Esercitazione 9

(10.12.2012)

Esercizio 1

Studiare il carattere delle posizioni di equilibrio del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu y + xy \\ \dot{y} = \mu x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \end{cases}, \qquad \mu \in \mathbb{R},\ \mu \neq 0 \tag{1}$$

Le posizioni di equilibrio si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 0 = -\mu y + xy \\ 0 = \mu x + \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0,\ x = \mu \\ 0 = \mu x + \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2) \end{cases}$$

da cui, dovendo essere

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = x\Big(\mu + \dfrac{x}{2}\Big) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = \mu \\ 0 = y^2 - 3\mu^2 \end{cases}$$

si ottengono le posizioni di equilibrio

$$\mathsf{E}_1 = (0,0), \quad \mathsf{E}_2 = (-2\mu, 0), \quad \mathsf{E}_{3,4} = (\mu, \pm\mu\sqrt{3})$$

La parte non lineare tende a zero più velocemente della norma $\mathbf{x}$, pertanto si può applicare il primo metodo di Ljapunov. Lo jacobiano si scrive

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x} & \dfrac{\partial X_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial x} & \dfrac{\partial X_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -\mu + x \\ \mu + x & -y \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathbf{J}(\mathsf{E}_1) = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}(\mathsf{E}_2) = \begin{bmatrix} 0 & -3\mu \\ -\mu & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\mathsf{E}_{3,4}) = \begin{bmatrix} \pm\mu\sqrt{3} & 0 \\ 2\mu & \mp\mu\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Gli autovalori corrispondenti sono

$$\lambda_{1,2}(\mathsf{E}_1) = \pm i\mu, \qquad \lambda_{1,2}(\mathsf{E}_2) = \pm\sqrt{3}\mu, \qquad \lambda_{1,2}(\mathsf{E}_{3,4}) = \pm\sqrt{3}\mu$$

Le posizioni di equilibrio $\mathsf{E}_{2,3,4}$ sono dunque instabili (in particolare sono *selle*), mentre il metodo non permette di determinare il carattere della posizione di equilibrio E_1, centro per il sistema linearizzato. Per indagare il carattere del punto E_1 si cerca un integrale primo, ad esempio ponendo

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = X_2, \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} = -X_1$$

in modo che sia soddisfatta la condizione $\dot{H} = 0$ lungo ogni soluzione del sistema. Si ottiene

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = \mu x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H} = \frac{\mu}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2 + f(y)$$

e quindi

$$-xy + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = \mu y - xy \quad \Rightarrow \quad f(y) = \frac{\mu}{2}y^2 + c$$

da cui

$$\mathrm{H} = \frac{\mu}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{\mu}{2}y^2 + c$$

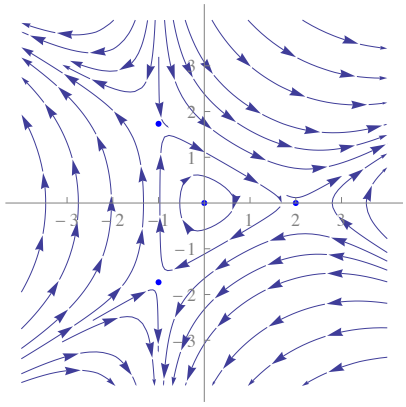
La condizione $\mathrm{H}(0,0) = 0$ impone $c = 0$. Poiché $\dot{\mathrm{H}} = 0$ rimane solo da studiare il segno di $\mathrm{H}(x,y)$. A tale scopo si valuta il segno del determinante dei *minori* della matrice hessiana

$$\det H_{\mathrm{H}}(x,y) = \begin{vmatrix} \mu + x & -y \\ -y & \mu - x \end{vmatrix}$$

