Esercizio: Calcolare i momenti di inerzia di una lamina quadrata $OABC$ omogenea di lato a rispetto ad una terna (O, x, y, z). La lamina giace nel piano (O, x, y) con lati sovrapposti ai versori $\underline{i} = versOA$, $\underline{j} = versOC$

$$I_x = \mu \int_0^a \int_0^a y^2 dxdy = Ma^2/3, \quad I_y = Ma^2/3, \quad I_z = \frac{2Ma^2}{3}$$

I prodotti di inerzia sono

$$D = -\mu \int_0^a \int_0^a xydxdy = -Ma^2/4, \quad E = F = 0$$

Questa terna non e' principale di inerzia.

Abbiamo dimostrato che ogni terna che ha origine su uno degli assi centrali e assi paralleli a quelli centrali e' principale. Se prendiamo una terna (O', x', y', z') dove O' appartiene all'asse y, tale che $||OO'|| = a/2$ con gli assi x', y', z' paralleli a x, y, z, questa terna e' principale e infatti

$$D = -\mu \int_0^a \int_{-a/2}^{a/2} x'y'dx'dy' = 0$$

Esercizio: Determinare una terna principale per la lamina con origine nel vertice O e calcolare la matrice di inerzia rispetto a questa terna.

R. Una terna principale e' data da (O, ξ, η, ζ) dove ξ e' sovrapposto alla diagonale OB, η alla retta per O parallela a AC e ζ ortogonale al piano (ξ, η). La matrice di inerzia e' diagonale e i momenti di inerzia sono dati da

$$A = \frac{Ma^2}{12}, \quad B = \frac{7Ma^2}{12}, \quad C = \frac{2Ma^2}{3}$$

B si puo' calcolare usando il teorema di Huygens.

Esercizio: Determinare i momenti centrali di inerzia di un cilindro omogeneo retto di raggio di base R e altezza h.

R. Sia (G,x, y, z) la terna centrale di inerzia dove l'asse z e' sovrapposto all'asse del cilindro. Si ha

$$C = \frac{MR^2}{2}, \quad A = B = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12}$$