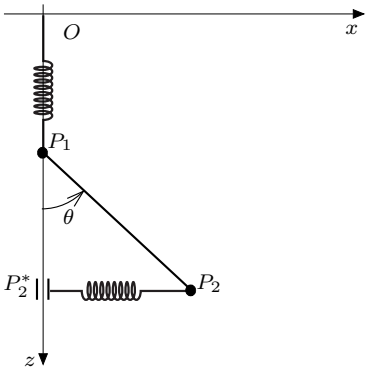
Esercitazione 2

(22.10.2012)

Esercizio 1

In un piano verticale (O, x, z) si consideri un sistema costituito da due punti materiali pesanti P_1 e P_2 di massa uguale $m_1 = m_2 = m$ sui quali agiscono le forze elastiche $-k\underline{OP_1}$ e $-k\underline{P_2^* P_2}$, essendo P_2^* la proiezione sull'asse verticale z del punto P_2. Sia inoltre il punto P_1 vincolato senza attrito a muoversi lungo l'asse z e i punti P_1 e P_2 vincolati a mantenere costante la mutua distanza (vincolo di rigidità). Si vuole:

- *determinare le equazioni pure del moto;*
- *determinare la reazione vincolare $\underline{r}$ e la reazione interna $\underline{\phi}$ al vincolo di rigidità;*
- *studiare l'equilibrio e la stabilità del sistema.*



Equazioni pure del moto

Detti $\underline{i}$ e $\underline{k}$ i versori degli assi x e z è possibile esprimere la posizione dei punti P_1 e P_2 come

$$\underline{x}_1(t) = \underline{OP_1}(t) = x_1(t)\underline{i} + z_1(t)\underline{k}, \qquad \underline{x}_2(t) = \underline{OP_2}(t) = x_2(t)\underline{i} + z_2(t)\underline{k}$$

(nel seguito si ometterà, per brevità, l'indicazione della variabile temporale). I vincoli sono rappresentati dalle condizioni

$$\underline{x}_1 = z_1\underline{k}, \qquad \|P_1P_2\| = \|\underline{x}_2 - \underline{x}_1\| = \text{cost.} = l$$

ossia

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0 \end{cases}$$

Si hanno $N = 2$ punti materiali e $M = 2$ vincoli olonomi bilateri, pertanto la generica configurazione del sistema è individuata da $n = 2N - M = 2$ parametri (coordinate lagrangiane). Si scelgono in particolare

$$q_1 = z_1 = z, \qquad q_2 = \theta$$

cioè la coppia (z, θ), con z coordinata che individua la posizione del punto P_1 lungo l'asse z e θ angolo tra l'asse z e la direzione del vettore $\underline{P_1P_2}$. Introdotte le coordinate lagrangiane e tenuto conto dei vincoli, i vettori posizione si scrivono

$$\underline{x}_1 = z\underline{k}, \qquad \underline{x}_2 = (l\sin\theta)\underline{i} + (z + l\cos\theta)\underline{k} \tag{1}$$

Sui punti P_1 e P_2 agiscono le forze esterne attive

$$-k\underline{OP_1} = -kz\underline{k}, \quad m\underline{g} = mg\underline{k}, \tag{2}$$

$$-k\underline{P_2^*P_2} = -kl\sin\theta\underline{i} \tag{3}$$

mentre la reazione vincolare $\underline{r}$ e la reazione al vincolo di rigidità $\underline{\phi}$ assumono le espressioni

$$\underline{r} = r_x\underline{i}, \qquad \underline{\phi} = \phi\frac{\underline{P_1P_2}}{\|\underline{P_1P_2}\|}$$

poiché l'ipotesi di vincolo liscio comporta $r_z = 0$ (ad ogni istante di tempo). Le equazioni del moto dei due punti si scrivono quindi

$$m\underline{a}_1 = m\underline{g} - k\underline{OP_1} + \underline{r} + \underline{\phi} \tag{4a}$$

$$m\underline{a}_2 = m\underline{g} - k\underline{P_2^*P_2} - \underline{\phi} \tag{4b}$$