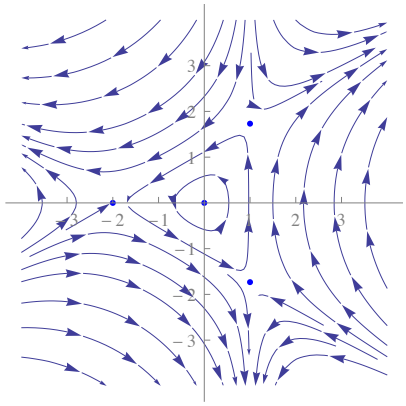
nel punto $\mathsf{E}_1 = (0,0)$

$$\det H_{\mathrm{H}}(\mathsf{E}_1) = \begin{vmatrix} \mu > 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{vmatrix} > 0$$

e quindi se $\mu > 0$, H è definita positiva e quindi è una funzione di Ljapunov e E_1 è stabile. Se invece $\mu < 0$, $\mathrm{W} = -\mathrm{H}$ è una funzione di Ljapunov e E_1 è ancora stabile.



$\mu < 0$



$\mu > 0$

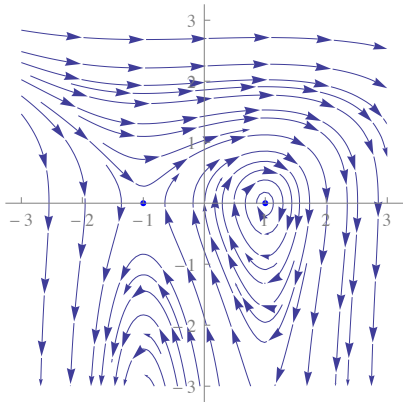
Esercizio 2

Studiare il carattere delle posizioni di equilibrio del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = ye^y \\ \dot{y} = 1 - x^2 \end{cases} \tag{2}$$

Le posizioni di equilibrio si ottengono immediatamente e sono $\mathsf{E}_{1,2} = (\pm 1, 0)$. La parte non lineare di $X_1 = ye^y$ può essere messa in evidenza espandendo in serie di punto iniziale $y = 0$ la funzione esponenziale

$$X_1 = ye^y = y\Big(1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)\Big)$$



in modo che il sistema possa scriversi

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (ye^y - y) = y + g_1(y) \\ \dot{y} = 1 - x^2 = 1 + g_2(x) \end{cases}$$

con

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} ye^y - y \\ -x^2 \end{Bmatrix} \to 0, \qquad \text{per } \|\mathbf{x}\| \to 0$$

Si consideri il primo metodo. Lo jacobiano si scrive

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x} & \dfrac{\partial X_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial x} & \dfrac{\partial X_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^y + ye^y \\ -2x & 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{J}(\mathsf{E}_{1,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mp 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e gli autovalori corrispondenti risultano

$$\lambda_{1,2}^2 = \mp 2, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2}(\mathsf{E}_1) = \pm i\sqrt{2}, \quad \lambda_{1,2}(\mathsf{E}_2) = \pm\sqrt{2}$$

La posizione $\mathsf{E}_2 = (-1, 0)$ è quindi instabile (*sella*), mentre sulla posizione $\mathsf{E}_1 = (1, 0)$ il metodo non dice nulla. Per indagare il carattere del punto E_1 si cerca un integrale primo, ad esempio ponendo

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = -X_2, \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} = X_1$$

in modo che sia soddisfatta la condizione $\dot{H} = 0$ lungo ogni soluzione del sistema. Si ottiene

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = -1 + x^2, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H} = -x + \frac{1}{3}x^3 + f(y)$$

e quindi

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = ye^y, \quad \Rightarrow \quad f(y) = ye^y - e^y + c$$

da cui

$$\mathrm{H} = -x + \frac{1}{3}x^3 + ye^y - e^y + c$$

La condizione $\mathrm{H}(1,0) = 0$ impone $c = 5/3$. Poiché $\dot{\mathrm{H}} = 0$ rimane solo da studiare il segno di $\mathrm{H}(x,y)$. A tale scopo si valuta il segno del determinante dei *minori* della matrice hessiana

$$\det H_{\mathrm{H}}(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & ye^y + e^y \end{vmatrix}$$

nel punto $\mathsf{E}_1 = (1, 0)$

$$\det H_{\mathrm{H}}(\mathsf{E}_1) = \begin{vmatrix} 2 > 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

e quindi H è una funzione di Ljapunov (è definita positiva) e E_1 è stabile.

