Esercitazione 8

(03.12.2012)

Esercizio 1

Discutere le soluzioni dell'oscillatore armonico smorzato

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \beta > 0,\, \omega > 0$$

Si noti come l'equazione del moto presentata in questa sede sia coincidente con quella studiata nell'esercizio 1 dell'esercitazione 1 (15.10.2012) qualora si ponga

$$\beta = \frac{h}{2m}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'equazione del secondo ordine può essere scritta come sistema lineare del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\beta y - \omega^2 x \end{cases}$$

ossia in forma compatta

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\Delta}, \qquad \Delta = \beta^2 - \omega^2$$

ed è quindi necessario distinguere tre casi

$$\begin{cases} \Delta > 0 & \text{con } \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\Delta} \\ \Delta = 0 & \text{con } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\beta \\ \Delta < 0 & \text{con } \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{-\Delta} \end{cases}$$

Corrispondono, nell'ordine, ai casi di

$$\begin{cases} \text{Smorzamento forte} \\ \text{Smorzamento critico} \\ \text{Smorzamento debole} \end{cases}$$

visti nell'esercizio 1 dell'esercitazione 1 (15.10.2012).

Caso 1: $\Delta > 0$

Gli autovalori sono reali e negativi. Sia $\mathbf{u}^{(j)}$ l'autovettore associato a λ_j. La matrice $\mathbf{A}$ ammette la base di autovettori $\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}\}$, con

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{\Delta} - \beta \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{\Delta} - \beta \end{Bmatrix}$$

e la soluzione generale si scrive

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}^{(1)} + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}^{(2)} \\ &= e^{-\beta t}\left(C_1 e^{\sqrt{\Delta}t}\begin{Bmatrix}1\\ \sqrt{\Delta}-\beta\end{Bmatrix} + C_2 e^{-\sqrt{\Delta}t}\begin{Bmatrix}1\\ -\sqrt{\Delta}-\beta\end{Bmatrix}\right)\end{aligned}$$

con C_j costanti da determinare imponendo le condizioni iniziali. Si ottiene quindi la legge oraria

$$x(t) = e^{-\beta t}\big(C_1 e^{\sqrt{\Delta}t} + C_2 e^{-\sqrt{\Delta}t}\big)$$

e la velocità

$$y(t) = \dot{x}(t) = e^{-\beta t}\Big[C_1(\sqrt{\Delta}-\beta)e^{\sqrt{\Delta}t} + C_2(-\sqrt{\Delta}-\beta)e^{-\sqrt{\Delta}t}\Big]$$

Caso 2: $\Delta = 0$

Gli autovalori sono reali, negativi e coincidenti (si ha cioè un autovalore λ con molteplicità algebrica $\nu = 2$). All' autovalore λ è associato l' unico autovettore

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{Bmatrix}1\\ -\beta\end{Bmatrix}$$

Per completare la base occorre determinare un autovettore *generalizzato* dalla

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\mathbf{g} = \mathbf{0}$$

ossia

$$\begin{bmatrix}\beta^2-\beta^2 & \beta-\beta\\ -\beta^3+\beta^3 & -\beta^2+\beta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}g_1\\ g_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{g} = \begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$$

Con la base $\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{g}\}$ è possibile scrivere la soluzione generale nella forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= C_1 e^{\lambda t}\mathbf{u}^{(1)} + C_2 e^{\lambda t}(\mathbf{I} + t(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}))\mathbf{g} \\ &= e^{-\beta t}\left(C_1\begin{Bmatrix}1\\ -\beta\end{Bmatrix} + C_2\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix} + C_2 t\begin{bmatrix}\beta & 1\\ -\beta^2 & -\beta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\right)\end{aligned}$$

Si ottiene quindi la legge oraria

$$x(t) = e^{-\beta t}\big(C_1 + C_2 + C_2 t(\beta+1)\big)$$

e la velocità

$$y(t) = \dot{x}(t) = e^{-\beta t}\Big[-C_1\beta + C_2 - C_2 t\beta(\beta+1)\Big]$$

Caso 3: $\Delta < 0$

Gli autovalori sono complessi coniugati. Gli autovettori associati

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\beta \end{Bmatrix} + i \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{-\Delta} \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{u}^{(2)} = \bar{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\beta \end{Bmatrix} - i \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{-\Delta} \end{Bmatrix}$$

si possono scrivere nella forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}, \qquad \mathbf{v} := \Re\mathbf{u}, \quad \mathbf{w} := \Im\mathbf{u}$$

Scelto quindi l'autovettore associato ad uno dei due autovalori, la soluzione generale si scrive

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = C_1 e^{-\beta t}\Big(\Re\mathbf{u}^{(1)} \cos\left(\sqrt{-\Delta}t\right) - \Im\mathbf{u}^{(1)} \sin\left(\sqrt{-\Delta}t\right)\Big) \\ + C_2 e^{-\beta t}\Big(\Im\mathbf{u}^{(1)} \cos\left(\sqrt{-\Delta}t\right) + \Re\mathbf{u}^{(1)} \sin\left(\sqrt{-\Delta}t\right)\Big) \end{aligned}$$