Le azioni (reattive) $\underline{r}$ e $\underline{\phi}$ sono incognite e possono essere calcolate solo dopo aver determinato le leggi orarie $z(t), \theta(t)$. A tale scopo è necessario individuare un sistema di due equazioni nelle due incognite di configurazione nelle quali non compaiano le due incognite ausiliarie di reazione. Le equazioni cardinali per il sistema in esame hanno la forma seguente

$$m(\underline{a}_1 + \underline{a}_2) = -k\underline{OP_1} + \underline{r} + 2m\underline{g} - \underline{kP_2^*P_2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{TP_1} \wedge m\underline{v}_1 + \underline{TP_2} \wedge m\underline{v}_2) + \underline{v}_T \wedge (m\underline{v}_1 + m\underline{v}_2) =$$

$$= \underline{TP_1} \wedge (m\underline{g} - k\underline{OP_1} + \underline{r}) + \underline{TP_2} \wedge (m\underline{g} - k\underline{P_2^*P_2})$$

con T polo arbitrario. Poiché $r_z = \underline{r} \cdot \underline{k} = 0$, una equazione pura si ottiene immediatamente proiettando secondo l'asse z la prima equazione cardinale

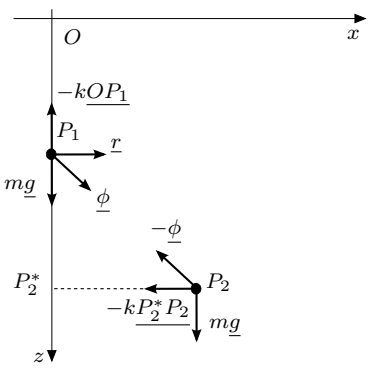
$$[m(\underline{a}_1 + \underline{a}_2)] \cdot \underline{k} = (-k\underline{OP_1} + \underline{r} + 2m\underline{g} - k\underline{P_2^*P_2}) \cdot \underline{k} \tag{5}$$

Per ottenere la seconda equazione pura è sufficiente osservare che, per eliminare il termine $\underline{TP_1} \wedge \underline{r}$ dalla seconda equazione cardinale, basta scegliere il punto P_1 come polo. La seconda equazione pura si ottiene quindi dalla proiezione secondo l'asse y ortogonale al piano del moto della seconda equazione cardinale scritta per $P_1 \equiv T$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{P_1P_2} \wedge m\underline{v}_2) + \underline{v}_1 \wedge (m\underline{v}_2)\right] \cdot \underline{j} = \left[\underline{P_1P_2} \wedge (m\underline{g} - k\underline{P_2^*P_2})\right] \cdot \underline{j} \tag{6}$$

Risulta quindi

$$\cos\theta = \underline{k} \cdot \frac{\underline{P_1P_2}}{\|\underline{P_1P_2}\|}$$



Si consideri dapprima la (5). Le espressioni delle accelerazioni $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$ dei due punti materiali nella base $\left\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\right\}$ si ottengono immediatamente a partire dalle (1)

$$\underline{v}_1 = \frac{\mathrm{d}\underline{x}_1}{\mathrm{d}t} = \dot{z}\underline{k}$$

$$\underline{v}_2 = \frac{\mathrm{d}\underline{x}_2}{\mathrm{d}t} = (l\dot{\theta}\cos\theta)\underline{i} + (\dot{z} - l\dot{\theta}\sin\theta)\underline{k}$$

e quindi

$$\underline{a}_1 = \frac{\mathrm{d}\underline{v}_1}{\mathrm{d}t} = \ddot{z}\underline{k}$$

$$\underline{a}_2 = \frac{\mathrm{d}\underline{v}_2}{\mathrm{d}t} = (l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta)\underline{i} + (\ddot{z} - l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta)\underline{k}$$

Ricordando le (2), la (5) si scrive

$$2m\ddot{z} - ml\dot{\theta}^2\cos\theta - ml\ddot{\theta}\sin\theta = -kz + 2mg \tag{7}$$