Esercizio 3

Studiare il carattere delle posizioni di equilibrio del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha - x^2 + y) \\ \dot{y} = -y - x^2 \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Le posizioni di equilibrio si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 0 = x(\alpha - x^2 + y) \\ 0 = -y - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x(\alpha - 2x^2) \\ y = -x^2 \end{cases}$$

da cui

$$\mathsf{E}_1 = (0, 0)$$

e inoltre, se $\alpha > 0$

$$\mathsf{E}_{2,3} = (\pm\sqrt{\alpha/2}, -\alpha/2)$$

Si consideri il primo metodo. Lo jacobiano si scrive

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x} & \dfrac{\partial X_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial x} & \dfrac{\partial X_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 3x^2 + y & x \\ -2x & -1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{J}(\mathsf{E}_1) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}(\mathsf{E}_{2,3}) = \begin{bmatrix} -\alpha & \pm\sqrt{\alpha/2} \\ \mp 2\sqrt{\alpha/2} & -1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori corrispondenti alla posizione E_1 risultano

$$\lambda_1(\mathsf{E}_1) = \alpha, \quad \lambda_2(\mathsf{E}_1) = -1$$

e quindi la posizione E_1 è asintoticamente stabile per $\alpha < 0$ (quando non esistono $\mathsf{E}_{2,3}$), instabile per $\alpha > 0$ (quando esistono $\mathsf{E}_{2,3}$), mentre non si può dire nulla per $\alpha = 0$. Gli autovalori corrispondenti alle posizioni $\mathsf{E}_{2,3}$ risultano

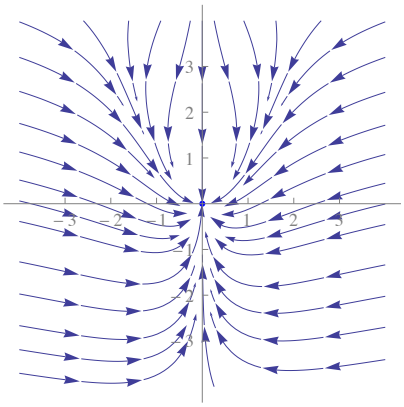
$$\lambda_{1,2}(\mathsf{E}_{2,3}) = \frac{-(\alpha + 1) \pm \sqrt{(\alpha + 1)^2 - 8\alpha}}{2}$$

e quindi, quando esistono ($\alpha > 0$), le posizioni $\mathsf{E}_{2,3}$ sono asintoticamente stabili. Rimane da valutare il carattere della posizione E_1 quando $\alpha = 0$. La ricerca di un integrale primo non è d'aiuto, infatti posto ad esempio

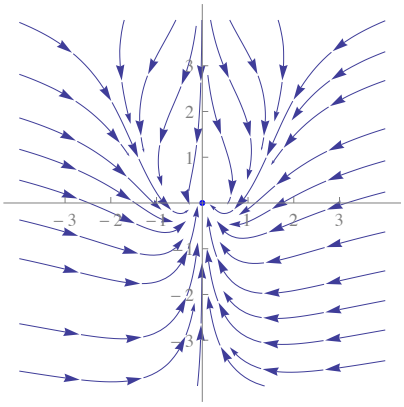
$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = -X_2 \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} = X_1$$

per $\alpha = 0$ si ottiene

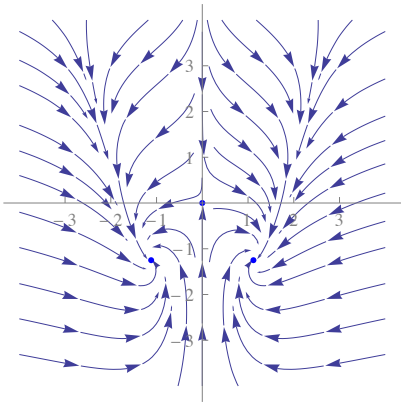
$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = y + x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H} = xy + \frac{1}{3}x^3 + f(y)$$