Si ricorda la **formula di Euler**

$$e^{ia} = cosa + i \sin a$$

da cui anche

$$\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$$

$$\sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$$

ossia

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = e^{-\beta t}\Bigg[C_1\Bigg(\begin{Bmatrix} 1 \\ -\beta \end{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{-\Delta}t\right) - \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{-\Delta} \end{Bmatrix} \sin\left(\sqrt{-\Delta}t\right)\Bigg) \\ + C_2\Bigg(\begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{-\Delta} \end{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{-\Delta}t\right) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -\beta \end{Bmatrix} \sin\left(\sqrt{-\Delta}t\right)\Bigg)\Bigg] \end{aligned}$$

Si ottiene quindi la legge oraria

$$x(t) = e^{-\beta t}\Big(C_1 \cos\left(\sqrt{-\Delta}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{-\Delta}t\right)\Big)$$

e la velocità

$$\begin{aligned} y(t) = \dot{x}(t) = e^{-\beta t}\Big[C_1\Big(-\beta \cos\left(\sqrt{-\Delta}t\right) - \sqrt{-\Delta} \sin\left(\sqrt{-\Delta}t\right)\Big) \\ + C_2\Big(\sqrt{-\Delta} \cos\left(\sqrt{-\Delta}t\right) - \beta \sin\left(\sqrt{-\Delta}t\right)\Big)\Big] \end{aligned}$$

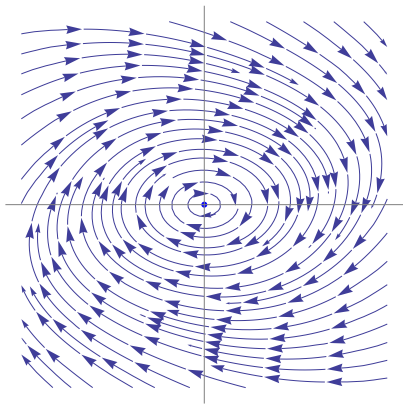
Stabilità

Gli autovalori ottenuti per l'oscillatore armonico smorzato mostrano che il sistema è sempre stabile, passando, nello specifico, dal caso di *nodo stabile* (per $\Delta > 0$) al caso di *fuoco stabile* (per $\Delta < 0$).

Esercizio 2

Studiare il carattere della posizione di equilibrio $\mathsf{E} = (0, 0)$ *del sistema dinamico*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 2x^3 \\ \dot{y} = -x - 3y^3 \end{cases} \tag{1}$$



Il sistema (1) si può scrivere come

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2x^3 \\ -3y^3 \end{Bmatrix}$$

In coordinate polari $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, la parte non lineare si riscrive nella forma

$$\begin{Bmatrix} -2x^3 \\ -3y^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\rho^3\cos^3\phi \\ -3\rho^3\sin^3\phi \end{Bmatrix}$$

e tende a zero più velocemente della norma di $\mathbf{x}$

$$\begin{Bmatrix} -2x^3/\rho \\ -3y^3/\rho \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\rho^2\cos^3\phi \\ -3\rho^2\sin^3\phi \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \text{per } \rho \to 0$$

Si osserva che la matrice del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ linearizzato nell'origine coincide con lo jacobiano calcolato nell'origine

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x} & \dfrac{\partial X_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial x} & \dfrac{\partial X_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -6x^2 & 2 \\ -1 & -9y^2 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$$

e quindi l'origine è un *centro* per il sistema linearizzato associato al sistema non-lineare (1). La linearizzazione non permette di determinare il carattere del punto $\mathsf{E} = (0,0)$, pertanto si valuta se è possibile definire nell'intorno dell'origine una funzione di Ljapunov. Ad esempio, la funzione

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$$

con $2a = b$, $a, b > 0$, ha un minimo stretto nell'origine e fornisce

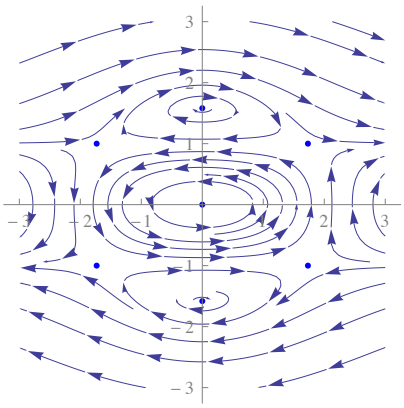
$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{W}} &= (2y - 2x^3)ax + (-x - 3y^3)by \\ &= (2a - b)xy - (2ax^4 + 3by^4) \end{aligned}$$

da cui, essendo $\dot{\mathrm{W}}$ definita negativa, si deduce che l'origine è asintoticamente stabile.