Si consideri ora la (6). Osservando che

$$\underline{P_1P_2} = \underline{x}_2 - \underline{x}_1 = l\sin\theta\underline{i} + l\cos\theta\underline{k}$$

si ottengono i termini

$$\underline{P_1P_2} \wedge m\underline{v}_2 = m\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ l\sin\theta & 0 & l\cos\theta \\ l\dot{\theta}\cos\theta & 0 & \dot{z} - l\dot{\theta}\sin\theta \end{vmatrix} = (ml^2\dot{\theta} - ml\dot{z}\sin\theta)\underline{j}$$

$$\underline{v}_1 \wedge m\underline{v}_2 = m\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{z} \\ l\dot{\theta}\cos\theta & 0 & \dot{z} - l\dot{\theta}\sin\theta \end{vmatrix} = (ml\dot{z}\dot{\theta}\cos\theta)\underline{j}$$

$$\underline{P_1P_2} \wedge (-k\underline{P_2^*P_2} + m\underline{g}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ l\sin\theta & 0 & l\cos\theta \\ -kl\sin\theta & 0 & mg \end{vmatrix} =$$
$$= (-kl^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta)\underline{j}$$

e la (6) si scrive

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ml^2\dot{\theta} - ml\dot{z}\sin\theta) + ml\dot{z}\dot{\theta}\cos\theta = -kl^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta$$

da cui si ottiene

$$ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{z}\sin\theta = -kl^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta \tag{8}$$

Le leggi orarie $z(t), \theta(t)$ sono quindi soluzione del sistema formato dalla (7) e dalla (8)

$$\begin{cases} 2m\ddot{z} - ml\dot{\theta}^2\cos\theta - ml\ddot{\theta}\sin\theta = -kz + 2mg \\ ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{z}\sin\theta = -kl^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta \end{cases} \tag{9}$$

con le opportune condizioni iniziali

$$z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \qquad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

Reazioni vincolari

Note le leggi orarie $z(t), \theta(t)$ il calcolo delle reazioni vincolari $\underline{r}$ e $\underline{\phi}$ è immediato. L'unica componente non nulla della reazione $\underline{r}$ si ottiene proiettando secondo l'asse x la prima equazione cardinale

$$[m(\underline{a}_1 + \underline{a}_2)] \cdot \underline{i} = (-k\underline{OP_1} + \underline{r} + 2m\underline{g} - k\underline{P_2^* P_2}) \cdot \underline{i}$$

da cui

$$ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \sin\theta = -kl\sin\theta + r_x$$

e quindi

$$r_x = ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \sin\theta + kl\sin\theta$$

Nota $\underline{r}$, le componenti ϕ_x e ϕ_z del vettore $\underline{\phi}$ secondo gli assi x e z si ottengono da una delle due (4). Ad esempio, utilizzando la (4a), dalle proiezioni

$$m\underline{a}_1 \cdot \underline{i} = (m\underline{g} - k\underline{OP_1} + \underline{r} + \underline{\phi}) \cdot \underline{i}$$
$$m\underline{a}_1 \cdot \underline{k} = (m\underline{g} - k\underline{OP_1} + \underline{r} + \underline{\phi}) \cdot \underline{k}$$

si ottiene

$$0 = \phi_x + r_x$$
$$m\ddot{z} = -kz + mg + \phi_z$$

da cui

$$\phi_x = -r_x$$
$$\phi_z = kz - mg + m\ddot{z}$$

Equilibrio e stabilità

Dalle equazioni pure del moto (9) è immediato ottenere le equazioni di equilibrio come

$$\begin{cases} 0 = -kz + 2mg \\ 0 = -kl^2 \sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta \end{cases} \tag{10}$$

Le medesime equazioni, a meno eventualmente di una costante moltiplicativa e del segno, possono essere ottenute come punti di stazionarietà dell'energia potenziale del sistema V

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta} = 0 \tag{11}$$

L'energia potenziale del sistema si scrive infatti

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(z,\theta) &= \frac{1}{2}k\|OP_1\|^2 - mgz + \frac{1}{2}k\|P_2^* P_2\|^2 - mg(z + l\cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}kz^2 - mgz + \frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2 - mg(z + l\cos\theta) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = kz - 2mg \\ \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta} = kl^2 \sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta \end{cases}$$

