) che *per i sistemi rigidi, equazioni cardinali ed equazioni di Lagrange sono equivalenti.*

Un'ovvia generalizzazione è quella al caso di corpi rigidi ulteriormente vincolati (corpi rigidi con un punto fisso, o con un asse fisso), naturalmente nelle ipotesi che il vincolo aggiuntivo non violi la condizione di idealità. Altrettanto ovvia è l'estensione a sistemi contenenti più corpi rigidi, eventualmente tra loro vincolati (ad esempio con cerniere), sempre nell'ipotesi che gli ulteriori vincoli mantengano l'idealità, e sempre limitatamente a corpi rigidi costituiti da un numero finito di punti materiali. Assai più serio è invece il problema dell'estensione delle equazioni di Lagrange ai corpi rigidi composti da infiniti elementi, in particolare ai corpi rigidi continui. La questione in sé è delicata, perché (già nell'ambito della meccanica newtoniana) non è così facile stabilire che cosa si intenda per dinamica di un sistema di infiniti punti soggetti a infiniti vincoli.[12] Non ci addentreremo in questo non facile problema, e ci limiteremo a poche oservazioni.

- Innanzitutto, la descrizione cinematica dei corpi rigidi come sistemi olonomi a sei gradi di libertà prescinde dal numero dei punti del sistema (la posizione di ciascuno dei punti, anche se infiniti, è comunque determinata in funzione di sei coordinate libere).

- Le quantità dinamiche che entrano nella lagrangiana, ovvero K e V, sono ben definite, in analogia ai sistemi finiti, semplicemente sostituendo integrali alle sommatorie (similmente,

[12] Si tratta con evidenza di un problema generale, relativo a tutta la dinamica dei corpi continui e alla sua eventuale "deduzione" dalla dinamica dei sistemi a un numero finito di punti.

in ambito newtoniano, sono ben definite le quantità $\mathbf{Q}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{R}^{\text{ext}}$ e $\mathbf{N}^{\text{ext}}$ che entrano nelle equazioni cardinali). Questo vuol dire che le equazioni di Lagrange, di per sé come equazioni differenziali in sei variabili, a prescindere dal fatto che siano le equazioni del moto appropriate, sono ben definite, e anzi coincidono con quelle dei corpi finiti che abbiano la stessa K e la stessa V come funzioni delle coordinate libere (analoghe considerazioni valgono per le equazioni cardinali).

– *Di più non è facile aggiungere.* Non è difficile pensare ciascun corpo rigido come limite di una successione di sistemi finiti, ciascuno con le medesime K e V e dunque le medesime equazioni di Lagrange, indipendentemente dal numero di punti (le medesime $\mathbf{Q}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{R}^{\text{ext}}$, $\mathbf{N}^{\text{ext}}$, e dunque le medesime equazioni cardinali, in ambito newtoniano). Ciò rende *molto ragionevole* fare l'*ipotesi* che la dinamica dei corpi rigidi continui sia descritta dalle equazioni di Lagrange (dalle equazioni cardinali). *Ma si tratta comunque di un'ipotesi:* logicamente non c'è modo di dedurre (nel senso matematico del termine) il comportamento di un sistema infinito, in particolare continuo, a partire dai sistemi finiti.

Nel seguito assumeremo che le equazioni di Lagrange siano valide per corpi rigidi composti da infiniti punti materiali, in particolare corpi rigidi continui.

E' un facile e utile esercizio verificare in casi particolari che le equazioni di Lagrange sono equivalenti alle equazioni cardinali.

Esempio Si consideri un corpo rigido libero di ruotare attorno a un asse fisso. Si ha allora, con ovvio significato dei simboli, $K = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$, mentre l'energia potenziale è una funzione $V(\varphi)$ caratterizzata da $N = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}$, dove N è la proiezione, sull'asse di rotazione, del momento risultante rispetto a un punto dell'asse (che non dipende dalla scelta del punto). Dalla lagrangiana $L = K - V$ si ottiene allora l'equazione di Lagrange

$$I\ddot{\varphi} - N = 0 \ ,$$

che coincide con l'equazione cardinale per il momento angolare, proiettata sull'asse di rotazione.

Esempio Si consideri il moto di puro rotolamento di un disco omogeneo su di una guida rettilinea. In assenza di vincolo avremmo (con ovvio significato dei simboli) un'energia cinetica $K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$ e una qualche energia potenziale $V(x, \varphi)$; se denotiamo con F la proiezione della risultante delle forze esterne sull'asse x, e con N la proiezione, nella direzione normale al piano del disco, del momento risultante, relativo al centro del disco, allora si ha $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $N = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$. Introducendo il vincolo di puro rotolamento $x = x_0 - R\varphi$ si ottiene allora $L = \frac{1}{2}(mR^2 + I)\dot{\varphi}^2 - V(x_0 - R\varphi, \varphi)$. Nella corrispondente equazione di Lagrange

$$(mR^2 + I)\ddot{\varphi} + RF - N = 0 \ ,$$

si riconosce immediatamente l'equazione cardinale per il momento angolare, relativo a un punto qualunque Q della guida, proiettata sulla direzione normale al piano del disco.

2.4.6 Proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange

A. Invarianza in forma delle equazioni. Il modo stesso in cui si sono dedotte le equazioni di Lagrange per un sistema di punti materiali, con scelta arbitraria delle coordinate libere $(q_1, \ldots, q_n)$, porta a concludere che le equazioni del moto hanno sempre e comunque la forma (2.4.7), o più in

generale (2.4.2), in qualunque sistema di coordinate, ovvero che le equazioni di Lagrange sono *invarianti in forma* per cambiamenti di coordinate. Tale proprietà tuttavia prescinde dal carattere meccanico del sistema, cioè vale per sistemi lagrangiani generali e deriva dalla forma stessa delle equazioni di Lagrange che di per sé risulta essere invariante per cambiamenti di coordinate.

Precisamente, consideriamo una qualsiasi trasformazione di coordinate (eventualmente dipendente dal tempo) dalle coordinate $(q_1, \ldots, q_n)$ a nuove coordinate $(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n)$, cioè una mappa regolare

$$q_h = q_h(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n, t) \ , \qquad h = 1, \ldots, n \tag{2.4.14}$$

tale che la sua matrice jacobiana J abbia determinante diverso da zero:

$$\det J \neq 0 \ , \qquad \text{ove} \quad J_{hk} = \Big(\frac{\partial q_h}{\partial \tilde{q}_k}\Big) \ ; \tag{2.4.15}$$

tale condizione assicura che la trasformazione è invertibile almeno localmente, con inversa anch'essa regolare (è un *diffeomorfismo locale*).[13] Dalla (2.4.14) si ottiene per derivazione l'estensione della trasformazione alle velocità:

$$\dot{q}_h(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_h}{\partial \tilde{q}_k} \dot{\tilde{q}}_k + \frac{\partial q_h}{\partial t} \ . \tag{2.4.16}$$

Per sostituzione di variabili si definisce la nuova lagrangiana

$$\tilde{L}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) = L(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, t), \dot{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t), t) \ , \tag{2.4.17}$$

e si dimostra, del tutto in generale, che il moto nelle nuove variabili soddisfa le equazioni di Lagrange associate a $\tilde{L}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_h} \ = \ 0 \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{2.4.18}$$

Precisamente,

Proposizione 25 *Sia dato un sistema lagrangiano di lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$; si consideri un cambiamento di variabili (2.4.14) soddisfacente la (2.4.15), e sia (2.4.16) la sua estensione alle velocità. Sia infine $\tilde{L}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t)$ la lagrangiana ottenuta da L per sostituzione di variabili, secondo la (2.4.17). Allora il movimento $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ è soluzione delle equazioni di Lagrange associate a $\tilde{L}$, se e solo se il corrispondente movimento $\mathbf{q}(t)$, immagine di $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ attraverso le (2.4.14), è soluzione delle equazioni di Lagrange corrispondenti a L.*

Dimostrazione. Dall'espressione di $\tilde{L}$, eseguendo le derivate e utilizzando le facili relazioni

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h} \ , \qquad \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \tilde{q}_h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h}$$

(la prima segue immediatamente dalla (2.4.16), la seconda si ottiene scambiando derivata parziale e totale secondo il lemma 21), si ottiene

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h} \ , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{k=1}^{n} \Big[\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Big) \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h} \Big) \Big] \ ,$$

[13] La (2.4.15) garantisce anche che la matrice $\frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}$, ove si è posto $\tilde{\mathbf{w}}(\tilde{q}, t) = \mathbf{w}(\tilde{\mathbf{q}}, t)$, ha rango n, e dunque che $(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n)$ sono buone coordinate libere. Qui stiamo mettendo in evidenza l'espressione delle vecchie coordinate in funzione delle nuove, che concretamente si impiega al momento di effettuare una sostituzione di variabili dentro a una funzione. Del tutto equivalente, data la richiesta di invertibilità della trasformazione, sarebbe scrivere le nuove coordinate in funzione delle vecchie, $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_h} = \sum_{k=1}^{n} \Big[\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial q_k}{\partial \tilde{q}_h} \Big] .$$

Di conseguenza si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_h} = \sum_{k=1}^{n} J_{kh} \Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \Big] ,$$

e per la (2.4.15) si conclude che le equazioni di Lagrange relative a $\tilde{L}$ sono soddisfatte se e solo se sono soddisfatte le equazioni di Lagrange relative a L. □

Quando avremo introdotto i principi variazionali vedremo una dimostrazione più semplice e più naturale di questa proposizione, che anzi in quel contesto apparirà del tutto ovvia.

- Dall'invarianza in forma delle equazioni di Lagrange per cambiamenti di coordinate arbitrari, segue che se il moto di un sistema segue le equazioni di Lagrange in un sistema di coordinate, allora esso segue le equazioni di Lagrange in qualunque altro sistema di coordinate. Ora, è banale verificare direttamente che le equazioni di Newton per un sistema di n punti materiali (non vincolati), scritte nelle usuali coordinate cartesiane, hanno proprio la forma di equazioni di Lagrange, relative a $L = K - V$ come usualmente definite; di conseguenza esse mantengono la forma di equazioni di Lagrange, relative alla lagrangiana $\tilde{L}$ trasformata di L, in ogni altro sistema di coordinate. E' questa una deduzione delle equazioni di Lagrange particolarmente semplice e diretta, per sistemi di punti materiali non vincolati descritti in coordinate arbitrarie.

B. Invarianza di "gauge".[14] Con evidenza, funzioni di Lagrange diverse possono tuttavia condurre alle medesime equazioni di Lagrange: ad esempio se si aggiunge a L una costante, o se si moltiplica L per una costante, è evidente che le equazioni non cambiano. Al di là di questi casi banali, non è difficile verificare che le equazioni del moto non cambiano se due lagrangiane L e L' differiscono per una funzione $L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ che sia la derivata totale rispetto al tempo di una qualunque funzione $F(\mathbf{q}, t)$:

$$L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_k}(\mathbf{q}, t)\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{q}, t) . \tag{2.4.19}$$

Ancora una volta questa proprietà segue dalla sola forma delle equazioni di Lagrange, e dunque vale per sistemi lagrangiani generali anche al di fuori del caso meccanico:

Proposizione 26 *Per ogni scelta della funzione $F(\mathbf{q}, t)$ e della costante reale $c \neq 0$, la lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ e la lagrangiana*

$$L'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = c\, L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) , \qquad \textit{con} \qquad L_0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} ,$$

conducono alle medesime equazioni di Lagrange.

Dimostrazione. Basta mostrare che il termine $L_0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ non contribuisce alle equazioni del moto, ovvero che si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L_0}{\partial q_h} = 0 .$$

[14] *Gauge* è un termine inglese difficilmente traducibile in italiano, che è abitudine lasciare nella lingua originale (come *spin*). La parola italiana più prossima è "calibro", o "calibratura" (di uno strumento di misura).

La verifica è immediata: dall'espressione (2.4.19), usando anche il lemma 21, si ha infatti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L_0}{\partial q_h} \ .$$

□

Questa proprietà di invarianza delle equazioni per aggiunta di un termine della forma $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ alla lagrangiana è detta *invarianza di gauge.* (Il nome è preso dall'elettrodinamica, ove lo si impiega per caratterizzare il fatto assai simile che aggiungendo al potenziale vettore $\mathbf{A}$ il gradiente ∇F di una funzione scalare qualsiasi, il campo magnetico $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ non cambia.) Anche questa proprietà si comprenderà meglio e apparirà naturale nel contesto dei principi variazionali.

2.5 Potenziali dipendenti dalla velocità

Vi sono nel mondo fisico due comuni esempi di forze dipendenti dalla velocità che non hanno natura dissipativa (conservano l'energia), in effetti molto simili tra loro, precisamente la forza (apparente) di Coriolis

$$\mathbf{F} = -2m\,\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} \tag{2.5.1}$$

che si introduce (assieme alle forze centrifuga e di trascinamento) per descrivere un punto materiale in un sistema rotante con velocità angolare istantanea $\boldsymbol{\omega}$, per poter procedere come se fosse inerziale, e la forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \dot{\mathbf{q}}) \tag{2.5.2}$$

che determina il moto di una carica elettrica e in un assegnato campo elettromagnetico. Si pone il problema di trattare in modo appropriato forze come queste nel formalismo lagrangiano. Una via percorribile è certamente quella di scrivere le equazioni di Lagrange nella forma generale (2.4.2), o nella forma mista (2.4.8), trattando queste forze dipendenti dalla velocità al pari di generiche forze dissipative. Ma si può far di meglio, e cioè scrivere le equazioni di Lagrange nella forma propria (2.4.7), assai preferibile, pur di accettare la presenza nella lagrangiana di (semplici) termini potenziali non posizionali, cioè dipendenti anche dalle velocità, di fatto lineari nelle velocità.

L'idea è semplice: dalla forma generale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial K}{\partial q_h} = Q_h$$

delle equazioni di Lagrange si è passati alla forma propria

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \ ,$$

con $L = K - V$, assumendo che Q_h fosse posizionale e deducibile da una funzione $V(\mathbf{q})$ tramite la relazione $Q_h = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}$. E' chiaro però che la forma propria delle equazioni si ottiene anche nel caso più generale in cui Q_h dipenda anche dalle velocità, purchè esista una funzione $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ tale che

$$Q_h = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} \ . \tag{2.5.3}$$

Non è difficile vedere che la forza di Coriolis e la forza di Lorentz ricadono in questo caso.

2.5.1 La forza di Coriolis

Supponiamo qui per semplicità che la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ sia costante; in tal caso, ricordiamo, le forze apparenti (dette anche fittizie, o inerziali) che si devono introdurre per ciascun punto materiale P del sistema, accanto alle forze "vere", per lavorare nel sistema rotante come se fosse inerziale, si riducono alla forza centrifuga $\mathbf{F}_c = \omega^2 r \mathbf{e}_r$, ove r denota la distanza dall'asse di rotazione e $\mathbf{e}_r$ denota il versore della retta per P perpendicolare all'asse di rotazione, rivolto verso l'esterno, e alla forza di Coriolis (2.5.1). La forza centrifuga è una forza posizionale conservativa, descritta dal potenziale $V_c = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2$, che si aggiunge al potenziale delle altre forze posizionali (conservative) eventualmente presenti. Per quanto riguarda la forza di Coriolis, si ha invece la seguente

Proposizione 27 *Nel caso di velocità angolare costante, la forza di Coriolis (2.5.1) si deduce, attraverso la (2.5.3), da un potenziale $V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, lineare in $\dot{\mathbf{q}}$, dato da*

$$V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m\, \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} \ . \tag{2.5.4}$$

Dimostrazione. Dall'espressione di V_1 si ottiene immediatamente

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_h} = m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}})_h \ ,$$

e inoltre (osservando che per le note proprietà del prodotto misto si può scrivere $V_1 = m\, \mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{q}}$)

$$\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = m(\mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega})_h \ , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = m(\dot{\mathbf{q}} \times \boldsymbol{\omega})_h \ ;$$

la conclusione è immediata. □

La lagrangiana del sistema è dunque

$$L = K - V_0 - V_1 \ , \tag{2.5.5}$$

ove $K = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$ è l'energia cinetica come essa appare nel sistema rotante, e V_0 (lo zero a piede ricorda che è di grado zero nelle velocità) assomma il potenziale della forza centrifuga e quello eventuale delle altre forze attive.

Esercizio 33 *Si verifichi che la lagrangiana (2.5.5), con V_1 della forma (2.5.4), è la lagrangiana del punto materiale in un sistema di riferimento rotante, anche nel caso di ω non costante (precisamente, in questo caso il termine V_1 produce anche il termine aggiuntivo $m\, \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{q}$ che compare nella parte di trascinamento della forza fittizia).*

Mettersi in un sistema non inerziale, trattandolo come inerziale tramite l'espediente di introdurre le forze apparenti, è spontaneo nell'ambito della meccanica Newtoniana e, come abbiamo appena visto, si può fare anche in ambito lagrangiano. La via più naturale, in ambito lagrangiano, è però un'altra: senza bisogno di conoscere e impiegare la teoria dei moti relativi, si passa facilmente da un sistema di riferimento inerziale a uno rotante (o in moto accelerato qualsiasi) scrivendo una trasformazione di coordinate dipendente dal tempo. Supponiamo per fissare le idee di avere un sistema rotante uniformemente con velocità angolare ω attorno all'asse z; se x, y, z e q_1, q_2,

q_3 denotano rispettivamente le coordinate cartesiane di P nel sistema di riferimento inerziale e in quello rotante, allora il cambio di coordinate è dato da

$$x = q_1 \cos\omega t - q_2 \sin\omega t \ , \qquad y = q_1 \sin\omega t + q_2 \cos\omega t \ , \qquad z = q_3 \ , \tag{2.5.6}$$

mentre corrispondentemente per le velocità si ha

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{q}_1 \cos\omega t - \dot{q}_2 \sin\omega t - \omega(q_1 \sin\omega t + q_2 \cos\omega t) \\ \dot{y} &= \dot{q}_1 \sin\omega t + \dot{q}_2 \cos\omega t + \omega(q_1 \cos\omega t - q_2 \sin\omega t) \\ \dot{z} &= \dot{q}_3 \ . \end{aligned}$$

Nel sistema inerziale si ha energia cinetica $\tilde{K} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$; sviluppando i quadrati e sostituendo si trova $\tilde{K} = K_2 + K_1 + K_0$, con

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \\ K_1 &= m\omega(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1) = m\,\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{q}\times\dot{\mathbf{q}} = -m\,\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{q} \\ K_0 &= \frac{1}{2} m\omega^2(q_1^2 + q_2^2) \ . \end{aligned}$$

Si vede bene che il termine K_2 è l'energia cinetica K nel sistema rotante, mentre il termine cinetico K_1 è (giustamente) l'opposto del termine potenziale V_1 che genera la forza di Coriolis, e infine $K_0 = -V_c$ corrisponde alla forza centrifuga. La lagrangiana è così la stessa nei due sistemi. E' interessante osservare che gli stessi termini della lagrangiana appaiono in un caso come cinetici, nell'altro come potenziali. Altre volte si ottengono, procedendo nel modo più spontaneo, lagrangiane non identiche, ma differenti per un termine del tipo $L_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F$ (con $F(\mathbf{q},t)$ opportuna), e dunque, come si è visto, equivalenti.

Esercizio 34 *Si studi il moto di un pendolo semplice il cui piano di oscillazione ruota uniformemente attorno alla verticale (pendolo centrifugo); si proceda nel sistema di riferimento inerziale e in quello rotante, confrontando i risultati. In modo analogo si studi il moto di un pendolo il cui punto di sospensione C si muove lungo l'asse y verticale con legge assegnata $y_C = f(t)$.* [Lo svolgimento dettagliato è riportato nell'Eserciziario.]

2.5.2 La forza di Lorentz

Veniamo ora alla forza di Lorentz (2.5.2). Nel caso di campo magnetico costante e uniforme, non c'è bisogno di far nulla: la parte magnetica della forza di Lorentz è *identica* alla forza di Coriolis, non appena si identifichi $e\mathbf{B}$ con $2m\boldsymbol{\omega}$, perciò deriverà da $V_1 = \frac{1}{2}e\,\mathbf{B}\times\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{q}$, mentre la parte elettrica deriverà da un opportuno potenziale Φ tramite $\mathbf{E} = -e\nabla\Phi$.