Esercizio 3

Studiare il carattere delle posizioni di equilibrio del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y^3 + 2x^2y - 10y \\ \dot{y} = 2x - 2xy^2 \end{cases} \tag{2}$$



Le posizioni di equilibrio si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 0 = 4y^3 + 2x^2y - 10y \\ 0 = 2x - 2xy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 4y^3 + 2x^2y - 10y \\ x = 0, y = \pm 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 0 = 4y^3 - 10y \\ x = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 0 = \pm 2x^2 \mp 6 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

e si ottengono le sette posizioni di equilibrio

$$\mathsf{E}_1 = (0,0), \quad \mathsf{E}_{2,3} = (0, \pm\sqrt{5/2}), \quad \mathsf{E}_{4,5} = (\pm\sqrt{3}, 1), \quad \mathsf{E}_{6,7} = (\pm\sqrt{3}, -1)$$

Lo jacobiano si scrive

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x} & \dfrac{\partial X_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial x} & \dfrac{\partial X_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4xy & 12y^2 + 2x^2 - 10 \\ 2 - 2y^2 & -4xy \end{bmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{J}(\mathsf{E}_1) = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}(\mathsf{E}_{2,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\mathsf{E}_{4,5}) = \begin{bmatrix} \pm 4\sqrt{3} & 8 \\ 0 & \mp 4\sqrt{3} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}(\mathsf{E}_{6,7}) = \begin{bmatrix} \mp 4\sqrt{3} & 8 \\ 0 & \pm 4\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Gli autovalori corrispondenti sono

$$\lambda_{1,2}(\mathsf{E}_1) = \pm 2i\sqrt{5}, \qquad \lambda_{1,2}(\mathsf{E}_{2,3}) = \pm 2i\sqrt{15}, \qquad \lambda_{1,2}(\mathsf{E}_{4,5,6,7}) = \pm 4\sqrt{3}$$

Le posizioni di equilibrio $\mathsf{E}_{4,5,6,7}$ avendo un autovalore con parte reale positiva sono instabili (in particolare sono *selle*), mentre il metodo della linearizzazione non permette di determinare il carattere delle posizioni di equilibrio $\mathsf{E}_{1,2,3}$, *centri* per il sistema linearizzato (i due autovalori sono complessi coniugati con parte reale nulla). Si cerca quindi un integrale primo, ad esempio ponendo

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = X_2, \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} = -X_1$$

in modo che sia soddisfatta la condizione $\dot{\mathrm{H}} = 0$ lungo ogni soluzione del sistema. Si ottiene

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = 2x - 2xy^2, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H} = x^2 - x^2y^2 + f(y)$$

e quindi

$$-2x^2y + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = -4y^3 - 2x^2y + 10y, \quad \Rightarrow \quad f(y) = -y^4 + 5y^2 + c$$

da cui

$$\mathrm{H} = x^2 - x^2y^2 - y^4 + 5y^2 + c$$

Poiché $\dot{\mathrm{H}} = 0$, i punti di equilibrio sono punti di stazionarietà per la funzione $\mathrm{H}(x, y)$, in cui la funzione stessa può attingere a un minimo o un massimo: nel primo caso risulta $\mathrm{H}(x, y)$ definita positiva nell'intorno del punto d'equilibrio, nel secondo caso è la funzione $-\mathrm{H}(x, y)$ ad essere definita positiva.
Si consideri dapprima il punto $\mathsf{E}_1 = (0, 0)$. Imponendo la condizione $\mathrm{H}(0, 0) = 0$ si ottiene $c = 0$, mentre dallo studio del determinante dei *minori* della matrice hessiana

$$\det H_{\mathrm{H}}(x, y) = \begin{vmatrix} 2 - 2y^2 & -4xy \\ -4xy & -12y^2 - 2x^2 + 10 \end{vmatrix}$$

valutata nel punto $\mathsf{E}_1 = (0, 0)$

$$\det H_{\mathrm{H}}(\mathsf{E}_1) = \begin{vmatrix} 2 > 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} > 0$$

si conclude che la funzione

$$\mathrm{W} = \mathrm{H} = x^2 - x^2y^2 - y^4 + 5y^2$$

ha un minimo in E_1 e che tale punto è stabile.
Per i punti $\mathsf{E}_{2,3} = (0, \pm\sqrt{5/2})$, procedendo come in precedenza, si ottiene $c = -25/4$ e

$$\det H_{\mathrm{H}}(\mathsf{E}_{2,3}) = \begin{vmatrix} -3 < 0 & 0 \\ 0 & -20 \end{vmatrix} > 0$$

La funzione

$$\mathrm{W} = -\mathrm{H} = -x^2 + x^2y^2 + y^4 - 5y^2 + \frac{25}{4}$$

è una funzione di Ljapunov per i punti $\mathsf{E}_{2,3}$, che sono dunque stabili.

Si ottiene infatti

$$\det H_{\mathrm{W}}(\mathsf{E}_{2,3}) = \begin{vmatrix} 3 > 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{vmatrix} > 0$$