Le posizioni di equilibrio E_i si ottengono dunque dal sistema (10)

$$\begin{cases} 0 = -kz + 2mg \\ 0 = \sin\theta\Big(\cos\theta + \dfrac{mg}{kl}\Big) \end{cases}$$

che, per $\theta \in [0, 2\pi)$, ha soluzione

$$\begin{cases} z = \dfrac{2mg}{k} \\ \theta = \Big\{0, \quad \pi\Big\} \end{cases}$$

se $(mg/kl) > 1$, e soluzione

$$\begin{cases} z = \dfrac{2mg}{k} \\ \theta = \Big\{0, \quad \pi, \quad \arccos\Big(-\dfrac{mg}{kl}\Big), \quad 2\pi - \arccos\Big(-\dfrac{mg}{kl}\Big)\Big\} \end{cases}$$

se $(mg/kl) < 1$.
Posto $\zeta = 2mg/k$ e $\psi = \arccos(-mg/kl)$, nel primo caso ($\frac{mg}{kl} > 1$) si hanno le due posizioni di equilibrio

$$\mathsf{E}_1 = \Big(\zeta, 0\Big), \quad \mathsf{E}_2 = \Big(\zeta, \pi\Big)$$

mentre nel secondo caso ($\frac{mg}{kl} < 1$) le posizioni di equilibrio sono le seguenti quattro

$$\mathsf{E}_1 = \Big(\zeta, 0\Big), \quad \mathsf{E}_2 = \Big(\zeta, \pi\Big), \quad \mathsf{E}_3 = \Big(\zeta, \psi\Big), \quad \mathsf{E}_4 = \Big(\zeta, 2\pi - \psi\Big)$$

Per il **teorema di Dirichlet-Lagrange** una posizione d'equilibrio è stabile se in essa l'energia potenziale V ha un minimo locale stretto.
Per il **teorema di Ljapunov** se in una posizione d'equilibrio l'energia potenziale V non ha un minimo locale e tale assenza di minimo è riconoscibile dall'esame delle derivate seconde, allora l'equilibrio è instabile.
Si scrive pertanto il determinante della matrice hessiana di V

Per avere un minimo locale stretto la matrice hessiana deve essere definita positiva.

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z^2} > 0, \quad \mathrm{H} > 0$$

$$\mathrm{H}(z,\theta) := \det H_{\mathrm{V}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z^2} & \dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z \partial \theta} \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \theta \partial z} & \dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \theta^2} \end{vmatrix}$$

da cui

$$\mathrm{H}(z,\theta) = \begin{vmatrix} k > 0 & 0 \\ 0 & kl^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + mgl\cos\theta \end{vmatrix}$$

ovvero

$$\mathrm{H}(z,\theta) = k\big[kl^2(2\cos^2\theta - 1) + mgl\cos\theta\big]$$

Avendo fatto uso della relazione

$$-\sin^2\theta = -1 + \cos^2\theta$$

Per le posizioni d'equilibrio E_1 ed E_2 si ha

$$\mathrm{H}(\mathsf{E}_1) = \mathrm{H}(\zeta, 0) = k(kl^2 + mgl) > 0$$
$$\mathrm{H}(\mathsf{E}_2) = \mathrm{H}(\zeta, \pi) = k(kl^2 - mgl) > 0 \quad \text{per } (mg/kl) < 1$$

La posizione E_1 è dunque sempre stabile, mentre la posizione E_2 è stabile quando esistono anche le posizioni d'equilibrio E_3 ed E_4, essendo altrimenti instabile. Per le posizioni d'equilibrio E_3 ed E_4, poiché $\mathrm{H}(\zeta,\psi) = \mathrm{H}(\zeta, 2\pi - \psi)$ si ha

$$\mathrm{H}(\mathsf{E}_3) = \mathrm{H}(\mathsf{E}_4) = \mathrm{H}(\zeta,\psi) = k^2l^2\Big[-1 + \Big(\frac{mg}{kl}\Big)^2\Big] < 0 \quad \text{per } (mg/kl) < 1$$

e quindi, quando esistono, le posizioni d'equilibrio E_3 ed E_4 sono instabili.