Ma si può trattare senza difficoltà il caso di un *qualsiasi* campo elettromagnetico (assegnato) $\mathbf{E}(\mathbf{q},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{q},t)$, pur di introdurre, accanto al "potenziale scalare" Φ, il "potenziale vettore" $\mathbf{A}$; l'elettrodinamica, ricordiamo, insegna che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ derivano dai potenziali Φ e $\mathbf{A}$ tramite

$$\mathbf{E} = -\Big(\nabla\Phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\Big) \ , \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \ . \tag{2.5.7}$$

Vale infatti la seguente

Proposizione 28 *La forza di Lorentz (2.5.2) si deduce attraverso la (2.5.3) dal potenziale*

$$V(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = e\,\Phi - e\,\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{A} \ . \tag{2.5.8}$$

Il vettore $\mathbf{j} = e\dot{\mathbf{q}}$ si interpreta come *corrente* associata al moto della carica e con velocità $\dot{\mathbf{q}}$; come la carica si accoppia al potenziale scalare Φ, così la corrente si accoppia al potenziale vettore $\mathbf{A}$ (e verrebbe spontanea la riscrittura della (2.5.8) in forma di prodotto scalare tra vettori a quattro componenti, come nella teoria della relatività).

Dimostrazione. Usando i potenziali, la forza di Lorentz prende la forma

$$\mathbf{F} = -e\Big(\nabla\Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\Big) + e\,\dot{\mathbf{q}} \times \nabla\mathbf{A} \ ;$$

basta allora dimostrare che il membro di destra di questa espressione coincide con $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}$, ove V è dato dalla (2.5.3). La verifica è semplice: derivando si trova

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} = -eA_h \ , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} = -e\Big(\frac{\partial A_h}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \dot{q}_k \frac{\partial A_h}{\partial q_k}\Big) \ , \qquad \frac{\partial V}{\partial q_h} = e\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial q_h} - \sum_{k=1}^{3} \dot{q}_k \frac{\partial A_k}{\partial q_h}\Big) \ ,$$

e dunque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = -e\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial q_h} + \frac{\partial A_h}{\partial t}\Big) + e\sum_{k=1}^{3} \dot{q}_k \Big(\frac{\partial A_k}{\partial q_h} - \frac{\partial A_h}{\partial q_k}\Big) \ .$$

Si vede ora facilmente, per l'ultimo termine, che vale[15]

$$\sum_{k=1}^{3} \dot{q}_k \Big(\frac{\partial A_k}{\partial q_h} - \frac{\partial A_h}{\partial q_k}\Big) = (\dot{\mathbf{q}} \times \nabla \times \mathbf{A})_h \ ,$$

e ciò conclude la dimostrazione. □

Pertanto la lagrangiana di una particella di massa m e carica e in un campo elettromagnetico assegnato è

$$L = K - V = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2 + e\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A} - e\Phi \ .$$

2.6 Leggi di conservazione in meccanica lagrangiana

2.6.1 La conservazione dell'energia

Consideriamo un qualsiasi sistema lagrangiano a n gradi di libertà di lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, e introduciamo la funzione

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ . \tag{2.6.1}$$

Sulla base delle sole equazioni di Lagrange, senza restrizioni sulla forma di L (cioè anche per sistemi lagrangiani generali), si calcola subito la derivata totale di $E(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$ rispetto al tempo:

$$\dot{E} \ = \ \sum_{h=1}^{n} \Big(\ddot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} + \dot{q}_h \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\Big) - \sum_{h=1}^{n} \Big(\dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial q_h} + \ddot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\Big) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

[15] L'espressione si ricorda facilmente nella forma $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$, alquanto simile alla comune formula per il doppio prodotto vettore $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \Big) - \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial L}{\partial t} \ .
\end{aligned}
$$

Perciò, nel caso particolare in cui L non dipenda esplicitamente da t, si vede che E è una costante del moto.

Se poi la lagrangiana ha la forma $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \mathbf{q}) - V(\mathbf{q})$, con $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk}(\mathbf{q}) \dot{q}_h \dot{q}_k$ — è il caso dei sistemi naturali, con vincoli fissi e forze conservative indipendenti dalle velocità — allora la funzione E si interpreta facilmente: si trova facilmente infatti

$$
E = 2K - (K - V) = K + V \ , \tag{2.6.2}
$$

e dunque si vede che E ha il significato di energia totale del sistema, scritta in funzione delle coordinate lagrangiane $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$.

La verifica diretta della (2.6.2) è semplice, ma la cosa migliore è utilizzare il lemma di Eulero sulle funzioni omogenee.

Definizione 13 *la funzione $f(x_1, \ldots, x_n)$ si dice* omogenea di grado α *se per ogni $\lambda > 0$ e ogni scelta di $x_1, \ldots, x_n$ risulta*

$$
f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, \ldots, x_n) \ . \tag{2.6.3}
$$

Ogni polinomio omogeneo è evidentemente una funzione omogenea di grado α pari al grado del polinomio; $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2^2/x_1}$ è omogenea di grado $\alpha = 1/2$.

Lemma 29 *Se f è omogenea di grado α, allora risulta*

$$
\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f \ .
$$

Dimostrazione. Basta derivare la (2.6.3) rispetto a λ e porre $\lambda = 1$. □

Per dedurre la (2.6.3) si applica il lemma a $K = K_2$.

Consideriamo ora il caso in cui V dipende anche dalle velocità, più precisamente il caso $V = V_0(\mathbf{q}) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, con V_1 lineare in $\dot{\mathbf{q}}$ (forza di Lorentz, forza di Coriolis); con evidenza si trova

$$
E = 2K - V_1 - (K - V_0 - V_1) = K + V_0 \ .
$$

La quantità E ha ancora il significato di energia, tuttavia ad essa non contribuisce il termine V_1 lineare in $\dot{\mathbf{q}}$; ciò è coerente con il fatto ben noto che le forze associate a V_1 sono ortogonali alla velocità, e dunque non compiono lavoro. Esse prendono il nome di *forze giroscopiche*.

Il formalismo lagrangiano è poi interessante anche nel caso in cui vi siano, in aggiunta ad eventuali forze conservative e giroscopiche, il cui potenziale indichiamo con $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, altre forze del tutto generiche, descritte mediante le componenti lagrangiane della sollecitazione $Q_1, \ldots, Q_n$. In questo caso abbiamo già visto che le equazioni di Lagrange si possono scrivere nella forma mista

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ ,
$$

con $L = K - V$. Procedendo come sopra si ottiene (per L indipendente dal tempo), al posto della legge di conservazione $\dot{E} = 0$, la relazione più generale

$$\dot{E} = \sum_{h=1}^{n} Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\, \dot{q}_h \ ;$$

il membro di destra rappresenta la potenza delle forze aggiuntive considerate, scritta mediante le coordinate libere. Se essa è sempre negativa o al più nulla (è il caso degli attriti), le forze si dicono *dissipative.*

Naturalmente, possiamo sempre pensare che siano incluse nelle Q_h tutte le forze attive, ovvero fare riferimento alle equazioni di Lagrange nella forma generale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial K}{\partial q_h} = Q_h \ ;$$

in tal caso, applicando il risultato precedente con $V = 0$ e $E = K$, otteneniamo

$$\dot{K} = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ ;$$

si ritrova così il ben noto teorema dell'energia cinetica (o teorema lavoro–energia), secondo il quale la derivata temporale dell'energia cinetica è uguale alla potenza di tutte le forze attive.

2.6.2 Coordinate ignorabili e riduzione

Consideriamo un sistema lagrangiano a n gradi di libertà, e supponiamo che L non dipenda in realtà da alcune coordinate,[16] ad esempio da $q_{m+1}, \ldots, q_n$, per un fissato $m < n$. Se denotiamo $\mathbf{q}' = (q_1, \ldots, q_m)$, $\mathbf{q}'' = (q_{m+1}, \ldots, q_n)$, allora la lagrangiana non dipende da $\mathbf{q}''$ e si può scrivere

$$L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', \dot{\mathbf{q}}'', t)$$

Questa situazione si verifica, tipicamente, per problemi dotati di una qualche simmetria, a seguito di una buona scelta delle coordinate libere: ad esempio, per un qualunque problema di moto centrale come il problema di Keplero, se ci si riduce al piano dell'orbita e si usano le coordinate polari r, ϑ, la lagrangiana $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) - V(r)$ non dipende dalla coordinata ϑ.

Se la lagrangiana non dipende da una certa q_l, ovvero $\frac{\partial L}{\partial q_l} = 0$, allora il momento coniugato $p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$, si veda la (2.4.9), in base alle equazioni di Lagrange si conserva; nell'esempio si conserva $p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta}$, che è il momento angolare. Se, come abbiamo supposto sopra, la lagrangiana non dipende da $q_{m+1}, \ldots, q_n$, allora vi sono $n - m$ costanti del moto

$$p_l(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', \dot{\mathbf{q}}'', t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', \dot{\mathbf{q}}'', t) \ , \qquad l = m+1, \ldots, n \ . \tag{2.6.4}$$

Vogliamo sfruttare l'esistenza di queste costanti del moto per ridurre il numero di gradi di libertà effettivi del sistema da n a m, scrivendo una lagrangiana L' che dipenda solo da $\mathbf{q}'$, $\dot{\mathbf{q}}'$, e sia però equivalente alla L per quanto riguarda le prime m coordinate.

[16] Almeno per i sistemi naturali la lagrangiana dipende invece, necessariamente, da tutte le velocità, altrimenti la matrice cinetica non sarebbe definita positiva.

Supponiamo di qui in poi che il sistema sia naturale, ovvero che sia $L = K - V$ con $K = K_2 + K_1 + K_0$ come al solito. Il tal caso denotando $\mathbf{p}'' = (p_{m+1}, \ldots, p_n)$ si vede facilmente che la (2.6.4) è una relazione lineare del tipo

$$\mathbf{p}'' = a''(\mathbf{q}', t)\dot{\mathbf{q}}'' + \mathbf{f}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) \ , \tag{2.6.5}$$

ove a'' è il minore diagonale della matrice cinetica formato dalle ultime $n - m$ righe e colonne e $\mathbf{f}$ è una qualche funzione (non contenente $\dot{\mathbf{q}}''$). *Grazie al fatto che la matrice cinetica è definita positiva,* si ha in particolare $\det a'' \neq 0$ e dunque la (2.6.5) si inverte e si ottiene

$$\dot{\mathbf{q}}'' = a''(\mathbf{q}', t)^{-1}[\mathbf{p}'' - f(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t)] \ .$$

Questa espressione di $\dot{\mathbf{q}}''$ come funzione di $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}'$, t e $\mathbf{p}''$, che denotiamo per comodità

$$\dot{\mathbf{q}}'' = \mathbf{u}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \mathbf{p}'') \ , \tag{2.6.6}$$

può essere adoperata per sostituire $\dot{\mathbf{q}}''$ in L e così toglierla dal gioco. La lagrangiana sostituita $L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', \mathbf{u}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \mathbf{p}''), t)$ tuttavia non è ancora quella buona e occorre una correzione, precisamente bisogna porre

$$L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \mathbf{p}'') = L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', \mathbf{u}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \mathbf{p}''), t) - \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \mathbf{p}'') \ .$$

Che questa sia la lagrangiana buona è garantito da un'importante proposizione, nota come teorema di Routh:

Proposizione 30 *Per ogni soluzione* $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}'(t), \mathbf{q}''(t))$ *delle equazioni di Lagrange relative a* L, $\mathbf{q}'(t)$ *risolve le equazioni di Lagrange relative a* L', *mentre* $\mathbf{q}''(t)$ *è data da*

$$\mathbf{q}''(t) = \mathbf{q}''(0) + \int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{q}'(t), \dot{\mathbf{q}}'(t), t, \mathbf{p}'')\, \mathrm{d}t \ . \tag{2.6.7}$$

Dimostrazione. Per $h \leq m$ risulta

$$\frac{\partial L'}{\partial q_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} + \sum_{l=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\frac{\partial u_l}{\partial q_h} - \sum_{l=m+1}^{n} p_l \frac{\partial u_l}{\partial q_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} \ ,$$

e allo stesso modo $\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$; di conseguenza le equazioni di lagrange relative a L' coincidono con le prime m equazioni di Lagrange relative a L. La (2.6.7) è del tutto ovvia. □

Il sistema a soli m gradi di libertà descritto da L' è detto *sistema ridotto;* L' è detta *lagrangiana ridotta* e il procedimento seguito è chiamato *riduzione*. Le coordinate $q_{m+1}, \ldots, q_n$ prendono il nome di *coordinate ignorabili.* La proposizione mostra che la risoluzione del problema ridotto è equivalente alla risoluzione del problema completo. Si osservi che L' è, propriamente, una famiglia di lagrangiane contenente gli $n - m$ parametri $p_{m+1}, \ldots, p_n$, i quali restano fissati dal dato iniziale.

Esempio Nel caso sopra considerato del moto centrale ($n = 2$, $m = 1$) si ha, come si è già visto, $p_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta}$ (la relazione qui è lineare omogenea, e corrispondentemente p_ϑ non dipende da $\dot{r}$). L'inversione conduce banalmente a

$$\dot{\vartheta} = u(r, p_\vartheta) = \frac{p_\vartheta}{mr^2}$$

(u qui non contiene $\dot{r}$), e infine si ha

$$\begin{aligned} L'(r,\dot{r},p_\vartheta) &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} - V(r) - \frac{p_\vartheta^2}{mr^2} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - W(r;p_\vartheta) \ , \end{aligned}$$

con

$$W(r,p_\vartheta) = V(r) + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} \ .$$

Otteniamo così un sistema lagrangiano a un solo grado di libertà, con una sorta di "energia potenziale efficace" W; si osservi che il termine aggiuntivo W (se $p_\vartheta \neq 0$) è repulsivo e diverge nell'origine. Se V è il potenziale coulombiano $V(r) = -k/r$, il grafico del potenziale efficace W e il ritratto in fase del sistema ridotto sono (a parte le notazioni) come in figura 1.11. Ancora non abbiamo discusso sistematicamente di equilibrio in ambito lagrangiano, ma il ritratto in fase mostra chiaramente che per ogni $p_\vartheta \neq 0$ il sistema ridotto ha un unico punto di equilibrio r^*; corrispondentemente il sistema completo ha un moto circolare uniforme di raggio r^*, con

$$\dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{m(r^*)^2} \ .$$

La (2.6.6), o la (2.6.7), mostrano che sempre, in corrispondenza agli equilibri del sistema ridotto ($\mathbf{q}'$ costante, $\dot{\mathbf{q}}' = 0$) le coordinate ignorabili avanzano uniformemente.

Esercizio 35 *Si tracci il grafico del potenziale efficace V^* per l'oscillatore armonico bidimensionale e per un punto materiale soggetto a una forza radiale di intensità costante (punto vincolato alla superficie di un cono rovesciato con asse verticale). Si studi qualitativamente il moto nei due casi.*

Esercizio 36 *Si determinino le condizioni su $V(r)$, per le quali l'origine non può mai essere raggiunta (per energia e momento angolare fissati).*

2.6.3 Il Teorema di Noether

Sia dato un sistema lagrangiano di lagrangiana $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$; consideriamo una trasformazione

$$\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q}) \tag{2.6.8}$$

definita per α in un intorno dell'origine, che sia l'identità per $\alpha = 0$:

$$\boldsymbol{\varphi}(0,\mathbf{q}) = \mathbf{q} \ .$$

Per ogni $\mathbf{q}$, al variare di α la (2.6.8) definisce un tratto di curva passante per $\mathbf{q}$ nello spazio delle configurazioni (figura 2.6, sinistra). La (2.6.8) si completa naturalmente per le velocità ponendo

$$\dot{\mathbf{q}} \mapsto \boldsymbol{\psi}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \tag{2.6.9}$$

con

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{ovvero} \qquad \psi_h(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi_h}{\partial q_k}(\alpha,\mathbf{q})\ \dot{q}_k \ ; \tag{2.6.10}$$

si osservi che per $\alpha = 0$ si ha ancora l'identità (la matrice jacobiana $\frac{\partial\varphi_h}{\partial q_k}$, che compare nella (2.6.10), per $\alpha = 0$ è la matrice identità). In questo modo al variare di α resta tracciata nello spazio degli

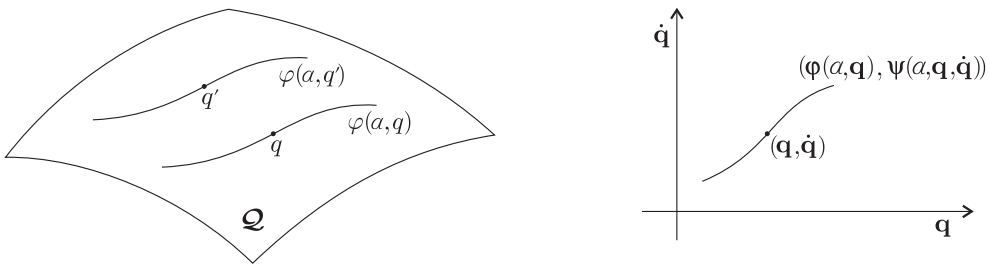

Figura 2.6: *Ad illustrazione del teorema di Noether.*

stati a $2n$ dimensioni una curva $(\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q}),\boldsymbol{\psi}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}))$ che passa per $(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ per $\alpha = 0$ (figura 2.6, destra).

Vi sono casi significativi, legati a simmetrie del problema allo studio, in cui la lagrangiana resta costante, o invariante, lungo opportune curve di questo tipo, ovvero

$$L(\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q}),\boldsymbol{\psi}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),t) = L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \ . \tag{2.6.11}$$

Un esempio elementare è il caso discusso nel paragrafo precedente, in cui la lagrangiana non dipende da una particolare coordinata q_l: con evidenza, l'assenza di q_l fa sì che L sia invariante per la particolare trasformazione data da

$$\varphi_h(\alpha,\mathbf{q}) = q_h + \alpha\delta_{lh} \ , \qquad \psi_h(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \dot{q}_h \ , \qquad h = 1,\dots,n \ , \tag{2.6.12}$$

in cui la sola coordinata q_l trasla di α. A questa proprietà di invarianza è associata, come si è visto, la legge di conservazione del momento p_l.

Questo risultato si generalizza a trasformazioni qualsiasi della forma (2.6.8) che lascino invariante L, nel senso che *a ciascuna di queste proprietà di invarianza è associata una particolare legge di conservazione.* Ciò è assicurato dal seguente teorema, che è un caso particolare di un più generale teorema dovuto a Emmy Noether:

Proposizione 31 *Si consideri una famiglia di trasformazioni regolari* $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q})$ *dipendente da un parametro reale* α*, definita e regolare in* α *per* α *in un intorno dell'origine, soddisfacente* $\boldsymbol{\varphi}(0,\mathbf{q}) = \mathbf{q}$*; sia (2.6.9) la sua naturale estensione alle velocità. Se per ogni scelta di* $\mathbf{q}$*,* $\dot{\mathbf{q}}$ *e* α *risulta*

$$L(\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q}),\boldsymbol{\psi}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),t) = L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \ , \tag{2.6.13}$$

allora la funzione

$$P(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}(0,\mathbf{q})\, p_h(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \ ,$$

dove $p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$*, è una costante del moto per le equazioni di Lagrange associate alla lagrangiana* L*.*

Per la traslazione (2.6.12) si ha $P = p_l$; in generale invece P è una combinazione lineare dei momenti, con coefficienti pari a $\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}$ (valutati in $\alpha = 0$).