$\alpha < 0$



$\alpha = 0$



$\alpha > 0$

e quindi

$$x + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = -x^3 + xy$$

e non è possibile ottenere $f(y)$. Si cerca quindi una funzione di Ljapunov del tipo

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$$

Si otterrebbe infatti una $f(x, y)$ in luogo di una $f(y)$.

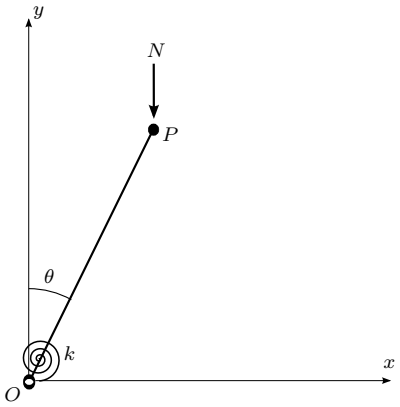
con $\mathrm{W}(0, 0) = 0$. Si ha

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{W}} &= ax(-x^3 + xy) + by(-y - x^2)\\ &= -ax^4 - by^2 + (a - b)x^2y\end{aligned}$$

e quindi, posto $a = b$, $a, b > 0$, W e $\dot{\mathrm{W}}$ risultano rispettivamente definita positiva e negativa in un intorno di E_1, che è quindi *asintoticamente* stabile.

Esercizio 4

In un piano verticale π si consideri un punto materiale P di massa m vincolato a mantenere costante la distanza R dall'origine O di π. Si scelga come coordinata lagrangiana l'angolo θ tra la direzione $\underline{OP}$ e la verticale e si consideri l'azione della coppia conservativa $\underline{M} = k\theta\underline{k}$, $k > 0$ e della forza costante $\underline{N} = -N\underline{j}$. Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare del modulo della forza applicata.



Il sistema è soggetto a vincoli olonomi, bilateri, fissi e perfetti e a forze conservative. L'energia potenziale si scrive

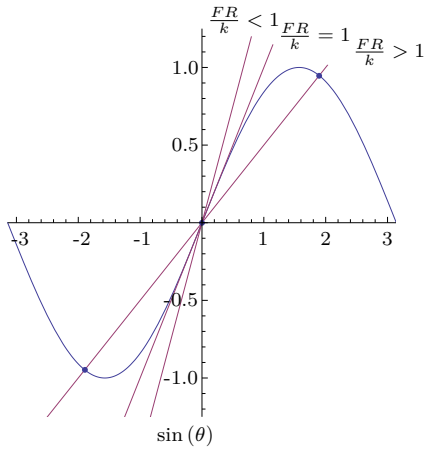
$$\mathrm{V}(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2 + FR\cos\theta$$

con $F = mg + N$. Le posizioni di equilibrio soddisfano la condizione

$$\frac{\mathrm{dV}(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = k\theta - FR\sin\theta = 0$$

cioé

$$k\theta = FR\sin\theta \tag{4}$$



È immediato verificare che per $k > FR$ (cioé quando $FR/k < 1$) si ha l'unica posizione di equilibrio $\theta = 0$, mentre per $k < FR$ (cioé quando $FR/k > 1$) si hanno, oltre alla posizione di equilibrio $\theta = 0$, altre due posizioni di equilibrio soluzione della (4) con $\theta \neq 0$. Il caso $FR = k$, ossia $F = F_\mathrm{c} = k/R$ rappresenta il caso *critico*.
Si ha inoltre