Dimostrazione. Per la (2.6.13) la derivata di $L(\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q}),\boldsymbol{\psi}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),t)$ rispetto ad α si annulla:

$$\sum_{h=1}^{n}\Big[\frac{\partial L}{\partial q_h}(\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q}),\boldsymbol{\psi}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),t)\,\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}(\alpha,\mathbf{q}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\mathbf{q}),\boldsymbol{\psi}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),t)\,\frac{\partial\psi_h}{\partial\alpha}(\alpha,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\Big] = 0 \ .$$

Dalla definizione $\psi_h = \frac{\mathrm{d}\varphi_h}{\mathrm{d}t}$ segue (lemma 21) $\frac{\partial \psi_h}{\partial \alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}$; sostituendo e ponendo $\alpha = 0$ si ha

$$\sum_{h=1}^{n} \Big[\frac{\partial L}{\partial q_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}(0, \mathbf{q}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}(0, \mathbf{q}) \Big] = 0 \ .$$

Ricordando infine che per le equazioni di Lagrange risulta, lungo le soluzioni, $\frac{\partial L}{\partial q_h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$, si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha}(0, \mathbf{q}) \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \ ,$$

ovvero $\dot{P} = 0$. □

L'esempio fondamentale per comprendere il teorema di Noether è il seguente:

Esempio Consideriamo due punti materiali m_1 e m_2 non soggetti a vincoli, e supponiamo che il potenziale con cui essi interagiscono sia centrale, ovvero dipenda solo dalla distanza $|P_2 - P_1|$. Denotando con $(q_1, \ldots, q_6)$ le coordinate cartesiane di P_1 e P_2, la lagrangiana è della forma

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) - V\big((q_4 - q_1)^2 + (q_5 - q_2)^2 + (q_6 - q_3)^2\big) \ .$$

Usando il teorema di Noether dimostriamo che si conservano la quantità di moto totale e il momento angolare totale del sistema.

a) L è invariante per traslazione lungo uno qualsiasi dei tre assi cartesiani. Con riferimento alle traslazioni lungo l'asse x, ciò vuol dire che L è invariante per la sostituzione $q_h \mapsto \varphi_h(\alpha, \mathbf{q})$, $\dot{q}_h \mapsto \psi_h(\alpha, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, con

$$\varphi_1 = q_1 + \alpha \ , \qquad \varphi_4 = q_4 + \alpha \ , \qquad \varphi_h = q_h \quad \text{per} \quad h \neq 1, 4 \ ,$$

e corrispondentemente $\psi_h = \dot{q}_h$ per ogni h. Usando il teorema di Noether si conclude immediatamente che $P = p_1 + p_4$, che è la prima componente del vettore quantità di moto, si conserva. Allo stesso modo si procede evidentemente per le altre componenti.

b) La lagrangiana, data la simmetria sferica, è invariante anche per rotazione intorno a ciascuno degli assi coordinati. Con riferimento a rotazioni attorno all'asse z, ciò vuol dire che la sostituzione $q_h \mapsto \varphi_h(\alpha, \mathbf{q})$ definita da

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \ ; \qquad \varphi_3 = q_3$$
$$\begin{pmatrix} \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} \ ; \qquad \varphi_6 = q_6$$

con naturale estensione $\dot{q}_h \mapsto \psi_h(\alpha, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, lascia invariata L. In questo caso risulta

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}(0, \mathbf{q}) = -q_2 \ , \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha}(0, \mathbf{q}) = q_1 \ , \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha}(0, \mathbf{q}) = 0 \ ,$$

e si hanno simili relazioni con gli indici aumentati di tre. La quantità conservata è allora

$$P = -q_2 p_1 + q_1 p_2 - q_5 p_4 + q_4 p_5 = m_1 (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) + m_2 (x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) \ ,$$

ovvero è la terza componente del momento angolare. Allo stesso modo si procede per le altre due componenti.

L'esempio si generalizza immediatamente a un numero qualsiasi di punti materiali che interagiscano mediante forze interne di tipo centrale. Si vede così che *nel formalismo lagrangiano le più comuni leggi di conservazione della fisica si possono far risalire all'invarianza della lagrangiana per traslazioni* (omogeneità dello spazio) *e per rotazioni* (isotropia dello spazio). Vale la pena di osservare che *anche la legge di conservazione dell'energia,* che come si è visto richiede l'indipendenza della lagrangiana da t, *è associata a una proprietà di invarianza, precisamente l'invarianza della lagrangiana per traslazioni temporali* (omogeneità del tempo).

2.7 Soluzioni di equilibrio, stabilità e piccole oscillazioni

Studiamo qui l'equilibrio, la sua stabilità e i moti prossimi all'equilibrio, come appaiono nel formalismo lagrangiano. L'attenzione sarà ristretta ai soli sistemi naturali, inoltre supporremo che i vincoli siano fissi e le coordinate siano indipendenti da t. In queste ipotesi l'energia cinetica K si riduce alla sua parte quadratica K_2,

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}(\mathbf{q}) \dot{q}_h \dot{q}_k \ .$$

Anche le forze, e dunque V nel caso conservativo, saranno supposte indipendenti da t.

Invocheremo in più occasioni nozioni e risultati introdotti nel Capitolo 1 per generiche equazioni differenziali. Per evitare confusione, sarà bene aver sempre presente la distinzione, in ambito lagrangiano, tra spazio delle configurazioni, n–dimensionale e munito di coordinate $\mathbf{q}$, e spazio degli stati, $2n$–dimensionale, munito di coordinate $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

2.7.1 Equilibrio

Consideriamo un sistema olonomo a n gradi di libertà, con vincoli fissi e sollecitazioni non dipendenti esplicitamente da t, definito per $\mathbf{q}$ in un qualche aperto $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n$ e per $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$. In queste ipotesi l'energia cinetica si riduce alla sua parte quadratica, precisamente si ha $K = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk}(\mathbf{q}) \dot{q}_h \dot{q}_k$. Come sappiamo, le equazioni generali di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial K}{\partial q_h} = Q_h \ , \qquad h = 1, \ldots, n$$

si possono sempre mettere in forma normale, precisamente possiamo scriverle come sistema di n equazioni del secondo ordine del tipo $\ddot{q}_h = f_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $h = 1, \ldots, n$, o equivalentemente di $2n$ equazioni del primo ordine

$$\dot{q}_h = v_h \ , \qquad \dot{v}_h = f_h(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{2.7.1}$$

Riprendendo la nozione di punto di equilibrio per un sistema di equazioni differenziali introdotta nel primo capitolo,[17] diremo che $\mathbf{q}^* \in \mathcal{U}_0$ è una *configurazione di equilibrio* per le equazioni di Lagrange, se $\mathbf{c} = (\mathbf{q}^*, 0)$ è un punto di equilibrio per il sistema (2.7.1), ovvero se risulta

$$f_h(\mathbf{q}^*, 0) = 0 \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ .$$

E' facile allora verificare la seguente

[17] Qui e nel seguito, per fare in modo appropriato la connessione con gli argomenti visti nel primo capitolo, è particolarmente importante la distinzione tra spazio delle configurazioni n–dimensionale (ove sta $\mathbf{q}^*$) e spazio degli stati $2n$–dimensionale (dove sta $\mathbf{c}$); si faccia dunque bene attenzione qui e nel seguito all'uso dei termini "configurazione" e "punto".

Proposizione 32 *La configurazione* $\mathbf{q}^* \in \mathcal{U}_0$ *è di equilibrio se e solo se si ha* $Q_h(\mathbf{q}^*, 0) = 0$ *per* $h = 1, \ldots, n$.

Dimostrazione. Ricordiamo (paragrafo 2.4.4, proposizione 21) che si ha $\mathbf{f} = a^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{g})$, ove a è la matrice cinetica. Nel caso che stiamo considerando $\mathbf{g}$ è nulla per $\dot{\mathbf{q}} = 0$, perciò

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}^*, 0) = a^{-1}(\mathbf{q}^*)\, \mathbf{Q}(\mathbf{q}^*, 0)\ .$$

Pertanto $\mathbf{f}(\mathbf{q}^*, 0)$ si annulla se e solo se si annulla $\mathbf{Q}(\mathbf{q}^*, 0)$. □

- Si vede bene che l'eventuale presenza di forze proporzionali alla velocità, o comunque nulle per velocità nulle (attrito viscoso, forza di Coriolis e forza di Lorentz) è del tutto ininfluente per la determinazione delle configurazioni di equilibrio.

- Il risultato sopra dimostrato è analogo al risultato, ovvio nell'ambito della meccanica Newtoniana, che si ha equilibrio se e solo se si annullano le forze. La proposizione tuttavia non è banale: si pensi al punto materiale vincolato a una superficie; nell'equazione del moto, $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}$, è presente anche la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}$, che tuttavia non compare nella condizione di equilibrio, per la quale bisogna e basta che si annullino le componenti di $\mathbf{F}$ tangenti alla superficie.

Nel caso particolarmente significativo di sollecitazioni posizionali conservative descritte da un'energia potenziale V, si ha come sappiamo $Q_h(\mathbf{q}) = -\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q})$; la proposizione sopra dimostrata prende allora la forma seguente:

Proposizione 33 *La configurazione* $\mathbf{q}^* \in \mathcal{U}_0$ *è di equilibrio se e solo se* V *è stazionaria in* $\mathbf{q}^*$, *ovvero* $\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}^*) = 0$ *per ogni* h.

2.7.2 Stabilità dell'equilibrio

Veniamo ora al problema della stabilità dell'equilibrio. Con riferimento alla nozione di stabilità introdotta nel primo capitolo, diremo che la configurazione di equilibrio $\mathbf{q}^* \in \mathcal{U}_0$ è stabile per le equazioni di Lagrange, se $\mathbf{c} = (\mathbf{q}^*, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per il sistema (2.7.1); in modo altrettanto ovvio si trasporta la nozione di stabilità solo nel futuro o nel passato, o la stabilità asintotica.

- Non è difficile vedere che la definizione di stabilità data nel primo capitolo si può così riformulare: comunque si prenda un intorno $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ di $\mathbf{q}^*$, e comunque si prefissi $\varepsilon > 0$, esistono un intorno $\mathcal{V}$ di $\mathbf{q}^*$ e un numero $\delta > 0$, tali che ogni moto di dato iniziale $(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0)$, con $\mathbf{q}^0 \in \mathcal{V}$ ed energia cinetica iniziale $K(\mathbf{q}^0, \dot{\mathbf{q}}^0) < \delta$, resta indefinitamente in $\mathcal{U}$ e mantiene energia cinetica $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) < \varepsilon$. La verifica è lasciata come esercizio; si tratta solo di vedere che non è restrittivo prendere gli intorni U e V, che compaiono nella definizione di stabilità, del tipo $U = \big\{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : \mathbf{q} \in \mathcal{U}, K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) < \varepsilon\big\}$, e similmente per V).

Nel caso di sollecitazioni posizionali conservative, un criterio di stabilità di importanza fondamentale, nella forma di condizione *sufficiente* per l'equilibrio, è fornito dalla seguente proposizione, nota come *teorema di Lagrange–Dirichlet:*

Proposizione 34 *Sia dato un sistema lagrangiano naturale, con lagrangiana* $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$, $K = K_2 = \frac{1}{2}\sum_{h,k} a_{hk}(\mathbf{q})\dot{q}_h\dot{q}_k$. *Se l'energia potenziale* V *ha un minimo stretto in* $\mathbf{q}^*$, *allora* $\mathbf{q}^*$ *è punto di equilibrio stabile (per tutti i tempi).*

Dimostrazione. Se $\mathbf{q}^*$ è un minimo di V, allora si ha $\frac{\partial V}{\partial q_h} = 0$, $h = 1, \ldots, n$, perciò $\mathbf{q}^*$ è innanzitutto punto di equilibrio. La stabilità di $\mathbf{q}^*$ segue come facile corollario del teorema di Lyapunov,[18] utilizzando l'energia come funzione di Lyapunov. Per applicare il teorema si deve evidentemente fare riferimento allo spazio $2n$–dimensionale ove avviene il moto, con la corrispondenza $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, e verificare che in un intorno del punto di equilibrio $\mathbf{c} = (\mathbf{q}^*, 0)$ l'energia $E = K + V$ è una buona funzione di Ljapunov. La cosa è evidente: dato che K è definita positiva come funzione di $\dot{\mathbf{q}}$, se V ha un minimo stretto in $\mathbf{q}^*$ allora E è minima in $\mathbf{c}$ (allontanandosi da $\mathbf{c}$, K o V o entrambe crescono).[19] D'altra parte, poichè E è una costante del moto, si ha $\dot{E} = 0$, e ciò conclude la prova.

□

Il teorema di Lagrange–Dirichlet si estende poi in modo ovvio ai casi più comuni di forze dipendenti dalla velocità. Precisamente:

i) in presenza di forze giroscopiche, ovvero per potenziali dipendenti dalla velocità della forma $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = V_0(\mathbf{q}) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ con V_1 lineare in $\dot{\mathbf{q}}$, si vede immediatamente che il criterio di stabilità rimane valido, come condizione sufficiente, pur di fare riferimento alla sola parte posizionale V_0: invero, attorno ai punti di minimo di V_0 (che sono ancora punti di equilibrio) l'energia $E = K + V_0$ — si ricordi che il termine V_1 non contribuisce — è ancora una buona funzione di Ljapunov, come se le forze dipendenti dalla velocità non esistessero. In particolare dunque il criterio di stabilità di Lagrange-Dirichlet si estende al caso delle forze elettromagnetiche e dei sistemi di riferimento rotanti. *Attenzione:* con ciò non si sta dicendo che le forze giroscopiche siano ininfluenti ai fini della stabilità dell'equilibrio, ma soltanto che se V_0 ha un mimimo in $\mathbf{q}^*$, allora l'aggiunta di forze giroscopiche non toglie stabilità. *Viceversa può aggiungerla,* ovvero ci sono casi (si veda, per un esempio, l'appendice C) in cui $\mathbf{q}^*$ non è stabile ma lo diventa grazie all'aggiunta di forze giroscopiche.

ii) Nel caso in cui, in aggiunta ad eventuali forze conservative ed eventualmente giroscopiche, vi siano forze dissipative (attriti), allora la stabilità permane, ma solo per tempi positivi. Infatti, come abbiamo visto, le forze dissipative sono caratterizzate dal fatto che si ha $\dot{E} = \sum_h \dot{q}_h Q_h \leq 0$; per il teorema di Ljapunov la conclusione è immediata. In alcuni tipici casi di interesse fisico (in particolare per l'attrito viscoso), usando come ipotesi nel teorema di Ljapunov la condizione b"), più debole di b'), è possibile verificare che la dissipazione non solo non distrugge la stabilità (nel futuro) dei punti di equilibrio, ma anzi la muta in stabilità asintotica.

E' bene sottolineare il fatto che il teorema di Lagrange–Dirichlet sopra dimostrato fornisce una condizione solo sufficiente, e non anche necessaria,[20] per la stabilità dell'equilibrio. C'è tuttavia un

[18] Storicamente le cose sono andate al contrario, ovvero il teorema di Lyapunov è nato come estensione del teorema di Lagrange–Dirichlet.

[19] Se invece V avesse un massimo, si osservi, E non sarebbe né massima né minima in $\mathbf{c}$, ma avrebbe un punto di sella.

[20] Un semplice controesempio è dato dal sistema a un grado di libertà con energia potenziale $V(q) = q^k \sin q^{-1}$, $k > 4$: l'origine, pur non essendo un minimo di V, è tuttavia, come è facile convincersi, un punto di equilibrio stabile. Un controesempio con V di classe C^∞ è dato da $V(q) = \exp\,(-1/q^2)\,\sin q^{-1}$.

caso importante in cui la condizione è anche necessaria, precisamente il caso in cui non vi sono forze dissipative o giroscopiche, e (come è generico) la presenza o l'assenza del minimo in V si decide osservando le sole derivate seconde di V.

Denotiamo con B la matrice hessiana di V calcolata in $\mathbf{q}^*$:

$$B_{h,k} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_h \partial qk}(\mathbf{q}^*) \ .$$

Se B è definita positiva, allora V ha un minimo in $\mathbf{q}^*$, e corrispondentemente tutti gli autovalori di B sono positivi. Se invece B ha uno o più autovalori negativi, allora certamente V *non* ha un minimo in $\mathbf{q}^*$ (uscendo da $\mathbf{q}^*$ in direzione dell'autovettore corrispondente all'autovalore negativo V decresca), e corrispondentemente si dimostra che $\mathbf{q}^*$ non è stabile. Sfugge all'analisi delle derivate seconde il solo caso in cui gli autovalori di B sono tutti positivi o nulli, e uno almeno è nullo. Si conoscono altre condizioni necessarie per la stabilità dell'equilibrio. Il problema generale della ricerca di una condizione necessaria per la stabilità dell'equilibrio (detto anche *problema di Dirichlet inverso*) è tuttavia ancora aperto.

- Per $n = 2$ decidere se una matrice B simmetrica è definita positiva è immediato (basta scrivere l'equazione agli autovalori, e chiedere che siano entrambi positivi).
  - Se $\det B > 0$, allora la matrice è definita (positiva o negativa): in tal caso infatti gli autovalori di B sono entrambi positivi o entrambi negativi. E' definita positiva se gli elementi diagonali (che per B simmetrica e $\det B > 0$ hanno obbligatoriamente lo stesso segno) sono positivi, negativa se negativi.
  - Se invece $\det B \leq 0$ la matrice non è definita.

2.7.3 Linearizzazione delle equazioni attorno a un punto di equilibrio

Ci proponiamo qui di studiare il comportamento dei sistemi lagrangiani in prossimità di un punto di equilibrio; a tale scopo applicheremo alle equazioni di Lagrange una procedura di linearizzazione, analoga a quella introdotta nel primo capitolo per passare dall'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ all'equazione linearizzata $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, in vista della classificazione dei punti critici. E' bene però tener presenti anche alcune diversità: precisamente, a differenza del Capitolo 1, qui tratteremo direttamente equazioni del secondo ordine; inoltre ci limiteremo allo studio dei sistemi conservativi. Nella sostanza, quello che vedremo è come si estende a un problema lagrangiano a n gradi di libertà lo studio allora effettuato per i sistemi conservativi a un grado di libertà (sistemi $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^2$, con $\operatorname{Tr} A = 0$).

Consideriamo dunque un sistema lagrangiano naturale a n gradi di libertà, con lagrangiana indipendente dal tempo $L = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$, $K = K_2 = \frac{1}{2}\sum_{h,k} a_{hk}(\mathbf{q})\dot{q}_h\dot{q}_k$. Supponiamo che il sistema abbia una configurazione di equilibrio $\mathbf{q}^*$, e sviluppiamo L attorno al punto $\mathbf{c} = (\mathbf{q}^*, 0)$, considerando piccoli sia la differenza $\mathbf{q} - \mathbf{q}^*$ sia $\dot{\mathbf{q}}$. Per semplificare le notazioni assumiamo (senza perdita di generalità: basta una traslazione dell'origine) $\mathbf{q}^* = 0$. Si trova allora

$$\begin{aligned} a_{hk}(\mathbf{q}) &= a_{hk}(0) + \mathcal{O}(\|\mathbf{q}\|) \\ K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}(0)\dot{q}_h\dot{q}_k + \mathcal{O}(\|\mathbf{q}\|\,\|\dot{\mathbf{q}}\|^2) \ , \end{aligned}$$

e per quanto riguarda V,

$$V(\mathbf{q}) = V(0) + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_h}(0) q_h + \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial q_h \partial q_k}(0) q_h q_k + \mathcal{O}(\|(\mathbf{q})\|^3) \ .$$

Trascurando la costante $V(0)$ e ricordando che $\frac{\partial V}{\partial q_h}(0) = 0$ per ogni h, si ottiene allora per L lo sviluppo

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}(0)\dot{q}_h\dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial q_h \partial q_k}(0) q_h q_k + \mathcal{O}(\|(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\|^3) \ .$$

Questa lagrangiana è della forma $L = L^* + \mathcal{O}(\|(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\|^3)$, con

$$L^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K^*(\dot{\mathbf{q}}) - V^*(\mathbf{q}) \ , \tag{2.7.2}$$

avendo posto

$$\begin{aligned} K^* &= \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} A_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k \ , \qquad A_{hk} = a_{hk}(0) \\ V^* &= \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} B_{hk} q_h q_k \ , \qquad B_{hk} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_h \partial q_k}(0) \ ; \end{aligned}$$

in notazione più compatta si può scrivere

$$L^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot A\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q} \cdot B\mathbf{q} \ .$$

Le equazioni di Lagrange associate a L^* sono lineari, precisamente hanno la forma

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\mathbf{q} = 0 \ . \tag{2.7.3}$$

E' facile verificare che la medesima equazione si ottiene anche scrivendo le equazioni di Lagrange corrispondenti alla lagrangiana completa L, ed effettuando la linearizzazione sulle equazioni del moto (si esegua la verifica come esercizio, osservando come i termini $\mathcal{O}(\|(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\|^3)$ in L diano necessariamente luogo a termini $\mathcal{O}(\|(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\|^2)$ nelle equazioni, che scompaiono nella linearizzazione).

- Le equazioni del moto linearizzate (2.7.3) differiscono dalle equazioni vere per termini di secondo ordine in q_h e $\dot{q}_h$; perciò possiamo pensare (ma si tratta di una affermazione molto delicata, da non prendersi troppo alla leggera) che esse rappresentino bene il moto del sistema in un piccolo intorno del punto di equilibrio. La cosa è particolarmente interessante se il punto di equilibrio è stabile, perchè allora, come sappiamo, ogni traiettoria con dato iniziale sufficientemente vicino al punto di equilibrio resta indefinitamente vicina a tale punto, e dunque le equazioni linearizzate approssimano le equazioni vere per tempi lunghi (ma qui occorre una cautela ancora maggiore: in particolare, non si deve pensare che le soluzioni delle equazioni linearizzate e delle equazioni vere restino necessariamente vicine per tempi lunghi).

Le equazioni del moto (2.7.3) sono lineari e omogenee, pertanto vale il principio di sovrapposizione, e per trovare l'integrale generale basta procurarsi $2n$ soluzioni indipendenti. Con un procedimento tipico, corrispondente a quello già usato nel primo capitolo (paragrafo 1.4.2), cerchiamo soluzioni della forma particolare, fattorizzata o "separata",

$$\mathbf{q}(t) = \tau(t)\mathbf{u} \ ,$$

ove $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ è un vettore costante, mentre la funzione scalare $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ racchiude tutta la dipendenza dal tempo. Per sostituzione nella (2.7.3) si ottiene allora $\ddot{\tau}(t)A\mathbf{u} + \tau B\mathbf{u} = 0$, il che è possibile se e solo se $A\mathbf{u}$ e $B\mathbf{u}$ sono paralleli, ovvero se con opportuna costante λ si ha[21]

$$B\mathbf{u} = \lambda A\mathbf{u} \ . \tag{2.7.4}$$

Per ogni valore λ per il quale questa equazione ammetta soluzione, la funzione $\tau(t)$ è poi determinata dalla familiare equazione del secondo ordine

$$\ddot{\tau} = -\lambda\tau \ , \tag{2.7.5}$$

che come sappiamo fornisce sempre due soluzioni indipendenti. Per ogni soluzione della (2.7.4) si trovano così due soluzioni indipendenti della (2.7.3), e dunque lo studio dell'integrale generale della (2.7.3) è ricondotto alla ricerca di n soluzioni indipendenti della (2.7.4). Questa equazione si vede essere una generalizzazione della più familiare equazione agli autovalori per la matrice B, cui siamo ricondotti nel caso in cui A sia l'identità. *Grazie al fatto che A è simmetrica e definita positiva, l'equazione generalizzata mantiene, con pochi semplici adattamenti, le proprietà algebriche essenziali dell'equazione agli autovalori.* In particolare (usando, con piccolo abuso, i termini autovalore e autovettore per λ e $\mathbf{u}$) si hanno le seguenti proprietà:

i) gli autovalori sono le radici dell'*equazione secolare*

$$\det(B - \lambda A) \ = \ 0 \ , \tag{2.7.6}$$

che è un'equazione algebrica di grado n per λ.

ii) Se B, come nel nostro caso, è simmetrica, allora gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono reali, e i corrispondenti autovettori $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)}$, che per λ reali si possono supporre reali, si possono prendere "ortonormali con riferimento alla matrice A," nel senso che soddisfano la condizione

$$\mathbf{u}^{(i)} \cdot A\mathbf{u}^{(j)} = \delta_{ij} \ . \tag{2.7.7}$$

iii) Se anche B è definita positiva, allora gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono positivi.

iv) Se denotiamo con U la matrice che ha per colonne gli autovettori, ovvero la matrice di elementi $U_{ij} = u_i^{(j)}$, allora la matrice $U^T AU$ concide con l'identità, e simultaneamente la matrice $U^T BU$ è diagonale, precisamente si ha $(U^T BU)_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$.

Tutte queste proprietà si dimostrano con modeste variazioni (o nessuna variazione) alle corrispondenti dimostrazioni per l'ordinaria equazione agli autovalori. Brevemente:

– la proprietà i) segue dal fatto che il sistema omogeneo $(B - \lambda A)\mathbf{u} = 0$ deve avere soluzioni non banali.

– La proprietà ii), per la parte sulla realtà degli autovalori e autovettori, si ottiene scrivendo accanto alla (2.7.4) l'equazione complesso–coniugata

$$B\overline{\mathbf{u}} = \overline{\lambda} A\overline{\mathbf{u}} \ ;$$

[21] Si potrebbe anche scrivere $A\mathbf{u} = \lambda B\mathbf{u}$, escludendo però così il caso $B\mathbf{u} = 0$ con $A\mathbf{u} \neq 0$. Il caso opposto $A\mathbf{u} = 0$ con $B\mathbf{u} \neq 0$, che resta escluso dalla (2.7.4), non può invece presentarsi ($A\mathbf{u}$ non è mai nullo per $\mathbf{u} \neq 0$).

moltiplicando scalarmente la (2.7.4) per $\overline{\mathbf{u}}$ e questa per $\mathbf{u}$, e sottraendo l'una dall'altra, grazie alla simmetria delle matrici si trova

$$0 = (\lambda - \overline{\lambda})\, \overline{\mathbf{u}} \cdot A\mathbf{u} \ ,$$

e dunque $\lambda - \overline{\lambda} = 0$. Che a questo punto gli autovettori si possano prendere reali è ovvio (la parte reale e la parte immaginaria di $\mathbf{u}$ sono autovettori reali con il medesimo λ).

– La ii), per la parte sull'ortogonalità (con riferimento ad A) degli autovettori, è facile per autovettori $\mathbf{u}^{(i)}$, $\mathbf{u}^{(j)}$ con autovalori λ_i, λ_j diversi: se

$$B\mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i A\mathbf{u}^{(i)} \ , \qquad B\mathbf{u}^{(j)} = \lambda_j A\mathbf{u}^{(j)} \ ,$$

moltiplicando scalarmente la prima per $\mathbf{u}^{(j)}$ e la seconda per $\mathbf{u}^{(i)}$ e sottraendo, grazie alla simmetria delle matrici si trova

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j)\ \mathbf{u}^{(j)} \cdot A\mathbf{u}^{(i)} \ ,$$

dunque per $\lambda_i \neq \lambda_j$ si ha l'ortogonalità. La verifica della proprietà nel caso di autovalori multipli è più delicata e non vi entriamo (si tratterebbe di vedere che gli autospazi hanno dimensione pari alla molteplicità di λ; all'interno dei sottospazi poi è sempre possibile soddisfare la condizione di ortogonalità generalizzata).

– La proprietà iii) è facile: moltiplicando la (2.7.4) per $\mathbf{u}$ si ottiene

$$\mathbf{u} \cdot B\mathbf{u} = \lambda\ \mathbf{u} \cdot A\mathbf{u} \ ,$$

dunque se oltre a A anche B è definita positiva, λ è positivo.

– Infine, per l'ultima proprietà, con facili calcoli si vede che

$$(U^T AU)_{ij} = \mathbf{u}^{(i)} \cdot A\mathbf{u}^{(j)} \ , \qquad (U^T BU)_{ij} = \lambda_j \mathbf{u}^{(i)} \cdot A\mathbf{u}^{(j)} \ ,$$

e per la (2.7.7) la conclusione è immediata.

2.7.4 Modi normali di oscillazione e coordinate normali

Il caso più interessante è quello in cui il punto di equilibrio è stabile, e la stabilità si può riconoscere dal fatto che V ha in $\mathbf{q}^* = 0$ un minimo di ordine due. In questo caso la matrice B è definita positiva, e dunque ha senso porre

$$\omega_i^2 = \lambda_i > 0 \ , \qquad i = 1, \ldots, n \ .$$

L'equazione (2.7.5) per τ corrispondente all'autovalore λ_i è allora quella per l'oscillatore armonico di pulsazione ω_i, e il suo integrale generale si scrive, ad esempio, $\tau^{(i)}(t) = \mathcal{A}_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$. Corrispondentemente, l'integrale generale della (2.7.3) si può scrivere nella forma

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)\mathbf{u}^{(i)} \ ; \tag{2.7.8}$$

si osservi che esso contiene $2n$ costanti arbitrarie, la cui scelta è equivalente alla scelta del dato iniziale per $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. E' interessante il caso in cui una sola delle ampiezze $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ sia diversa da

zero, ad esempio $\mathcal{A}_j = 1$ e $\mathcal{A}_i = 0$ per $i \neq j$: come si vede dalla (2.7.8), in questo caso troviamo soluzioni particolari della forma

$$\mathbf{q}(t) = \cos(\omega_j t + \varphi_j)\mathbf{u}^{(j)} \ ,$$

in componenti

$$q_h(t) = U_{hj} \cos(\omega_j t + \varphi_j) \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ ;$$

queste soluzioni particolari sono periodiche, anzi armoniche, e inoltre tutte le variabili $q_1, \ldots, q_n$ oscillano, oltre che con lo stesso periodo, con la stessa fase. La periodicità del moto è un fatto eccezionale, che scompare in genere se si scelgono due o più ampiezze $\mathcal{A}_i$ diverse da zero (a meno che le corrispondenti pulsazioni non siano a due a due commensurabili, nel qual caso il moto resta periodico; per esercizio lo si verifichi). Questi particolari moti periodici del sistema prendono il nome di *modi normali di oscillazione*, e sono di fondamentale importanza in ogni campo della fisica o dell'ingegneria, ovunque vi siano sistemi oscillanti di qualunque natura (dalle antenne ai grattacieli agli strumenti musicali). La (2.7.8) mostra che l'integrale generale delle equazioni di Lagrange linearizzate si scrive come sovrapposizione di modi normali.

E' infine interessante eseguire il cambiamento di coordinate $\mathbf{q} = U\mathbf{x}$ nella lagrangiana troncata (2.7.2). Si vede immediatamente che la nuova lagrangiana $\tilde{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = L(U\mathbf{x}, U\dot{\mathbf{x}})$ è data da

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(U^T AU)\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}(U^T BU)\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \ ;$$

per la proprietà iv) sopra enunciata si ha allora

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \ , \tag{2.7.9}$$

e dunque le equazioni del moto si disaccoppiano, precisamente si ha

$$\ddot{x}_i \ = \ -\lambda_i x_i \ , \qquad i = 1, \ldots, n \ . \tag{2.7.10}$$

Le coordinate $x_1, \ldots, x_n$ prendono esse stesse il nome di *coordinate normali* del sistema. La (2.7.8) e la (2.7.9) mostrano una cosa di importanza fondamentale: *qualunque sistema lagrangiano linearizzato attorno a un punto di equilibrio stabile* (la cui stabilità sia riconoscibile dall'analisi delle derivate seconde del potenziale) *è equivalente, tramite una trasformazione lineare di coordinate, a un sistema di oscillatori armonici disaccoppiati.* Si osservi che anche l'energia del sistema linearizzato prende la forma

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i \ , \qquad E_i = \frac{1}{2}(\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2) \ ,$$

come se si trattasse di un sistema di n oscillatori materiali.

Il passaggio alle coordinate normali si può fare, naturalmente, indipendentemente dal segno degli autovalori λ_i; in ogni caso si ottengono le equazioni (2.7.10), tra loro disaccoppiate, che a seconda dei casi si possono interpretare come equazioni di un oscillatore armonico ($\lambda_i > 0$), di una particella libera ($\lambda_i = 0$), o di un repulsore armonico ($\lambda_i < 0$). Il caso trattato sopra, in cui tutti gli autovalori λ_i sono positivi, è tuttavia il più interessante.

- *Diagonalizzazione simultanea di due matrici.* Come è noto, la diagonalizzazione di una sola matrice simmetrica si può sempre effettuare con una trasformazione di coordinate ortogonale (uno spostamento rigido del sistema di assi coordinati); la diagonalizzazione simultanea di due

matrici A e B – salvo il caso eccezionale in cui esse commutino – non si può invece ottenere con una trasformazione *ortogonale.* La diagonalizzazione simultanea è tuttavia sempre possibile, come abbiamo visto, con un più generale cambiamento lineare di coordinate, purché entrambe le matrici siano simmetriche e una almeno di esse sia definita positiva. Per convincersene fino a trovare ovvia questa possibilità di diagonalizzazione simultanea con generali trasformazioni lineari, bastano poche considerazioni di carattere geometrico: restringiamoci per semplicità al caso $n = 2$, e ricordiamo che ad ogni matrice M simmetrica è naturalmente associata una conica centrata nell'origine, precisamente la conica di equazione

$$\mathbf{x} \cdot M\mathbf{x} = 1 \ ;$$

per la matrice A, che è definita positiva, si tratta di un'ellisse, mentre per B può trattarsi di un'ellisse, di una parabola o di un'iperbole. La trasformazione ortogonale che diagonalizza l'una o l'altra matrice altro non è che la rotazione che porta gli assi coordinati a coincidere con gli assi di simmetria della conica. Si vede bene allora che è possibile diagonalizzare simultaneamente le matrici, eseguendo in successione le tre seguenti trasformazioni lineari: i) una rotazione R_1, che porta gli assi coordinati sugli assi di simmetria dell'ellisse associata ad A; ii) una dilatazione D lungo i nuovi assi coordinati, che muta l'ellisse in un circolo (con questa trasformazione, non ortogonale, la conica associata a B muta assi di simmetria, ma resta una conica centrata nell'origine); iii) una rotazione R_2, che porta gli assi coordinati a coincidere con i nuovi assi di simmetria della seconda conica (mentre il cerchio resta un cerchio). La trasformazione $U = R_2 D R_1$ diagonalizza simultaneamente A e B, ed anzi muta A nella matrice identità. La generalizzazione a $n > 2$ è ovvia.

2.7.5 Linearizzazione e stabilità

Dalle equazioni disaccoppiate (2.7.10) si vede immediatamente che, *per il problema linearizzato,* l'origine è punto di equilibrio stabile se tutte le radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dell'equazione secolare sono positive, mentre è instabile se almeno una di esse è negativa o nulla. Come si è visto nel Capitolo 1, le proprietà di stabilità dell'equilibrio per il sistema linearizzato non si trasportano sempre in modo banale al corrispondente problema non lineare; ciò avviene però, per i particolari sistemi lagrangiani conservativi di cui ci stiamo occupando, proprio nei casi di maggior interesse: precisamente, si ha che

Proposizione 35 *Per il sistema non lineare,*

i) se tutte le radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono positive, allora l'equilibrio è stabile;

ii) se una almeno delle radici è negativa, allora l'equilibrio è instabile.

L'unico caso in cui non è possibile trarre immediate conclusioni è dunque quello (non generico) in cui nessuno dei λ_i è negativo, e uno almeno di essi è nullo; in tutti gli altri casi si ha invece che il punto di equilibrio è stabile, per il problema non lineare come per quello lineare, se e solo se l'energia potenziale ha in esso un minimo. D'altra parte, il caso indeciso è anche l'unico in cui non si può stabilire, esaminando le sole derivate seconde, se l'energia potenziale abbia o meno un minimo. Si conclude pertanto che, come già anticipato sopra, *se ci si restringe al caso generico in cui la presenza o meno del minimo in V si può stabilire dall'esame delle derivate seconde, allora la condizione di stabilità di Lagrange–Dirichlet diviene necessaria oltre che sufficiente.*

Dimostrazione. Il punto i) è una immediata conseguenza del teorema di Lagrange–Dirichlet: infatti, se tutte le radici sono positive, allora V ha certamente un minimo nel punto di equilibrio, e la stabilità è garantita. Per quanto riguarda invece il punto ii), esso è una conseguenza della proposizione 10 del Capitolo 1 (paragrafo 1.4.3). Per applicare la proposizione dobbiamo portare anche il nostro sistema di equazioni differenziali al primo ordine, e dal momento che le proprietà di stabilità non dipendono dalla scelta delle coordinate, possiamo scegliere le coordinate più convenienti, che in questo caso sono le coordinate normali; in queste coordinate le equazioni del secondo ordine sono le (2.7.10), e il corrispondente sistema del primo ordine è

$$\dot{x}_i = v_i \ , \qquad \dot{v}_i = -\lambda_i x_i \ , \qquad i = 1, \ldots, n \ .$$

Ordinando le variabili nel modo $(x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n)$, la matrice jacobiana $2n \times 2n$ di questo sistema si scrive

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}$$

e i suoi autovalori, in numero di $2n$, sono con evidenza

$$\mu_i^{\pm} = \pm\sqrt{-\lambda_i} \ , \qquad i = 1, \ldots, n \ . \tag{2.7.11}$$

Perciò se per un indice i si ha $\lambda_i < 0$, si ottiene una coppia di autovalori $\mu_i^{\pm}$ reali ed opposti, e la presenza di un autovalore reale negativo implica l'instabilità dell'equilibrio.

- L'analogia tra la proposizione 35 qui enunciata e la proposizione 10 introdotta nel primo capitolo, che abbiamo sfruttato nella dimostrazione del punto ii), a prima vista parrebbe non estendersi al punto i), che non solo non si deduce dalla proposizione 35, ma potrebbe addirittura apparire in conflitto, se non con l'enunciato, con i commenti fatti alla proposizione 10. Infatti, dalla (2.7.11) si vede che se tutte le radici λ_i sono positive, allora tutti gli autovalori $\mu_i^{\pm}$ sono immaginari puri, e questo caso era stato indicato tra quelli incerti, mentre il punto i) della proposizione 35 assicura qui la stabilità. La spiegazione di questa "aumentata stabilità" sta nel fatto che la possibile perdita di stabilità nel sistema non lineare, in presenza di autovalori con parte immaginaria nulla, richiede forze non conservative, che nell'ambito lagrangiano conservativo al quale ci siamo qui ristretti sono invece escluse a priori.

2.7.6 Non linearità e moti caotici

Consideriamo il caso dell'equilibrio stabile con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. Benché la stabilità, come è assicurato dalla proposizione 35, persista anche nel sistema non lineare, ugualmente i moti del sistema non lineare, se osservati su tempi lunghi, possono differire in modo significativo da quelli del sistema linearizzato. Mettiamoci in coordinate normali e supponiamo, per semplicità, che i termini trascurati nella linearizzazione non dipendano dalle velocità. Allora la lagrangiana del sistema non lineare ha la forma

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i, \dot{x}_i) - V^{\text{int}}(x_1, \ldots, x_n) \ ,$$

con $L_i(x_i, \dot{x}_i) = \frac{1}{2}(\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2)$, mentre il potenziale di interazione $V^{\rm int}$ contiene termini almeno cubici in $\mathbf{x}$ che accoppiano tra loro gli oscillatori armonici, altrimenti indipendenti, di cui è costituito il sistema linearizzato. Benché piccoli per moti di piccola ampiezza, questi termini possono tuttavia produrre, su tempi lunghi, significativi scambi di energia tra gli oscillatori — non dobbiamo aspettarci che le energie $E_i = \frac{1}{2}(\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2)$ restino conservate sepatatamente — e indurre nel sistema moti sostanzialmente più complicati.

Un esempio molto importante anche storicamente, perché è stato il primo studio numerico in cui si sono visti con chiarezza i moti caotici, è offerto dal cosiddetto *modello di Hénon e Heiles* (1964).[22] Si tratta di un sistema apparentemente semplicissimo, costituito da due soli oscillatori armonici di ugual frequenza, che adattando l'unità di misura del tempo possiamo prendere uguale a uno, accoppiati da un potenziale di interazione cubico della forma[23] $V^{\rm int} = x_1^2 x_2 - \frac{1}{3}x_2^3$; la lagrangiana allora è

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2 x_2 + \frac{1}{3}x_2^3$$

e le equazioni del moto non lineari che ne conseguono sono

$$\ddot{x}_1 = -x_1 - 2x_1 x_2 \ , \qquad \ddot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 - x_2^2 \ . \tag{2.7.12}$$

Nel modello lineare disaccoppiato ($V^{\rm int} = 0$) ci sono due costanti del moto: l'energia totale e l'energia di uno qualunque dei due oscillatori. Nel modello non lineare l'energia totale certamente si conserva, ed è naturale chiedersi se esista o meno una seconda quantità conservata, cioè una qualche funzione $F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ che si mantiene costante lungo i moti.

Hénon e Heiles risolsero numericamente le equazioni del moto (2.7.12) e rappresentarono i moti tramite un'opportuna *sezione di Poincaré.* La nozione di sezione di Poincaré è già stata introdotta nel Capitolo 1 a proposito del pendolo forzato; qui si fa nella sostanza la stessa cosa: si seziona lo spazio degli stati a dimensione quattro con una opportuna "superficie" tridimensionale Σ; una buona scelta qui è il piano $x_1 = 0$. Per ogni dato iniziale su Σ si considerano le successive intersezioni della traiettoria con Σ stessa, ad esempio con $\dot{x} > 0$. Per la conservazione dell'energia, queste non possono stare ovunque in Σ, ma devono soddisfare la condizione

$$\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + x_2^2) - \frac{1}{3}x_2^3 = E$$

(si è già tenuto conto che $x_1 = 0$); si vede allora che le due coordinate $x_2, \dot{x}_2$ bastano a individuare il punto di intersezione, mentre $\dot{x}_1$ resta determinato da

$$\dot{x}_1 = \sqrt{2E - \dot{x}_2^2 - x_2^2 + \tfrac{2}{3}x_2^3} \ . \tag{2.7.13}$$

[22] La motivazione, nella quale non possiamo addentrarci, viene dalla Meccanica Celeste, più precisamente dalla dinamica stellare: in una certa approssimazione, x_1 e x_2 rappresentano gli scarti del moto di una stella da un moto circolare, in una galassia a simmetria cilindrica. Al fine di conoscere la distribuzione delle stelle nella galassia è importante conoscere il numero delle costanti del moto nel problema.