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{V}(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} = k - FR\cos\theta$$

e in particolare

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{V}(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\Big|_{\theta=0} = k - FR, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{V}(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\Big|_{F=\frac{k}{R}\frac{\theta}{\sin\theta}} = k\Big(1 - \frac{\theta}{\tan\theta}\Big)$$

Si può quindi concludere che la posizione di equilibrio $\theta = 0$ è stabile per $k > FR$ ossia quando non esistono le altre due posizioni di equilibrio. Quest' ultime, quando esistono, sono sempre stabili (per $\theta \in (-\pi, \pi]$). Nulla si può invece concludere sul carattere della posizione di equilibrio $\theta = 0$ in corrispondenza del caso critico $F_{\mathrm{c}} = k/R$, a meno di non considerare l' espansione in serie del potenziale

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\theta) &= \frac{1}{2}k\theta^2 + FR\Big(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + o(\theta^4)\Big) \\ &= \mathrm{cost} + \frac{1}{2}(k - FR)\theta^2 + \frac{FR}{24}\theta^4 + o(\theta^4) \end{aligned}$$

Per $F = F_{\mathrm{c}}$ il potenziale è definito positivo e l' equilibrio stabile. Essendo l' energia cinetica

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

la lagrangiana si scrive

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\theta^2 - FR\cos\theta$$

da cui l'equazione del moto

$$mR^2\ddot{\theta} + k\theta - FR\sin\theta = 0$$

Come sistema di equazioni differenziali del primo ordine, la precedente equazione del moto si scrive

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\dfrac{k}{mR^2}\theta + \dfrac{FR}{mR^2}\sin\theta \end{cases}$$

Il sistema linearizzato rispetto al punto di equilibrio $(0, 0)$ si ottiene immediatamente espandendo in serie

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\dfrac{k}{mR^2}\theta + \dfrac{FR}{mR^2}\Big(\theta - \dfrac{\theta^3}{6} + o(\theta^3)\Big) \end{cases}$$

e osservando che

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^2 \sin^3\phi = 0, \qquad \rho = \sqrt{\theta^2 + \omega^2}$$

Lo jacobiano nell' origine si scrive quindi

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{FR - k}{mR^2} & 0 \end{bmatrix}$$

da cui gli autovalori risultano

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{FR - k}{mR^2}}$$

e il primo metodo di Ljapunov fornisce informazioni unicamente nel caso in cui $k < FR$, per il quale si può concludere che l'origine è instabile. Tale circostanza non è casuale, ma è tipica dell'applicazione del metodo allo studio di sistemi hamiltoniani, quale quello in esame.
In figura 1 sono riportati il diagramma di biforcazione e i profili dell'energia potenziale per tre valori del rapporto $FR/k = \{0.5, 1, 1.5\}$.

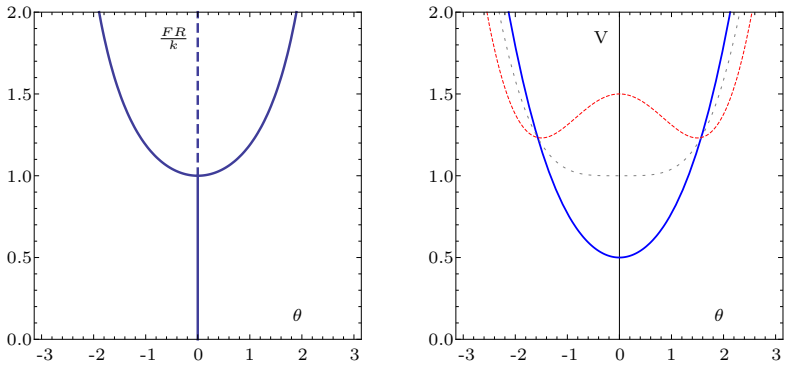


Figura 1: diagramma di biforcazione e andamento dell'energia potenziale.