[23] Quando $V^{\rm int}$ è omogeneo di grado $2+s$ (qui $s = 1$), allora tramite un riscalamento $\mathbf{x} = \varepsilon\tilde{\mathbf{x}}$, seguito dalla divisione (sempre lecita) della lagrangiana per ε^2, si ottiene una nuova lagrangiana della forma

$$\tilde{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}) = \sum_{i=1}^{n} L_i(\tilde{x}_i, \dot{\tilde{x}}_i) - \varepsilon^s V^{\rm int}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \ ,$$

cioè uguale alla precedente a meno del termine ε^s di fronte a $V^{\rm int}$. I moti che prima si svolgevano in un piccolo intorno di raggio ε del punto di equilibrio, e corrispondentemente avevano energia piccola $E = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, ora si svolgono in un intorno di raggio uno e hanno energia $\tilde{E} = E/\varepsilon^2$ di ordine uno. Perciò considerare moti di energia piccola $E = \varepsilon^2\tilde{E}$ è *esattamente* identico a considerare moti con energia $\tilde{E}$ e piccolo termine di interazione $\varepsilon^s V^{\rm int}$. Se $V^{\rm int}$ non è omogeneo, ma è una somma di termini omogenei $V^{(2+s)}$ di grado $2+s$, allora il termine di interazione nel sistema riscalato è $\sum_s \varepsilon^s V^{(2+s)}$.

Le successive intersezioni si possono così rappresentare graficamente su un piano ordinario, il piano cartesiano $x_2, \dot{x}_2$. Resta così definita, per ogni fissata E, una mappa $\Phi_E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, che manda ogni intersezione nella successiva. Per ogni E il radicando nella (2.7.13) deve essere positivo, perciò la mappa è definita nella regione $\mathcal{D}_E$ definita da

$$\frac{1}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \tfrac{1}{3}x_2^3 < E \ ;$$

$\mathcal{D}_E$ è un dominio simmetrico in $\dot{x}_2$, che si vede facilmente essere limitato (a forma di uovo, allungato dalla parte delle x positive) per $E \leq 1/6$, illimitato per $E > 1/6$.

Denotiamo $z = (x_2, \dot{x}_2)$. Come per il pendolo forzato, a ogni moto del sistema corrisponde per la mappa una traiettoria discreta, cioè una successione di punti $z_1, z_2, \ldots$ con $z_{k+1} = \Phi_E(z_k)$. Se il moto è periodico, la traiettoria per la mappa è composta da un numero finito di punti che si ripetono. Se nel sistema di partenza c'e, in aggiunta a E, una costante del moto $F(x_1, x_2, \dot{x}_2, \dot{x}_2)$, allora anche per la mappa Φ_E c'è una costante del moto, precisamente

$$G_E(x_2, \dot{x}_2) = F(0, x_2, \dot{x}_1(E, x_2\dot{x}_2), \dot{x}_2)$$

con $\dot{x}_1(E, x_2\dot{x}_2)$ definito dalla (2.7.13), e di conseguenza le successive z_k sono confinate a una curva $G_E(x_2, \dot{x}_2) = \text{cost}$. Se invece non vi sono costanti del moto oltre a E, le z_k possono vagare su porzioni bidimensionali di $\mathcal{D}_E$.

La figura 2.7, riquadro (a), mostra la sezione di Poincaré per un valore piccolo di E, precisamente $E = 0.08$. Le diverse curve, risolte in realtà in punti, corrispondono a diverse orbite della mappa. L'impressione chiara è che effettivamente esista una costante del moto G_E, di cui le curve che appaiono nella figura sono le curve di livello. Basta tuttavia alzare un po' l'energia (e così considerare moti di ampiezza maggiore, per i quali i termini non lineari nelle equazioni del moto pesano di più) perché la situazione cambi in modo drastico. Il riquadro (b) della figura mostra la sezione di Poincaré del sistema per $E = 0.125$: come si vede, per alcuni dati iniziali la successione delle intersezioni è ancora allineata in ben definite curve invarianti, come se esistesse ancora una costante del moto G_E. Ma per altri dati iniziali l'orbita della mappa va riempiendo densamente una regione genuinamente bidimensionale del dominio: *tutti i punti che nella figura appaiono non allineati in curve costituiscono una singola orbita.* Questa regione è detta comunemente *regione caotica,* mentre quella riempita dalle curve invarianti è detta *regione ordinata.* Al crescere di E la regione caotica diviene dominante, come mostrano il riquadro (c) della figura 2.7, relativo a $E = 0.1666$, e il riquadro (d), ove è riportata una stima della misura relativa della regione ordinata in funzione di E.

La fenomenologia, nel suo complesso, è molto simile a quella vista per il pendolo forzato, e per la mappa standard, nel paragrafo 1.6.1 del primo capitolo. Anche qui, si potrebbe vedere, la regione caotica è contraddistinta dalla presenza di divergenza esponenziale delle traiettorie vicine, più precisamente dal fatto che l'esponente di Ljapunov $\chi_{\max}$ in tale regione è positivo.

2.8 I principi variazionali della meccanica

La via che abbiamo seguito fino ad ora per studiare le leggi del moto di un sistema di punti materiali si potrebbe chiamare "via differenziale", nel senso che abbiamo assunto, a suo fondamento, l'equazione differenziale di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, e da essa abbiamo dedotto, ancora nella forma di equazioni differenziali, le leggi generali del moto di un sistema meccanico (equazioni di Lagrange). L'idea centrale, sottostante tutta la trattazione che abbiamo sin qui svolta, è che le traiettorie vere,

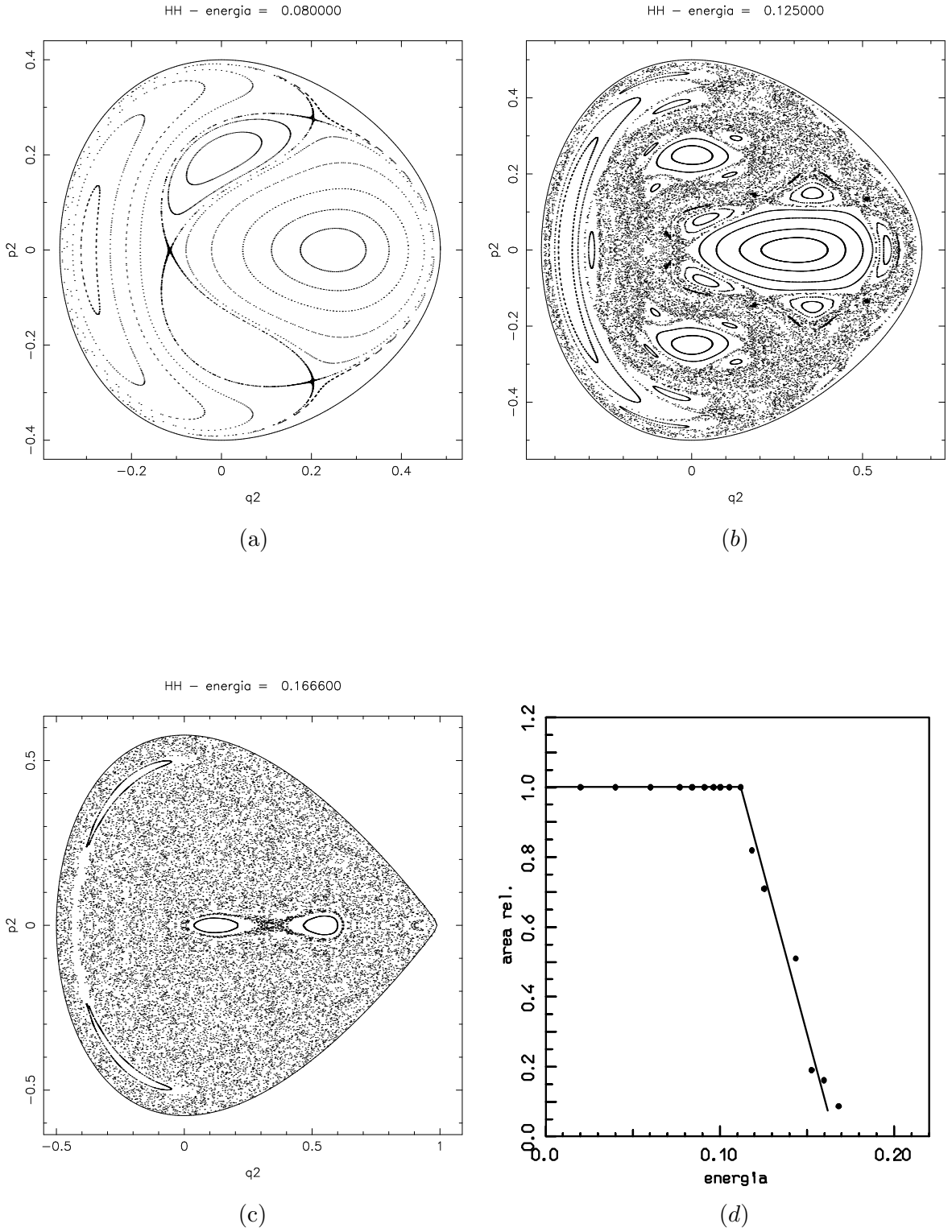

Figura 2.7: *La sezione di Poincaré per il modello di Hénon e Heiles, per* $E = 0.08$ *(a),* $E = 0.125$ *(b),* $E = 0.1666$ *(c); una stima della misura relative della regione ordinata (d).*

o naturali, di un sistema meccanico sono, tra tutte quelle a priori pensabili, quelle che soddisfano, punto per punto, una certa relazione differenziale caratteristica del sistema.

In questo paragrafo vedremo una via diversa, anche se di fatto equivalente, per formulare le leggi generali della meccanica, in cui la traiettoria vera si distingue, tra tutte quelle a priori pensabili, per una proprietà globale, integrale, nello stesso senso in cui la retta si distingue, tra tutte le curve del piano, come la più breve tra due punti assegnati, o la traiettoria di un raggio luminoso in un mezzo a indice di rifrazione variabile si distingue (principio di Fermat) per il fatto che minimizza il tempo di percorrenza tra due punti assegnati.

Questa nuova via, più geometrica, si può chiamare "via variazionale," in quanto fa riferimento a quel settore dell'analisi chiamato calcolo delle variazioni; punto di arrivo sono i cosiddetti *principi variazionali* della meccanica, che portano il nome di "principi" proprio perchè da essi, assunti come principi primi, si può dedurre l'intera meccanica. Un ulteriore motivo di interesse della formulazione variazionale è anche il fatto che essa è particolarmente adatta per passare dalla meccanica classica alle teorie relativistiche, ove gli aspetti globali e geometrici sono determinanti. Non è azzardato affermare che la formulazione variazionale di un qualunque problema è, almeno come linguaggio, la più generale possibile, e spesso anche la più profonda.

I primi tre paragrafi sono dedicati a una breve introduzione al calcolo variazionale, che non si suppone noto, utile a inquadrare i principi variazionali della meccanica nel contesto matematico più generale del calcolo delle variazioni. *Il procedimento che qui seguiremo sarà a volte soltanto intuitivo, e non rigoroso quanto la materia richiederebbe;* per una trattazione più estesa e più rigorosa si rinvia ai testi di analisi.

2.8.1 Funzionali

Il problema elementare da cui ha origine il calcolo delle variazioni è la ricerca dei massimi e dei minimi, più in generale dei punti di stazionarietà, per funzioni reali di una o più variabili reali. Come è ben noto, per una qualsiasi funzione regolare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la condizione perché $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sia punto di stazionarietà di F è che si annulli in $\mathbf{x}$ il differenziale di F, ovvero che risulti $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Si potrebbero ricordare altri problemi variazionali per funzioni definite in $\mathbb{R}^n$ (o in un suo sottoinsieme aperto U), come ad esempio la ricerca dei massimi e minimi condizionati. Il vero e proprio calcolo delle variazioni comincia tuttavia quando l'insieme di definizione di F non è $\mathbb{R}^n$, nè alcun altro spazio finito-dimensionale, ma uno spazio di funzioni. Consideriamo un insieme U di funzioni, ad esempio l'insieme $U_{a,b}$ delle funzioni reali (regolari) definite nell'intervallo $[a, b]$.

Definizione 14 *Si dice funzionale definito nel dominio U una legge o applicazione F che ad ogni funzione $u \in U$ associ un numero reale.*

Una notazione comune per i funzionali è $F[u]$. Semplici esempi di funzionali definiti in $U_{a,b}$ sono la media

$$F[u] = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x) \mathrm{d}x \ , \tag{2.8.1}$$

una qualsiasi norma come la norma euclidea o la sup–norma, rispettivamente

$$F[u] = \Big(\int_a^b u^2(x) \mathrm{d}x \Big)^{1/2} \ , \qquad F[u] = \max_{x \in [a,b]} |u(x)| \ , \tag{2.8.2}$$

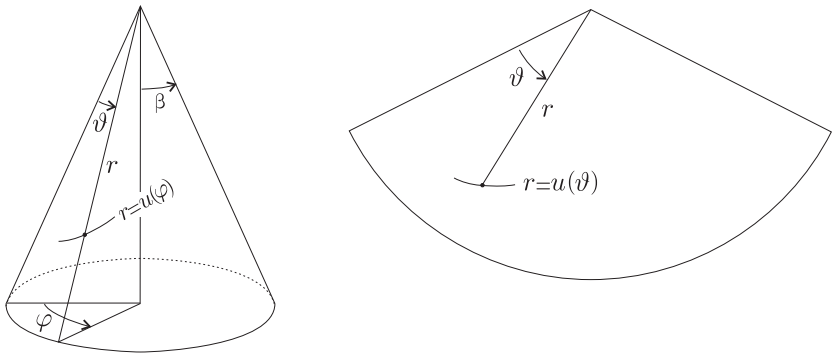

Figura 2.8: *Una curva sul cono rappresentata in due modi diversi.*

oppure il valore di u, o della sua derivata u', in un punto fissato $\bar{x}$,

$$F[u] = u(\bar{x}) \ , \qquad F[u] = u'(\bar{x}) \ . \tag{2.8.3}$$

Si osservi che nella nozione di funzionale la funzione u prende il posto dell'n–pla $(x_1, \ldots, x_n)$, mentre la variabile continua $x \in [a, b]$, ad argomento di u, prende il posto dell'indice discreto $i = 1, \ldots, n$ con cui si etichettano gli argomenti della funzione F.

Supponiamo ora che U, come avviene ad esempio per l'insieme $U_{a,b}$ sopra introdotto, sia uno spazio vettoriale lineare (all'interno del quale cioè ha senso sommare funzioni o moltiplicarle per numeri reali).

Definizione 15 *Un funzionale F su U si dice lineare se per ogni $u_1, u_2 \in U$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ risulta $F[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 F[u_1] + c_2 F[u_2]$.*

La media e gli esempi in (2.8.3) sono lineari, gli esempi in (2.8.2) evidentemente non lo sono.

Un funzionale di notevole interesse in geometria e in meccanica è quello che dà la lunghezza di una curva. Nel caso più semplice, se consideriamo l'insieme di tutte le curve del piano cartesiano xy della forma $y = u(x)$ per $a \le x \le b$, allora il funzionale lunghezza, definito in $U_{a,b}$, è

$$F[u] = \int_a^b \sqrt{1 + u'^{\,2}(x)} \, \mathrm{d}x \ ; \tag{2.8.4}$$

se invece, ad esempio per studiare curve che girano attorno all'origine, usiamo le coordinate polari r e ϑ e scriviamo la curva nella forma $r = u(\vartheta)$, $\vartheta_0 \le \vartheta \le \vartheta_1$, il funzionale lunghezza, definito in $U_{\vartheta_0,\vartheta_1}$, si scrive, come è immediato verificare,

$$F[u] = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{u^2(\vartheta) + u'^2(\vartheta)} \, \mathrm{d}\vartheta \ .$$

Altre espressioni si trovano con altri sistemi di coordinate, o per superfici non piane.

Esercizio 37 *Per un cono di semi-apertura β assegnata si usino come coordinate di un punto P sulla superficie la distanza r dal vertice lungo una direttrice e l'angolo φ tra il semipiano uscente dall'asse del cono, passante per P, e un semipiano fissato ancora uscente dall'asse del cono (coordinate polari sferiche, con colatitudine fissata). Si scriva il funzionale che dà la lunghezza di una curva*

di equazione $r = u(\varphi)$, tra φ_0 e φ_1 assegnati. [Risposta: $F[u] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} [u^2(\varphi)\sin^2\beta + u'^2(\varphi)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\varphi)$]. *Si riscriva poi il funzionale, usando questa volta le coordinate polari r, ϑ dello sviluppo piano del cono* [Risposta: se $r = u(\vartheta)$, allora $F[u] = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} [u^2(\vartheta) + u'^2(\vartheta)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\vartheta$, come per le curve del piano in coordinate polari.]

Un classico problema è quello di trovare, per ciascuna superficie, le *geodetiche,* cioè le linee più brevi (più precisamente, di lunghezza stazionaria: si veda oltre) tra due punti fissati qualsiasi della superficie; sono le linee dello spago teso sulla superficie, e anche (si dimostra) le traiettorie del moto per inerzia di un punto sulla superficie.

Un problema importante in meccanica e in ottica è il calcolo del tempo di percorrenza di una traiettoria γ assegnata da parte di un punto materiale, o di un raggio luminoso, la cui velocità dipenda in maniera nota dalla posizione: restringendoci per semplicità a moti piani, e a traiettorie rappresentabili come grafico di una funzione $y = u(x)$ tra due ascisse fissate a e b, il tempo di percorrenza è dato da

$$T[u] = \int_\gamma \frac{ds}{v} = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + u'^2(x)}}{v(x, u(x))}\, \mathrm{d}x \ ,$$

ove $v(x, y)$ è il modulo della velocità in (x, y). In ottica la funzione v è data direttamente dal rapporto $c/n(x, y)$, ove c è la velocità della luce nel vuoto e n l'indice di rifrazione del mezzo, cosicché

$$T[u] = \frac{1}{c} \int_a^b n(x, u(x)) \sqrt{1 + u'^2(x)} \mathrm{d}x \ ; \tag{2.8.5}$$

il *principio di Fermat* assicura che le traiettorie effettive sono, tra tutte quelle a priori possibili che passano per due punti assegnati, quelle per cui $T[u]$ è minimo (più in generale stazionario, si veda oltre). Per il caso di un punto materiale che percorra una traiettoria assegnata, in assenza di forze esterne v è costante, e il calcolo di T si riporta a quello della lunghezza di una curva. Più in generale, se il sistema è conservativo e $V(x, y)$ è la sua energia potenziale, la funzione $v(x, y)$ dipende dall'energia E del moto:

$$v(x, y) = \sqrt{\tfrac{2}{m}(E - V(x, y))} \ .$$

Ad esempio, per un punto materiale P che scenda in un piano verticale lungo una curva $y = u(x)$ passante per l'origine, partendo dall'origine con velocità nulla ($E = 0$), risulta $v(x, y) = \sqrt{2gy}$ (si è scelto l'asse y verticale discendente), e dunque si ha

$$T[u] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1 + u'^2(x)}{u(x)}}\, \mathrm{d}x \ . \tag{2.8.6}$$

Uno dei problemi classici della meccanica è la determinazione della curva passante per l'origine e per un punto assegnato A del piano, tale che il tempo di discesa di P dall'origine a A sia il minimo possibile (la *brachistocrona*, ovvero la curva "dal tempo più breve", dal greco $\beta\rho\alpha\chi\acute{\upsilon}\varsigma$ = breve, $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$ = tempo).

Si potrebbero considerare funzionali dipendenti esplicitamente da derivate di u di ordine superiore al primo (per esempio il funzionale che dà la convessità massima di una funzione), ma non essendo importanti per i principi variazionali della meccanica cui questa introduzione è rivolta, non ce ne occuperemo, restringendo così la nostra attenzione ai soli funzionali $F[u]$ che dipendono

esplicitamente da u stessa e dalla sua derivata prima u', oltre che dalla variabile indipendente x, come nell'esempio (2.8.6).

La nozione di funzionale si estende naturalmente al caso di dipendenza da due o più funzioni: ad esempio, il prodotto scalare

$$F[u,v] \;=\; \int_a^b u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

è un funzionale che dipende da due funzioni u e v (ed è lineare in entrambe, o bilineare); la lunghezza di una curva dello spazio tridimensionale euclideo, definita dalle equazioni parametriche $x = u(t)$, $y = v(t)$, $z = w(t)$, $a \le t \le b$, è il funzionale

$$F[u,v,w] = \int_a^b \left[u'^2(t) + v'^2(t) + w'^2(t)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \ .$$

2.8.2 Variazione di un funzionale

La nozione di variazione di un funzionale cui faremo riferimento è l'analogo della nozione di derivata direzionale per le funzioni di un numero finito di variabili, che brevemente ricordiamo.[24]

Sia F una funzione regolare di n variabili reali, e $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ un punto interno al suo dominio di definizione $U \subset \mathbb{R}^n$ (le variabili indipendenti sono qui indicate con u_i anzichè con x_i, perchè risulti più immediata l'analogia con i funzionali). Fissata arbitrariamente una n–pla $\delta\mathbf{u} = (\delta u_1, \ldots, \delta u_n) \in \mathbb{R}^n$, consideriamo i valori della funzione F nei punti variati $\mathbf{u} + \alpha\delta\mathbf{u}$, per α reale in un intorno dell'origine (si osservi che per α piccolo il punto variato appartiene certamente a U). La derivata direzionale (o variazione) δF della funzione F, nel punto $\mathbf{u}$ e relativa al vettore (o alla variazione) $\delta\mathbf{u}$, è allora definita da

$$\delta F(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F(\mathbf{u} + \alpha\delta\mathbf{u})\Big|_{\alpha=0} \ ;$$

non appena F è regolare, δF è lineare in $\delta\mathbf{u}$, come si vede eseguendo la derivata:

$$\delta F(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_i}(\mathbf{u})\, \delta u_i \ .$$

Facendo riferimento alla derivata direzionale, possiamo dire che F è stazionaria in $\mathbf{u}$, se e solo se δF si annulla in $\mathbf{u}$ per ogni scelta della variazione $\delta\mathbf{u}$.

Consideriamo ora un funzionale F; sia U il suo insieme di definizione, che ancora supponiamo sia uno spazio lineare; il caso da avere in mente è l'insieme $U_{a,b}$ considerato sopra. Sia u un "punto" (una funzione cioè) interno a U. Fissata arbitrariamente una variazione δu, anch'essa una funzione appartenente a U, consideriamo la famiglia a un parametro di *funzioni variate*

$$u(x) + \alpha\delta u(x) \ ,$$

con α reale in un intorno dell'origine. In analogia con il caso finito-dimensionale, si dà la seguente definizione:

[24] La nozione di derivata direzionale, si sa, è povera e talora insufficiente a descrivere il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto assegnato, per studiare il quale non si può prescinere dall'introduzione del differenziale. Esempi su cui riflettere sono $F(x,y) = xy/(y - x^2)$, o anche $F(x,y) = x^3y/[(y - x^2)^2 + y^2]$, con in entrambi i casi $F(0,0) = 0$. Nel primo caso F è regolare su *tutte* le rette per l'origine, ma come funzione di due variabili non è nemmeno continua nell'origine; nel secondo caso la funzione ristretta a una *qualsiasi* retta per l'origine è stazionaria nell'origine, ma non è stazionaria come funzione di due variabili. Patologie come queste tuttavia spariscono per funzioni differenziabili.

Definizione 16 *Si dice variazione del funzionale F in u relativa alla variazione δu, e si denota $\delta F[u, \delta u]$, il funzionale*

$$\delta F[u, \delta u] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F[u + \alpha \delta u]\Big|_{\alpha=0} ;$$

se $\delta F[u, \delta u]$ esiste per ogni δu ed è lineare in δu, F si dice "differenziabile secondo Gateaux" in u.

E' importante osservare, a sostegno della definizione, che $F[u + \alpha\delta u]$, per ogni scelta di u e δu, è una funzione ordinaria della variabile reale α (ben definita in un intorno dello zero): ovvero anche per i funzionali, come sopra nell'esempio delle funzioni di più variabili, ci si riduce all'ordinaria nozione di derivata per funzioni di una sola variabile.

- Procedendo in modo più intuitivo, si potrebbe fare a meno del parametro α, e pensare alla variazione δu come "piccola". E' allora spontaneo definire la variazione δF del funzionale, corrispondente alla variazione δu di u, come la parte lineare in δu dell'incremento $\Delta F = F[u + \delta u] - F[u]$; si pensi a uno sviluppo di Taylor arrestato al termine lineare, nel quale si trascurano termini di ordine superiore al primo in δu (o nelle sue derivate, che come si vedrà compaiono naturalmente nel calcolo di δF). La derivata direzionale — si rifletta sul caso finito dimensionale — è proprio una procedura semplice per definire in modo preciso la separazione della parte lineare dai "termini di ordine superiore" (che contengono α a un ordine superiore al primo, e dunque si annullano quando, dopo aver eseguito la derivata, si pone $\alpha = 0$). Queste considerazioni intuitive trovano formalizzazione in una nozione più profonda di derivata di un funzionale, detta *derivata di Fréchet*, che trasporta ai funzionali la nozione di differenziale di una funzione anziché quella di derivata direzionale. Non ci addentriamo in questa più complessa nozione, non necessaria ai nostri fini. E' comunque un utile esercizio vedere, in tutti gli esempi che seguono, che il procedimento intuitivo e la definizione precisa conducono al medesimo risultato.

Qualche esempio servirà a chiarire la nozione di variazione di un funzionale. Se $F[u]$ è la media (2.8.1), allora si ha

$$F[u + \alpha\delta u] = \frac{1}{b-a}\int_a^b (u(x) + \alpha\delta u(x))\mathrm{d}x \ , \qquad \delta F[u, \delta u] = \frac{1}{b-a}\int_a^b \delta u(x)\mathrm{d}x$$

(poiché F è lineare, si ha che δF dipende solo dalla variazione δu e non da u; per la stessa ragione non è stato necessario porre $\alpha = 0$ per calcolare δF). Per $F[u] = \int_a^b u^2(x)\mathrm{d}x$ risulta invece

$$\begin{aligned} \delta F[u, \delta u] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_a^b [u(x) + \alpha\delta u(x)]^2\mathrm{d}x\Big|_{\alpha=0} = \int_a^b 2[u(x) + \alpha\delta u(x)]\delta u(x)\mathrm{d}x\Big|_{\alpha=0} \\ &= 2\int_a^b u(x)\delta u(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

(ora δF dipende anche dal "punto" u in cui la variazione è calcolata).

Consideriamo ora funzionali come la lunghezza di una curva (2.8.4), o il tempo di percorrenza (2.8.5), (2.8.6), in cui interviene esplicitamente la derivata u' di u; più in generale consideriamo il caso alquanto significativo di funzionali $U_{a,b} \to \mathbb{R}$ della forma

$$F[u] = \int_a^b L(u(x), u'(x), x)\mathrm{d}x \ , \tag{2.8.7}$$

ove $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una funzione (regolare) assegnata delle tre variabili reali u, u' e x. Così, per il funzionale (2.8.4) si ha $L(u, u', x) = (1 + u'^2)^{1/2}$ (L dipende di fatto solo da u'); per il funzionale (2.8.6) si ha $L(u, u', x) = (2g)^{-1/2}[(1 + u'^2)/u]^{1/2}$.

Il calcolo della variazione del generico funzionale (2.8.7) non è difficile: si ha

$$F[u + \alpha\delta u] = \int_a^b L(u + \alpha\delta u, u' + \alpha\delta u', x)\,\mathrm{d}x \ ,$$

ove $\delta u'$ denota la derivata rispetto a x di δu; applicando la definizione si trova allora

$$\begin{aligned} \delta F[u, \delta u] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_a^b L\big(u(x) + \alpha\delta u(x), u'(x) + \alpha\delta u'(x), x\big)\,\mathrm{d}x \,\Big|_{\alpha=0} \\ &= \int_a^b \Big[\frac{\partial L}{\partial u}(u(x), u'(x), x)\,\delta u(x) + \frac{\partial L}{\partial u'}(u(x), u'(x), x)\,\delta u'(x)\Big]\,\mathrm{d}x \ . \end{aligned}$$

Con una integrazione per parti si può poi eliminare $\delta u'$ e concludere con la seguente

Proposizione 36 *La variazione del funzionale (2.8.7) è*

$$\delta F[u, \delta u] = \frac{\partial L}{\partial u'}\delta u\Big]_a^b - \int_a^b \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\Big)\,\delta u\,\mathrm{d}x \ .$$

(per dare leggibilità all'espressione si sono omessi gli argomenti di L e l'argomento x di u; li si scriva esplicitamente).

In molti casi, problemi sensati richiedono che si prendano in considerazione funzioni u a estremi fissati, cioè funzioni tali che $u(a) = u_a$, $u(b) = u_b$, con u_a, u_b assegnati; corrispondentemente ci si restringe a variazioni nulle agli estremi, $\delta u(a) = \delta u(b) = 0$. Se denotiamo

$$U_{a,b}^{A,B} = \big\{u \in U_{a,b}; u(a) = A, u(b) = B\big\} \ ,$$

allora $u \in U_{a,b}^{u_a,u_b}$ e $\delta u \in U_{a,b}^{0,0}$. Problemi come quelli posti sopra di ricerca di una goedetica, o della brachistocrona, *tra due punti assegnati,* richiedono evidentemente questo tipo di restrizione. Per variazioni nulle agli estremi si ha chiaramente

$$\delta F = -\int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)\delta u(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{2.8.8}$$

Esercizio 38 *Si scriva la variazione del funzionale esprimente la lunghezza di una curva del piano in coordinate cartesiane,* $F[u] = \int_a^b [1 + u'^2(x)]^{1/2}\mathrm{d}x$.

2.8.3 Stazionarietà di un funzionale ed equazione di Eulero-Lagrange

E' spontanea la seguente definizione, nella quale restringiamo l'attenzione a funzionali della forma (2.8.7) definiti in un dominio a estremi fissati $U_{a,b}^{u_a,u_b}$, con conseguente restrizione della variazione a $U_{a,b}^{0,0}$, ovvero $\delta u(a) = \delta u(b) = 0$.

Definizione 17 *Il funzionale F della forma (2.8.7) su $U_{a,b}^{u_a,u_b}$ si dice stazionario in u, ovvero u si dice punto di stazionarietà di F, se risulta $\delta F[u, \delta u] = 0$ comunque si prenda la variazione $\delta u \in U_{a,b}^{0,0}$.*

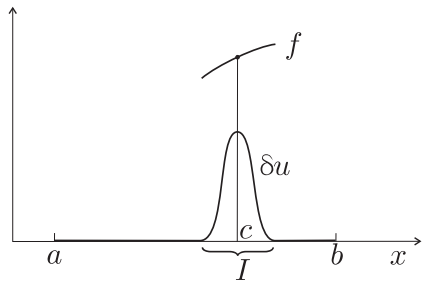

Figura 2.9: *Per la dimostrazione della proposizione 37.*

Si ha allora la seguente facile ma basilare

Proposizione 37 *Sia dato un funzionale della forma (2.8.7) su* $U_{a,b}^{u_a,u_b}$. *Condizione necessaria e sufficiente perché la funzione* $u \in U_{a,b}^{u_a,u_b}$ *sia punto di stazionarietà di* F, *è che essa soddisfi l'equazione differenziale*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \ .$$

Tale equazione è detta *equazione di Eulero–Lagrange* associata al funzionale F.

Dimostrazione. In virtù dell'espressione (2.8.8) per δF, si vede innanzititto banalmente che se l'equazione di Eulero–Lagrange è soddisfatta, allora δF si annulla per ogni δu. Viceversa, supposto F stazionario in u, mostriamo che la quantità

$$f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}$$

(per ogni scelta di $u(x)$ dentro a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}$, si osservi, f è una funzione della x) è identicamente nulla per $x \in [a,b]$. Infatti, supponiamo per assurdo che sia $f \neq 0$ in un qualche punto $c \in [a,b]$. Allora, per continuità, esisterebbe un intorno I di c (intorno destro o sinistro, se $c = a$ o $c = b$) in cui f sarebbe di segno costante, ad esempio positivo; scegliendo dunque una variazione δu particolare, con $\delta u(x) = 0$ per $x \notin I$, $\delta u(x) > 0$ in I, e regolare (se $I = (x_0, x_1)$, una scelta possibile è $\delta u(x) = (x - x_0)^3(x_1 - x)^3$ dentro a I), si ottiene, integrando, $\delta F > 0$, contro l'ipotesi $\delta F[u, \delta u] = 0$ per ogni δu (si veda la figura 2.9). Pertanto f è identicamente nulla in $[a,b]$.[25] □

La stazionarietà di $F = \int_a^b L(u(x), u'(x), x)\mathrm{d}x$ per variazioni δu arbitrarie, purchè nulle agli estremi, si vede così essere equivalente a un'equazione differenziale per il "punto" di stazionarietà u, e precisamente all'equazione di Eulero–Lagrange relativa alla funzione $L(u, u', x)$, con assegnati dati agli estremi $u(a)$, $u(b)$.[26]

[25] Abbiamo qui generalizzato al caso di "indice" x continuo la proprietà, ovvia nel caso di indice i discreto, per cui se $\sum_i f_i g_i$ si annulla per ogni n–pla $(g_1, \ldots, g_n)$, allora $f_i = 0$ per ogni i. Nel caso discreto la maniera più ovvia di dimostrare la proprietà è di prendere n–ple $(g_1, \ldots, g_n)$ della forma $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, filtrando così le singole componenti f_i e mostrando che una per una si annullano. Qui con x continuo, pur non potendo prendere δu diverso da zero in un solo punto, abbiamo fatto sostanzialmente la stessa cosa.

[26] Il problema che si pone in quest'ambito, tuttavia, non è il classico problema di Cauchy ai valori iniziali, che si avrebbe se fossero imposte le costanti $u(a)$ e $u'(a)$, ma il problema, detto di Sturm–Liouville, in cui sono assegnati due dati di posizione agli estremi. Il numero di dati è lo stesso. Diversamente dal problema di Cauchy, tuttavia, il problema di Sturm–Liouville non ammette sempre soluzione, né in generale la soluzione è unica.

Ad esempio, se il funzionale F rappresenta la lunghezza di una curva nel piano, allora si ha

$$L(u, u', x) = \sqrt{1 + u'^{\,2}} \ , \tag{2.8.9}$$

e l'equazione di Lagrange si scrive

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{u'}{\sqrt{1 + u'^{\,2}}} = 0 \ ;$$

esplicitando si ottiene $u''(1 + u'^{\,2})^{-3/2} = 0$, e dunque $u'' = 0$. L'equazione è risolta dalle rette. Non è sorprendente, ma è una dimostrazione che le rette sono le geodetiche del piano, ovvero che le due nozioni elementari di retta — la curva a pendenza costante (formulazione differenziale) e lo spago teso (formulazione variazionale) — coincidono.

- Data la lagrangiana (2.8.9), senza neanche scrivere la sua equazione di Eulero–Lagrange, possiamo osservare che u non compare esplicitamente in L, pertanto il "momento coniugato" $p = \frac{\partial L}{\partial u'}$ si deve conservare (cioè deve essere costante in x). Si trova subito $p = u'/\sqrt{1 + u'^{\,2}}$, e se ne deduce immediatamente che u' stessa è costante, che è un altro modo di identificare le rette. Ancora: L non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente x; ma allora $E(u, u') = u' \frac{\partial L}{\partial u'} - L$ deve essere costante (benché il suo significato non possa certo essere quello di energia). Si trova $E = -1/\sqrt{1 + u'^{\,2}}$, che ancora una volta conduce a u' costante.

Esercizio 39 *Si mostri che le rette sono geodetiche del piano, usando le coordinate polari piane* (r, ϑ) *e ponendo* $r = u(\vartheta)$. [Risposta: l'equazione di Eulero–Lagrange prende la forma $uu'' - 2u'^2 - u^2 = 0$, ed è risolta dalla funzione che esprime le rette in coordinate polari, $r = u(\vartheta) = a/\sin(\vartheta - \varphi)$, ove $a > 0$ è la distanza della retta dall'origine, e φ la sua inclinazione rispetto all'asse polare).

Esercizio 40 *Si dimostri che le geodetiche del cilindro e del cono appaiono come rette nello sviluppo piano delle superfici. Si trovi la condizione sull'angolo di apertura del cono perché una geodetica possa avere punti doppi (cioè perchè un laccio, fermato in un sol punto, possa restare teso sulla superficie di un cono senza sfilarsi via dalla punta).* [Suggerimento: si pensi allo sviluppo piano del cono, ottenuto tagliando la superficie lungo la direttrice passante per il punto doppio.]

Esercizio 41 *Si verifichi che gli archi di cerchio massimo sono geodetiche della superficie sferica* (è sufficiente verificarlo per l'equatore, o per un meridiano).

Esercizio 42 *Si determini l'equazione della brachistocrona, verificando anche che essa è risolta dalla cicloide.* [Si veda, per la soluzione, l'annesso Eserciziario, ove si studia anche un'altra proprietà interessante della cicloide: un punto vincolato ad una cicloide e soggetto alla gravità ("pendolo cicloidale"), a differenza del comune pendolo circolare, risulta essere *esattamente* isocrono.]

Senza difficoltà si generalizza quanto visto sopra al caso in cui il funzionale F dipenda da una n–pla di funzioni $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, con $u_h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h = 1, \ldots, n$, anzichè da una sola. Precisamente, presa $L : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$, consideriamo funzionali della forma

$$F[\mathbf{u}] = \int_a^b L(\mathbf{u}(x), \dot{\mathbf{u}}(x), x) \mathrm{d}t \ ; \tag{2.8.10}$$

con banale generalizzazione di quanto visto sopra, presa un'arbitraria variazione $\delta\mathbf{u} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e posto per definizione

$$\delta F[\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F[\mathbf{u} + \alpha\delta\mathbf{u}]\Big|_{\alpha=0}$$

(ci si rifà sempre alla derivata direzionale), si trova subito

$$\delta F[u,\delta u] = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial u'_h}\delta u_h\Big]_a^b - \int_a^b \sum_{h=1}^{n} \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u'_h} - \frac{\partial L}{\partial u_h}\Big)\delta u_h \mathrm{d}x \ ;$$

restringendosi a funzioni a estremi fissati e corrispondentemente a variazioni nulle agli estremi segue

$$\delta F[u,\delta u] = -\int_a^b \sum_{h=1}^{n} \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u'_h} - \frac{\partial L}{\partial u_h}\Big)\delta u_h \mathrm{d}x \ .$$

Trasportando in modo ovvio la nozione di stazionarietà di un funzionale, la proposizione 37 si generalizza allora in

Proposizione 37' *Condizione necessaria e sufficiente perché il funzionale (2.8.10) sia stazionario in* $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$*, con la restrizione di variazioni nulle agli estremi, è che* $u_1, \ldots, u_n$ *soddisfino le equazioni di Eulero–Lagrange*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u'_h} - \frac{\partial L}{\partial u_h} = 0 \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ .$$

Dimostrazione. Procedendo come per la proposizione 37, si dimostra che ciascuna delle n funzioni $f_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial u'_i} - \frac{\partial L}{\partial u_i}$ deve essere nulla. Per mostrare che f_i è nulla si prende $\delta u_j = 0$ per $j \neq i$ e δu_i come nella proposizione 37. □

2.8.4 Il principio di Hamilton

Il principio di Hamilton — il più semplice dei principi variazionali della meccanica — altro non è che la trasposizione di quanto visto sopra alla meccanica Lagrangiana, senza alcuna modifica oltre al linguaggio.

Sia dato un sistema lagrangiano a n gradi di libertà, con lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$; per ogni movimento[27] $\mathbf{q}(t)$ tra due istanti fissati t_0, t_1 denotiamo con $S[\mathbf{q}]$ il funzionale

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)\mathrm{d}t \ ;$$

S è chiamato *integrale di Hamilton,* o anche *azione hamiltoniana.* Traducendo nel linguaggio della meccanica quanto già imparato, possiamo dire innanzitutto che la variazione del funzionale, avendo già imposto la restrizione di variazioni $\delta\mathbf{q}(t)$ nulle agli estremi, è

$$\delta S[\mathbf{q}, \delta\mathbf{q}] = -\int_{t_0}^{t_1} \Big[\sum_{h=1}^{n} \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h}\Big)\delta q_h\Big]\mathrm{d}t \ ;$$

inoltre, che vale la seguente proposizione, nota come *principio di Hamilton:*

[27] Con piccolo abuso di linguaggio stiamo denotando il movimento (una funzione di t) con lo stesso simbolo della variabile $\mathbf{q}$ nello spazio delle configurazioni; l'improprietà è utile perché alleggerisce la notazione, ma si faccia attenzione a non confondere.

Proposizione 38 *Il movimento* $\mathbf{q}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, *rende stazionario il funzionale di azione* S, *con la restrizione di variazioni* $\delta\mathbf{q}(t)$ *nulle agli estremi, se e solo se esso è un moto naturale, ovvero soddisfa le equazioni di Lagrange*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ .$$

Il principio di Hamilton rappresenta dunque la formulazione variazionale delle equazioni di Lagrange.

E' interessante vedere come dal principio di Hamilton si deducano immediatamente, e in modo naturale, le due proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange discusse nel paragrafo 2.4.6. Consideriamo innanzitutto la proprietà di invarianza per cambiamenti di coordinate; ricordiamo che dato un cambiamento di coordinate (un diffeomorfismo) $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, t)$, si definisce $\tilde{L}$ per sostituzione di variabili, ovvero si pone

$$\tilde{L}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) = L(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, t), \dot{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t), t) \ ;$$

allora per movimenti $\mathbf{q}(t)$, $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ corrispondenti risulta evidentemente, istante per istante,

$$\tilde{L}(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t), t) = L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \ ,$$

e dunque

$$\int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t), t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)\mathrm{d}t \ .$$

Perciò il primo integrale è stazionario se e solo se lo è l'altro. Poichè, come si è visto, la stazionarietà degli integrali è poi equivalente alle rispettive equazioni di Lagrange, si conclude che le equazioni di Lagrange nelle nuove variabili sono soddisfatte se e solo se esse sono soddisfatte nelle vecchie variabili.

Altrettanto immediata è la verifica dell'invarianza di *gauge.* Infatti, posto

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)\mathrm{d}t \ , \qquad S'[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \Big[L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) + L_0(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)\Big]\mathrm{d}t \ ,$$

con $L_0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$, si ha con evidenza

$$S'[\mathbf{q}] = S[\mathbf{q}] + F(\mathbf{q}(t_1), t_1) - F(\mathbf{q}(t_0), t_0) \ ,$$

e dunque, per estremi fissati (si applichi la definizione di variazione) $\delta S' = \delta S$; la conclusione è immediata.

APPENDICI

A Esempi di vincoli anolonomi

Un semplice esempio di vincolo non olonomo è lo "sci che non derapa". Uno sci che si muova liberamente sul piano x, y è individuato da tre coordinate: le coordinate x, y di un suo punto, che possiamo convenire sia il punto P al centro dell'attacco, e l'angolo φ che lo sci forma con una direzione prefissata, ad esempio l'asse x (figura 2.10). Dicendo che lo sci "non derapa", intendiamo dire che la velocità $\mathbf{v} = \dot{x}\,\mathbf{e}_x + \dot{y}\,\mathbf{e}_y$ di P è necessariamente parallela allo sci, cioè al versore $\mathbf{e} = \cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\varphi\,\mathbf{e}_y$, cosicché si ha $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$, ovvero in forma differenziale

$$\sin\varphi \mathrm{d}x - \cos\varphi \mathrm{d}y = 0 \ .$$

Confrontando con la generica forma differenziale nelle tre variabili x, y, φ

$$f_x(x,y,\varphi)\mathrm{d}x + f_y(x,y,\varphi)\mathrm{d}y + f_\varphi(x,y,\varphi)\mathrm{d}\varphi \ = \ 0 \ ,$$

si vede che si ha

$$f_x = \sin\varphi \ , \qquad f_y = -\cos\varphi \ , \qquad f_\varphi = 0 \ .$$

E' facile verificare che le relazioni di chiusura non sono soddisfatte, comunque si prenda il "fattore integrante" λ: posto infatti

$$g_x = \lambda(x,y,\varphi) f_x \ , \qquad g_y = \lambda(x,y,\varphi) f_y \ , \qquad g_\varphi = \lambda(x,y,\varphi) f_\varphi \ ,$$

si ha comunque $g_\varphi = 0$ e dunque le relazioni di di chiusura $\frac{\partial g_x}{\partial \varphi} = \frac{\partial g_\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial g_y}{\partial \varphi} = \frac{\partial g_\varphi}{\partial y}$, conducono al sistema

$$\lambda\cos\varphi + \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\sin\varphi = 0 \ , \qquad -\lambda\sin\varphi + \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\varphi = 0 \ ,$$

omogeneo, risolto solo da $\lambda = 0$.

In questo esempio abbiamo eseguito, per esercizio, la trattazione analitica dettagliata. Che il vincolo non sia olonomo lo si vede però *a priori,* in modo immediato: infatti, presa comunque una configurazione (x, y, φ), è chiaro che da essa si può raggiungere qualunque altra configurazione (x', y', φ') compiendo soltanto spostamenti conformi al vincolo: basta ad esempio ruotare lo sci attorno a P facendolo puntare su (x', y'), poi raggiungere (x', y') con velocità parallela alla direzione dello sci, infine ruotarlo ancora fino a raggiungere l'orientazione φ' desiderata. Ciò esclude che possa esistere una limitazione alle configurazioni raggiungibili a partire da una condizione assegnata, espressa da una legge intera $F(x, y, \varphi) = 0$.

Esercizio 43 (Il monociclo) *Si dimostri che il vincolo di puro rotolamento per una ruota sul piano non è olonomo (si supponga ortogonale al piano la giacitura della ruota).* [Suggerimento: si individui la configurazione della ruota con le quattro coordinate x, y, φ e ϑ, ove x, y sono le coordinate

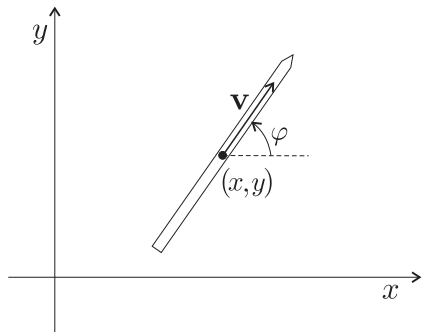

Figura 2.10: *Un vincolo anolonomo: lo "sci che non derapa".*

del mozzo della ruota, φ è l'angolo formato dal piano della ruota con l'asse x, e ϑ è l'angolo formato da un particolare raggio con la verticale. Il vincolo che il punto di contatto con il suolo abbia velocità nulla si traduce nelle due relazioni $\dot{x} + R\dot{\vartheta}\cos\varphi = 0$ e $\dot{y} + R\dot{\vartheta}\sin\varphi = 0$, ove intervengono le velocità. Non è difficile dimostrare, procedendo come per lo sci, che queste relazioni non sono compatibili con nessuna relazione intera; come sopra, si può procedere per via analitica, oppure verificare direttamente che a partire da qualunque configurazione si può raggiungere qualunque altra configurazione, compiendo movimenti conformi ai vincoli.]

B Equazioni cardinali, idealità del vincolo e equazioni di Lagrange per un corpo rigido

La condizione di idealità di un vincolo per un sistema di N punti materiali si scrive, facendo riferimento alle velocità virtuali $\mathbf{u}_i$,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Phi}_i \cdot \mathbf{u}_i = 0 \ ; \tag{B.1}$$

le $\mathbf{u}_i$, ricordiamo, sono arbitrarie velocità compatibili con il vincolo (slegate dalle velocità che effettivamente suscitano le reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_i$).

D'altra parte, il vincolo stesso di rigidità implica che per qualunque moto compatibile con il vincolo esista in ogni istante un vettore $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$, tale che

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P_i - O) \ , \tag{B.2}$$

ove O è un qualunque fissato punto solidale con il corpo: per esempio uno dei punti P_i, ma non necessariamente. *Al variare di $\mathbf{u}_O$ e $\boldsymbol{\omega}$, si trovano tutte le possibili scelte delle velocit'a $\mathbf{u}_i$ compatibili con il vincolo di rigidità.* Per la giustificazione di queste affermazioni, che prenderebbe troppo spazio, si rinvia a un qualunque testo classico di Meccanica Razionale.

Da queste premesse si deduce facilmente che

Proposizione 39 *L'idealità del vincolo è equivalente alla coppia di equazioni*

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Phi}_i = 0 \ , \qquad \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \times \mathbf{\Phi}_i = 0 \ . \tag{B.3}$$

Dimostrazione. Sostituendo nella (B.1) l'espressione (B.2) di $\mathbf{u}_i$, e ciclando i vettori nel prodotto vettoriale misto, si trova

$$\mathbf{u}_0 \cdot \sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Phi}_i + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \times \mathbf{\Phi}_i = 0 \ .$$

Per l'arbitrarietà di $\mathbf{u}_O$ e di $\boldsymbol{\omega}$, la conclusione è immediata. □

A loro volta, le (B.3) esprimono il fatto che la risultante e il momento risultante delle forze interne al sistema sono nulli, e dunque queste relazioni sono equivalenti alle equazioni cardinali (se esse sono soddisfatte valgono le equazioni cardinali, e viceversa). Se ne conclude che *l'idealità del vincolo di rigidità è equivalente alle equazioni cardinali.*

Infine, come si è visto nel paragrafo 2.4.1, l'ipotesi di idealità del vincolo, per un qualunque sistema olonomo, implica che siano soddisfatte le equazioni di Lagrange: pertanto, *per un corpo rigido, le equazioni cardinali implicano le equazioni di Lagrange, e di conseguenza determinano univocamente il moto.* Ricordiamo che in generale, per un sistema non rigido, le equazioni cardinali sono soddisfatte lungo ogni moto, e dunque sono implicate dalle equazioni di Lagrange, ma non lo determinano. Si vede così che *per i corpi rigidi, le equazioni cardinali e le equazioni di Lagrange sono equivalenti.* Ciò implica in particolare l'indipendenza delle sei equazioni scalari corrispondenti alle equazioni cardinali.

C Stabilizzazione magnetica

Mostriamo qui che l'aggiunta di un opportuno campo magnetico può rendere stabile una configurazione di equilibrio altrimenti instabile.

Consideriamo una carica e libera di muoversi in un piano, soggetta a una forza conservativa $\mathbf{F} = kr\mathbf{e}_r$, ove al solito $r^2 = x^2 + y^2$ (repulsore armonico piano). Il sistema è descritto dalla lagrangiana

$$L_0(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V_0(r) \ , \qquad V_0(r) = -\frac{1}{2}kr^2 \ .$$

Con evidenza l'origine è configurazione di equilibrio instabile per ogni $k \geq 0$ (per $k = 0$ si ha la consueta instabilità della particella libera).

L'aggiunta di un campo magnetico ortogonale al piano, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, con la corrispondente forza di Lorentz che in queste condizioni si scrive

$$\mathbf{F} = eB\,\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \ ,$$

può rendere stabile l'origine. Ciò è evidente innanzitutto per $k = 0$: in tal caso infatti il moto si sa essere circolare uniforme su un circolo passante per il punto iniziale (x_0, y_0), tangente alla velocità iniziale, di raggio pari al raggio di Larmor

$$R = \frac{mv}{|eB|} \ , \qquad \text{ove} \quad v = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} \ ,$$

percorso con velocità (in modulo) costante; si veda la figura 2.11. Si vede allora che per ogni $B \neq 0$, se (x_0, y_0) è sufficientemente vicino all'origine e v è sufficientemente piccola, la carica resta arbitrariamente vicina all'origine (e la velocità resta prossima a zero); perciò l'origine è punto di equilibrio stabile. (Naturalmente per $k = 0$ l'origine è un punto qualsiasi del piano: ovvero in assenza di forze attive, ma in presenza di campo magnetico, tutti i punti del piano sono configurazioni di equilibrio stabile per la carica.)

Per $k > 0$ si dimostra che l'origine è stabile se il campo magnetico è sufficientemente forte, precisamente se

$$B^2 > 4\,\frac{km}{e^2}\ . \tag{C.1}$$

Un modo di procedere è quello di scrivere le equazioni del moto, che sono lineari e quindi si risolvono, constatando la stabilità. Un modo più brillante, che non richiede di risolvere le equazioni del moto e anzi non richiede alcun calcolo, è questo: alla forza di Lorentz corrisponde il potenziale dipendente dalla velocità

$$V_1 = \frac{1}{2} e\, \mathbf{B} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$$

(con ovvio significato dei simboli); la lagrangiana è corrrispondentemente

$$L = K - V_0 - V_1\ .$$

Posto

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{e\mathbf{B}}{2m}\ ,$$

aggiungendo e togliendo a L la quantità $\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ si ottiene

$$L = K - W_0 - V_c - V_1\ ,$$

con

$$W_0(r) = V_0(r) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\ , \qquad V_c = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\ , \qquad V_1 = m\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}\ .$$

Formalmente questa lagrangiana è quella che si ha in un sistema rotante con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, partendo da un sistema inerziale con energia potenziale $W_0(r)$. I termini V_c e V_1 pertanto spariscono se, formalmente, "si torna indietro al sistema inerziale", ovvero nella realtà si passa a un sistema rotante con velocità angolare $-\boldsymbol{\omega}$. In questo sistema l'energia potenziale è W_0, e si vede bene (teorema di Lagrange–Dirichlet) che se la (C.1) è soddisfatta l'origine è punto di equilibrio stabile. La stabilità poi non muta passando da un sistema all'altro: r e v piccoli vanno in r e v piccoli (r non cambia, v varia di quantità piccole con r). Per potenziali centrali repulsivi generici la (C.1) è sostituita dalla più generale

$$\frac{e^2 B^2}{4m} > V_0''(0)\ .$$

Si comprende anche bene l'andamento qualitativo del moto: il potenziale W_0, come tutti i potenziali centrali, produce un moto "a rosetta", eccezionalmente un moto su una curva chiusa; nel sistema di partenza semplicemente si aggiunge una rotazione, e il moto resta a rosetta.

Si può anche vedere un aspetto curioso della stabilizzazione magnetica, che in un certo senso ne mette in evidenza la fragilità: mentre l'aggiunta di un piccolo attrito in genere migliora la stabilità (nel futuro), in questo caso la distrugge. L'idea è illustrata in figura 2.12: con un potenziale V_0 che abbia un massimo nell'origine, per ogni valore di E il moto sta necessariamente al di fuori dell'intersezione del piano di energia costante E con il grafico dell'energia potenziale, cioè del circolo tratteggiato in figura, e cio per il solo fatto che $E = K + V_0$ con $K \geq 0$ (V_1, si ricordi, non contribuisce all'energia). Ora un piccolo attrito inesorabilmente fa calare E, perciò il circolo si allarga e il moto si allontana dal punto di equilibrio. Fisicamente questo comportamento è facilmente intuibile: l'attrito frena, v diminuisce, e dunque la forza magnetica, e con essa il suo effetto stabilizzante, cala.

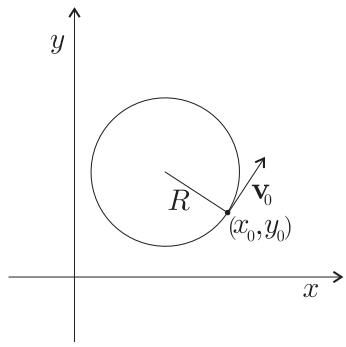

Figura 2.11: *Il moto di Larmor e la conseguente stabilità dell'equilibrio.*

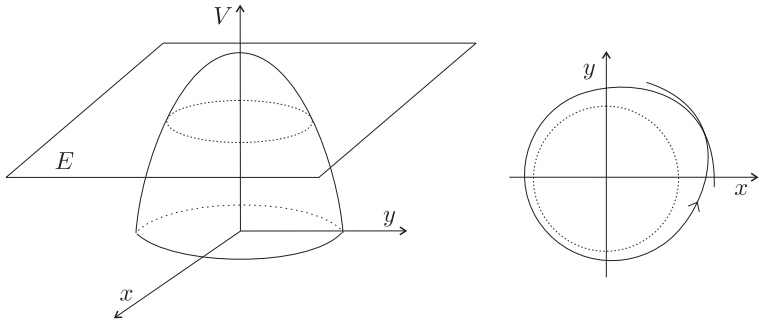

Figura 2.12: *Ad illustrazione della stabilizzazione magnetica.*

D La corda vibrante discreta

Consideriamo un sistema di n punti materiali di ugual massa m disposti su una retta come in figura 2.13; denotiamo con $x_1, \ldots, x_n$ le loro ascisse, e supponiamo che punti vicini interagiscano tra loro con un'energia potenziale a due corpi $\mathcal{V}(r)$ della tipica forma dei potenziali molecolari, schematicamente rappresentata in figura 2.14. La funzione $\mathcal{V}$ è supposta avere un minimo in a; uno sviluppo di Taylor dà allora

$$\mathcal{V}(r) = \text{cost} + \frac{k}{2}(r-a)^2 + \mathcal{O}((r-a)^3) \ ,$$

con $k = \mathcal{V}''(a)$. Supponiamo che la catena sia chiusa da pareti rigide in $x_0 = 0$ e in $x_{n+1} = \mathcal{L}$, prendendo per semplicità (ma non è veramente importante) $\mathcal{L} = (n+1)a$. In questo modo è assolutamente evidente che la configurazione

$$x_h^* = h\,a \ , \qquad h = 1, \ldots, n$$

corrisponde a un minimo (assoluto) dell'energia potenziale complessiva, e dunque è una configurazione di equilibrio stabile.

Prendiamo come coordinate lagrangiane gli scostamenti dall'equilibrio $q_h = x_h - x_h^*$. Con evidenza la lagrangiana del sistema è del tipo

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2}\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h^2 + \frac{k}{2}\sum_{h=0}^{n}(q_{h+1} - q_h)^2 + \mathcal{O}(\|\mathbf{q}\|^3) \ ,$$

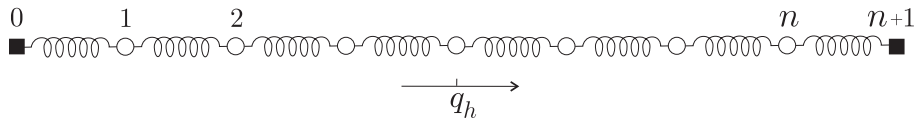

Figura 2.13: *La corda vibrante discreta con estremi fissi.*

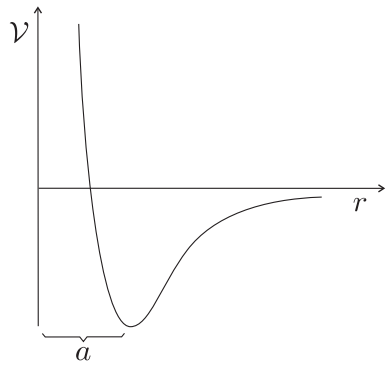

Figura 2.14: *Un tipico potenziale molecolare.*

ove si intende $q_0 = q_{n+1} = 0$. Troncando alla parte quadratica e dividendo tutto per m (cosa che non cambia le equazioni del moto) si ottiene infine la lagrangiana

$$L^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h^2 - \frac{\Omega^2}{2}\sum_{h=0}^{n}(q_{h+1} - q_h)^2 \ , \tag{D.1}$$

ove $\Omega^2 = k/m$; le corrispondenti equazioni del moto sono

$$\ddot{q}_h = \Omega^2(q_{h+1} - 2q_h + q_{h-1}) \ , \qquad h = 1, \ldots, n \ . \tag{D.2}$$

Esercizio 44 *Si verifichi che si ottiene una lagrangiana troncata della stessa forma senza bisogno di supporre che sia $x_{n+1} = (n+1)a$. Che cos'è in questo caso Ω^2?*

A. Analogia con la corda vibrante continua. Possiamo pensare di infittire la catena discreta di n masse legate da forze elastiche, che abbiamo ora considerato, mandando n all'infinito a fissata lunghezza complessiva $\mathcal{L}$, cosicché $a \to 0$ per $n \to \infty$. Manterremo invariata la densità μ, ponendo $m = \mu a$, e la costante elastica per unità di lunghezza κ, ponendo $k = \kappa/a$. Si ha allora

$$\Omega^2 = \frac{c^2}{a^2} \ , \qquad c^2 = \frac{\kappa}{\mu} \ .$$

La costante c, si osservi, ha le dimensioni fisiche di una velocità.

Sostituiamo ora all'indice intero h la corrispondente coordinata di equilibrio $x_h^* = ha$, eliminando tuttavia l'asterisco (non c'è pericolo di confusione con la coordinata x_h dell'h–esimo punto, simbolo che abbiamo abbandonato); useremo pertanto la notazione $q(x_h, t)$ al posto di $q_h(t)$. Con banale manipolazione algebrica, le equazioni del moto si riscrivono

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(x_h, t) = c^2 \, \frac{\frac{q(x_h+a,t)-q(x_h,t)}{a} - \frac{q(x_h,t)-q(x_h-a,t)}{a}}{a} \ ,$$

e procedendo euristicamente, nel limite $a \to 0$ (a fissato x, non h) si riconosce a secondo membro la derivata parziale seconda di q rispetto alla variabile x; si "deduce" in questo modo l'equazione delle onde sulla corda continua,

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \ . \tag{D.3}$$

La deduzione prescinde naturalmente dalle condizioni al bordo imposte, e ha senso con qualunque altra scelta delle condizioni al bordo, e anche per una corda infinita.

Se la corda è infinita, come è noto sono soluzioni della (D.2) tutte e sole le $q(x,t)$ del tipo

$$q(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \ ,$$

con f_1, f_2 funzioni qualsiasi; f_1 e f_2 rappresentano profili che si propagano, rispettivamente, con velocità c e $-c$.

Per la corda a estremi fissati in 0 e $\mathcal{L}$, le soluzioni si trovano ricordando che una base ortonormale per le funzioni dell'intervallo $[0, \mathcal{L}]$ nulle agli estremi è data dalle funzioni

$$u^{(j)}(x) = C \, \sin \frac{j\pi x}{\mathcal{L}} \ , \qquad C = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}}} \ ; \tag{D.4}$$

le funzioni sono ortonormali nel senso che risulta

$$\int_0^{\mathcal{L}} u^{(j)}(x) \, u^{(l)}(x) \, \mathrm{d}x = \delta_{jl} \ .$$

Ogni soluzione $q(x,t)$ deve allora potersi scrivere nella forma

$$q(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(t) u^{(j)}(x) \ .$$

Sostituendo nell'equazione del moto (D.3) si trova

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j) \sin \frac{j\pi x}{\mathcal{L}} = 0 \ ,$$

con

$$\omega_j = \frac{jc\pi}{\mathcal{L}} \ . \tag{D.5}$$

Ciascuno dei coefficienti della serie si deve annullare, e dunque le ampiezze ξ_j devono soddisfare le equazioni

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = 0 \ , \qquad 1 \le j < \infty \ ,$$

che sono quelle dell'oscillatore armonico. L'integrale generale della corda a estremi fissati si può così scrivere nella forma

$$q(x,t) = \sum_j A_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) \, u^{(j)}(x) \ .$$

E' interessante osservare che tutte le pulsazioni ω_j sono multiple della pulsazione fondamentale ω_1:

$$\omega_j = j \, \omega_1 \ .$$

B. I modi normali della catena discreta. Riprendiamo ora il caso discreto a n gradi di libertà, con lagrangiana (D.1) e equazioni del moto (D.2). Trattandosi di un problema a molti gradi di libertà, per trovare i modi normali di oscillazione non possiamo applicare il metodo generale, che richiederebbe la risoluzione di un'equazione algebrica di grado n. Procedendo tuttavia per analogia col caso continuo, non è difficile verificare che le quantità adatte a sostituire le (D.4) sono gli n vettori $\mathbf{u}^{(j)} = (u_1^{(j)}, \ldots, u_n^{(j)})$ definiti da

$$u_h^{(j)} = C \sin \frac{hj\pi}{n+1} \ , \qquad C = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \ .$$

Lemma 40 *Per ogni j e l, $1 \le j, l \le n$, risulta*

$$\mathbf{u}^{(j)} \cdot \mathbf{u}^{(l)} = \delta_{jl} \ .$$

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che risulta

$$\sum_{h=1}^{n} \sin \frac{hj\pi}{n+1} \sin \frac{hl\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2} \, \delta_{jl} \ . \tag{D.6}$$

Formule elementari di trigonometria danno per il primo membro l'espressione

$$\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n} \Big[\cos \frac{h(j-l)\pi}{n+1} - \cos \frac{h(j+l)\pi}{n+1} \Big] \ . \tag{D.7}$$

(a) Caso $j+l$ e $j-l$ dispari: in questo caso, posto $m = j+l$ oppure $j-l$, risulta

$$\cos \frac{hm\pi}{n+1} = -\cos \frac{(n+1-h)m\pi}{n+1} \ ,$$

perciò i termini si annullano a due a due (quello centrale con $h = (n+1)/2$, che esiste per n dispari, c'è una volta sola ma è nullo).
(b) Caso $j+l$ e $j-l$ pari: in questo caso conviene far partire le sommatorie nelle (D.6) e (D.7) da zero (si aggiunge uno zero). Definito m come sopra, e posto $m = 2r$, si ha evidentemente

$$\sum_{h=0}^{n} \cos \frac{hm\pi}{n+1} = \mathrm{Re} \sum_{h=0}^{n} e^{2\pi i h r/(n+1)} \ .$$

Ma per $r \neq 0$ la somma al secondo membro corre un numero intero di volte sulle radici dell'unità (corre una volta sulle radici $(n+1)$–esime dell'unità se r e $n+1$ sono primi tra loro, altrimenti, se hanno un divisore comune s, corre s volte sulle radici $\frac{n+1}{s}$–esime), pertanto è nulla. Per $m = 0$ la somma vale invece $n+1$. Poichè si ha $m = 0$ solo per il primo dei termini nella (D.7), quando $j = l$, la conclusione è immediata. □

A questo punto è spontaneo passare alle coordinate $\xi_1, \ldots, \xi_n$, che risulteranno essere le coordinate normali che disaccoppiano le equazioni del moto, ponendo

$$q_h = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, u_h^{(j)} = C \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, \sin \frac{hj\pi}{n+1} \ . \tag{D.8}$$

Inserendo questa espressione nell'equazione del moto (D.2) si trova

$$C\sum_{j=1}^{n}\ddot{\xi}_j \sin\frac{hj\pi}{n+1} = C\sum_{j=1}^{n}\xi_j\Big(\sin\frac{(h+1)j\pi}{n+1} - 2\sin\frac{hj\pi}{n+1} + \sin\frac{(h-1)j\pi}{n+1}\Big) ,$$

e poiché

$$\sin\frac{(h+1)j\pi}{n+1} + \sin\frac{(h-1)j\pi}{n+1} = 2\sin\frac{hj\pi}{n+1}\cos\frac{j\pi}{n+1} ,$$

segue per il secondo membro l'espressione

$$2C\sum_{j=1}^{n}\xi_j \sin\frac{hj\pi}{n+1}\Big(\cos\frac{j\pi}{n+1} - 1\Big) .$$

Si ha poi l'identità

$$\cos\frac{j\pi}{n+1} - 1 = -2\sin^2\frac{j\pi}{2(n+1)} ,$$

da cui si ottiene, per l'equazione del moto, l'espressione

$$\sum_{j=1}^{n}(\ddot{\xi}_j + \omega_j^2\xi_j)\, u_h^{(j)} = 0 , \qquad h = 1,\dots,n , \tag{D.9}$$

avendo posto

$$\omega_j = 2\Omega\sin\frac{j\pi}{2(n+1)} . \tag{D.10}$$

Dalla (D.9), che forse è più chiara nella notazione vettoriale $\sum_{j=1}^{n}(\ddot{\xi}_j + \omega_j^2\xi_j)\mathbf{u}^{(j)} = 0$, grazie all'indipendenza degli n vettori $\mathbf{u}^{(j)}$ (che per il lemma 40 sono anzi ortogonali), seguono per le singole ξ_j le equazioni dell'oscillatore armonico:

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2\xi_j = 0 , \qquad j = 1,\dots,n .$$

L'integrale generale del sistema è così

$$q_h(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j\cos(\omega_j t + \varphi_j)\,\sin\frac{hj\pi}{n+1} .$$

- E' interessante confrontare la (D.10) con la (D.5). Si vede bene che per ogni j fissato e n grande si ha

  $$\omega_j = j\omega_1 + \mathcal{O}((j/n)^3) ,$$

  e anche

  $$\omega_j = j\frac{\Omega\pi}{n+1} + \mathcal{O}((j/n)^3) = \frac{jc\pi}{\mathcal{L}} + \mathcal{O}((j/n)^3) ,$$

  perciò, come c'era da aspettarsi, al limite $n \to \infty$ le espressioni (D.10) e (D.5) coincidono.

- La (D.8) è con evidenza una trasformata di Fourier discreta; la si può anche scrivere in notazione vettoriale

  $$\mathbf{q} = U\boldsymbol{\xi} , \qquad U_{hj} = C\sin\frac{hj\pi}{n+1} .$$

  Grazie al lemma 40 e alla simmetria della matrice U, si vede facilmente che l'inversa di U è ancora U, ovvero la trasformazione è involutoria.

E La brachistocrona

Si è visto nel paragrafo 2.8.1 che un punto materiale che discenda dall'origine a un punto di ascissa b lungo una curva assegnata $y = u(x)$, impiega per questo un tempo

$$T[u] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b L(u(x), u'(x))\, \mathrm{d}x$$

ove

$$L(u, u') = \sqrt{\frac{1 + u'^{\,2}}{u}} \ ;$$

la curva che minimizza il funzionale T tra i due estremi assegnati $(0, 0)$ e (b, y_b) è stata detta *brachistocrona.*

Per trovare questa curva determiniamo innanzitutto l'equazione di Eulero–Lagrange associata al funzionale T. Dall'espressione di L si trova

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} &= -\frac{1}{2L}\frac{1 + u'^{\,2}}{u^2} = -\frac{L}{2u} \ , \qquad\qquad \frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{u'}{Lu} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u'} &= \frac{Luu'' - u'(Lu' + u\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x})}{L^2u^2} \ ; \end{aligned}$$

usando $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = u'\frac{\partial L}{\partial u} + u''\frac{\partial L}{\partial u'}$ si ottiene allora, dopo qualche semplificazione,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{u'' - \frac{1}{2}L^2u'^2}{L^3u^2} \ .$$

Se ne deduce per l'equazione di Eulero–Lagrange l'espressione

$$2uu'' + u'^{\,2} + 1 = 0 \ .$$

Si può ora verificare che l'equazione è risolta dalla *cicloide.* La cicloide è la curva piana descritta da un fissato punto del bordo di una ruota in moto di puro rotolamento su una guida rettilinea (figura 2.15a). E' facile darne una descrizione parametrica $x(\varphi)$, $y(\varphi)$, da cui la curva $y = u(x)$ resta implicitamente definita, precisamente (si guardi la figura)

$$x(\varphi) = a + r(\varphi - \sin\varphi) \ , \qquad y(\varphi) = r(1 - \cos\varphi) \ , \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \ ;$$

sarà poi da imporre $a = 0$, se si vuole che la curva passi per l'origine. Dalle equazioni parametriche si ricavano facilmente u' e u'' come funzioni di φ:

$$u' = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi}$$

(si osservi che $u' \to \infty$ per $\varphi \to 0, \pi$), e poi

$$u'' = \frac{\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\varphi}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}} = -\frac{1}{r(1 - \cos\varphi)^2} \ .$$

Si verifica allora senza difficoltà che $2uu'' + u'^{\,2} + 1$ si annulla identicamente in φ, ovvero la cicloide soddisfa l'equazione di Eulero–Lagrange. Nelle equazioni parametriche della cicloide, si osservi,

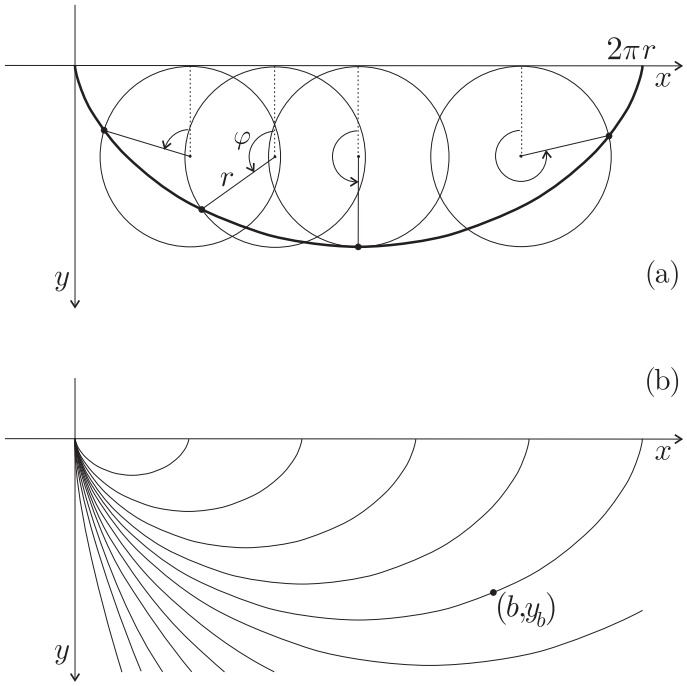

Figura 2.15: *La cicloide (a); una famiglia di cicloidi con diverso r, passanti per l'origine (b).*

compaiono due costanti arbitrarie, a e r, che restano fissate dalle condizioni imposte al bordo. Dal fatto che la curva passa per l'origine si deduce subito, come si è detto, $a = 0$; r resta invece fissato dall'imposizione che la curva passi per (b, y_b). E' facile vedere, tracciando una famiglia di cicloidi con $a = 0$ e diversi valori di r, che si trova sempre una soluzione per ogni $y_b \leq 0$ (figura 2.15b).

Questa che abbiamo fatto è una verifica, non una vera costruzione della soluzione a partire dall'equazione. Costruire la soluzione si può, ma conviene sfruttare il fatto che l'equazione, dal momento che L non dipende esplicitamente da x, conserva la quantità $E = u' \frac{\partial L}{\partial u'} - L$ (non interpretabile come energia, ma formalmente analoga), che a conti fatti si trova essere

$$E(x) = -\frac{1}{\sqrt{C(x)}} \ , \qquad \text{con} \quad C(x) = u(x)(1 + u'(x)^2) \ ;$$

C stessa è evidentemente costante per ogni soluzione u, e conviene utilizzarla al posto di E.[28] Per ogni scelta del valore c della costante, la scrittura $C(x) = c$ è un'equazione differenziale del primo ordine, precisamente $u(1 + u'^{\,2}) = c$, ovvero

$$u' = \pm\sqrt{\frac{c-u}{u}} \ .$$

[28]Si può verificare per esercizio che $C(x)$ è effettivamente costante: infatti si ha

$$C' = u'(1 + u'^{\,2}) + 2uu'u'' = u'(1 + u'^{\,2} + 2uu'') = 0 \ .$$

Procedendo per separazione di variabili si ottiene, ad esempio per il segno '+',

$$\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{u}{c-u}}\,\mathrm{d}u\ , \qquad x = a + \int_0^u \sqrt{\frac{v}{c-v}}\,\mathrm{d}v\ ;$$

l'integrazione dà

$$x(u) = a + c\arctan\sqrt{\frac{u}{c-u}} - \sqrt{u(c-u)}\ , \tag{E.1}$$

e per inversione si ottiene la soluzione cercata $u(x)$. L'inversione non si scrive esplicitamente, ma è spontanea l'introduzione del parametro

$$\vartheta = \arctan\sqrt{\frac{u}{c-u}}\ .$$

Segue infatti dalla definizione stessa di ϑ la relazione $(c-u)\tan^2\vartheta = u$, che dà

$$u = \frac{c\tan^2\vartheta}{1+\tan^2\vartheta} = c\sin^2\vartheta\ ;$$

dall'espressione (E.1) segue poi

$$x = a + c\vartheta - c\sqrt{\sin^2\vartheta(1-\sin^2\vartheta)} = a + c(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta)\ .$$

Passando a $\varphi = 2\vartheta$ si trova infine

$$x = a + \frac{c}{2}(\varphi - \sin\varphi)\ , \qquad u = \frac{c}{2}(1-\cos\varphi)\ ,$$

ovvero si ritrovano le equazioni parametriche della cicloide con $r = c/2$.

Il pendolo cicloidale

La cicloide gode di diverse proprietà geometriche e meccaniche interessanti. Una di queste è che il *pendolo cicloidale,* ovvero il problema di un punto materiale vincolato alla cicloide e soggetto alla gravità, è *esattamente* isocrono: il periodo delle oscillazioni (a differenza del comune pendolo circolare) è indipendente dall'ampiezza.

Rappresentiamo per comodità la cicloide con il punto inferiore nell'origine, figura 2.16a (la ruota rotola sulla retta $y = 2r$). Se s denota la lunghezza d'arco a partire dall'origine, allora la lagrangiana del pendolo cicloidale[29] è

$$L(s,\dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mgy(s)\ ,$$

con $y(s)$ da determinare. Per una curva qualsiasi, $y(s)$ non si saprebbe scrivere esplicitamente, ma per la cicloide invece si riesce e precisamente si trova

$$y(s) = \frac{s^2}{8r}\ . \tag{E.2}$$

Per vederlo, conviene scrivere le equazioni parametriche della cicloide facendo riferimento alle coordinate e all'angolo α nella figura. Si ha

$$x = r(\alpha + \sin\alpha)\ , \qquad y = r(1-\cos\alpha)\ ,$$

[29] Che nulla ha a che fare con la lagrangiana del problema di Eulero–Lagrange sopra considerata!

da cui segue

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = r\sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = \sqrt{2}\,r\sqrt{1+\cos\alpha}\,\mathrm{d}\alpha\ .$$

Ma $1+\cos\alpha = \sin^2\alpha/(1-\cos\alpha)$, perciò

$$\mathrm{d}s = \sqrt{2}\,r\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}\,\mathrm{d}\alpha = 2\sqrt{2}\,r\ \mathrm{d}(\sqrt{y/r}) = \mathrm{d}(\sqrt{8ry})\ ;$$

tenendo conto che $s=0$ per $y=0$, se ne deduce $s=\sqrt{8ry}$, che è la (E.2).

La conclusione è immediata: utilizzando la (E.2) la lagrangiana diviene

$$L(s,\dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{mg}{4r}\,s^2\ ,$$

ovvero quella di un oscillatore armonico di pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4r}}\ .$$

Il moto del pendolo cicloidale dunque è *esattamente* armonico. Una conseguenza curiosa è questa: qualunque sia la posizione da cui si lascia partire con velocità nulla un punto materiale vincolato alla cicloide, il tempo necessario a raggiungere l'origine è un quarto di periodo, ovvero esattamente $\frac{1}{2}\pi\omega = \pi\sqrt{r/g}$, indipendentemente dal punto di partenza. Così due punti materiali lasciati partire simultaneamente, con velocità nulla, da posizioni come quelle indicate in figura 2.16b, si scontreranno sempre nell'origine.

Un pendolo cicloidale si può evidentemente costruire con una guida più liscia possibile profilata a forma di cicloide. Ma c'è un sistema migliore, illustrato in figura 2.16c: si modifica la traiettoria di un pendolo facendo in modo che il filo che lo sorregge si appoggi a una parete profilata secondo una curva $\mathcal{C}_1$ opportuna. Un momento di riflessione mostra che per generare in questo modo una curva $\mathcal{C}_0$ — la cicloide o altro — si deve prendere come $\mathcal{C}_1$ il luogo dei centri di curvatura di $\mathcal{C}_0$; la curva $\mathcal{C}_1$ è detta *evoluta* di $\mathcal{C}_0$, e viceversa $\mathcal{C}_0$ è detta *evolvente* di $\mathcal{C}_1$ (nella situazione limite del cerchio con centro di curvatura costante l'evoluta degenera in un punto). Una proprietà curiosa della cicloide, che non dimostriamo (ma non sarebbe difficile), è che evolvente e evoluta coincidono: precisamente, se la parete su cui si appoggia il filo è profilata a cicloide, e il filo è lungo $4r$, si ottiene un'identica cicloide. Sfruttando questa proprietà non è difficile realizzare un pendolo cicloidale con pochissimo attrito.

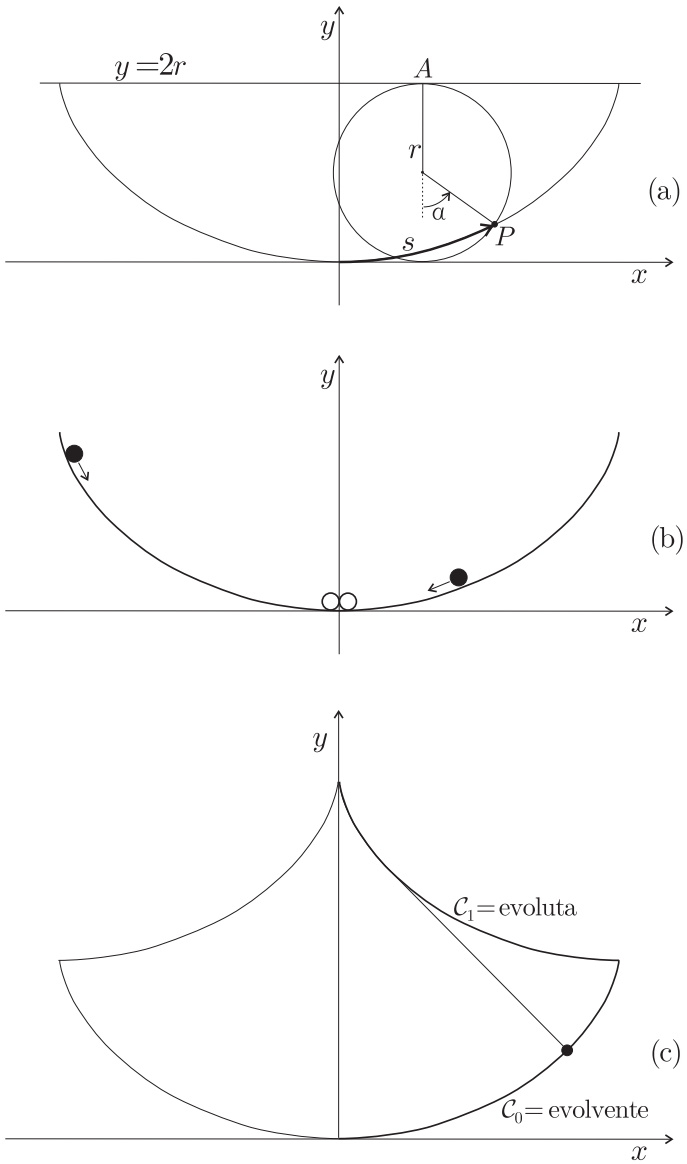

Figura 2.16: *Il pendolo cicloidale.*